

МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство
по образованию

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

физический факультет

Квалификационная работа на соискание
степени магистра
Кафедра физики плазмы

Черноштанов Иван Сергеевич

Альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость в ловушке с сильно
анизотропной плазмой

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Цидулко Юрий Александрович

Новосибирск – 2010 год

Содержание

1	Введение	2
2	Оценки для сильно анизотропной ограниченной плазмы	4
3	Абсолютная неустойчивость в пределе большой анизотропии	6
4	Неустойчивые моды в сильно анизотропной неоднородной плазме	8
4.1	Оператор диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы	8
4.2	Интегральное уравнение для собственных мод	9
4.3	Численные результаты	11
4.4	Аналитическое решение в пределе бесконечно большой анизотропии . . .	13
5	Заключение	17
6	Приложение 1	18
7	Приложение 2	21

1 Введение

В плазме с анизотропной функцией распределения могут развиваться различные микронеустойчивости, одной из которых является альфвеновская ионно-циклотронная (АИС) неустойчивость. АИС неустойчивость есть возбуждение циркулярно поляризованных альфвеновских волн с частотой, близкой к ионной циклотронной. Поле в волне вращается в направлении вращения ионов. Неустойчивость наблюдалась в открытых ловушках (на установке ТМХ [1], в компактном пробкотроне ГДЛ [2, 3, 4] и др.) и в магнитосфере [5]. Развитие микронеустойчивостей может приводить к ускорению потери частиц плазмы. В частности, на установке ТМХ наблюдалась ускоренная потеря частиц из центрального пробкотрона, вызванная развитием неустойчивости в концевых пробкотронах [6, 7]. Численное моделирование взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли [5] показывает, что АИС неустойчивость может ограничивать анизотропию функции распределения ионов.

В литературе подробно изучались критерии возникновения альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости. В работах [8, 9] на основе анализа дисперсионного соотношения подробно рассмотрена неустойчивость в однородной бесстолкновительной бимаксвелловской плазме в однородном магнитном поле. В [8] получены ограничения на частоту и длину волны неустойчивого возмущения, численно найдена зависимость частоты и инкремента неустойчивости от длины волны. В [9] была отмечена роль резонансных частиц в развитии неустойчивости и показано, что неограниченная плазма неустойчива даже при малой анизотропии. В работе [10] изучены длинноволновые альфвеновские возмущения в однородной бимаксвелловской плазме и отмечена возможность стабилизации неустойчивости неоднородностью плазмы. В работе [11] численно исследована устойчивость бимаксвелловской плазмы с $\beta_{\perp} > 0.1$ и не слишком большой анизотропией, $\beta_{\perp}/\beta_{\parallel} < 10$, где β_{\perp} и β_{\parallel} – отношения продольного и поперечного давления плазмы к давлению внешнего магнитного поля. В [11] получена граница абсолютности неустойчивости (критерий того, что возмущение в фиксированной точке плазмы растет при $t \rightarrow \infty$) для однородной плазмы в однородном магнитном поле, и в WKВ-приближении получена граница устойчивости для плазмы в слабонеоднородном магнитном поле. На результатах работы [11] основан традиционно используемый критерий неустойчивости в форме [1, 12] $\beta_{\perp}(W_{\perp}/W_{\parallel})^2 > Const$, где W_{\perp} и W_{\parallel} – средние поперечная и продольная энергии частиц, $Const \sim 3 \div 15$ определяется размерами плазмы.

В экспериментах с компактных пробкотроном на установке ГДЛ достигнута высокая анизотропия $W_{\perp}/W_{\parallel} \approx 50$ [2, 3, 4], плазма с такими параметрами не рассмотрена в [11]. Целью данной работы является изучение условий развития альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости в сильно анизотропной бимаксвелловской плазме. Большая анизотропия приводит к резкому пространственному изменению параметров плазмы, помещенной в неоднородное магнитное поле. При этом длина волны неустойчивого возмущения оказывается порядка размера неоднородности плазмы, что приводит к неприменимости WKБ-приближения. Во втором разделе настоящей работы приведены простые оценки, показывающие, что в случае большой анизотропии граничное β_{\perp} значительно превышает предсказываемое традиционным критерием значение.

Критерий абсолютности неустойчивости может быть полезен для оценки устойчивости в случае, когда размеры плазмы заведомо превышают длину волны неустойчивого возмущения. В третьей части аналитически получено продолжение в область большой анизотропии для границы абсолютности неустойчивости, численно найденной в [11]. Так же получены выражения для частоты и длины волны неустойчивого возмущения.

В четвертой части рассматривается бимаксвелловская плазма в слабонеоднородном магнитном поле. В приближении большой анизотропии, когда внешнее магнитное поле слабо изменяется на размере неоднородности плазмы, получено одномерное интегральное уравнение для собственных мод. Резкое пространственное изменение параметров плазмы приводит локализации неустойчивых возмущений на размере неоднородности плазмы. Ограниченность приводит к появлению дискретного спектра собственных мод со своими частотами и пороговыми β_{\perp} . Численное решение позволяет найти для каждой моды пороговое значение β_{\perp} , зависимости частоты и инкремента от β_{\perp} при заданных анизотропии, ионном ларморовском радиусе и размерах плазмы; также можно получить пространственное распределение возмущений полей. В пределе бесконечно большой анизотропии найдено аналитическое решение и получена асимптотика границы устойчивости.

Полученные данные подтверждают экспериментальный вывод [4], что для сильно анизотропной ограниченной плазмы граница неустойчивости лежит выше, чем предсказывает традиционный критерий.

2 Оценки для сильно анизотропной ограниченной плазмы

В работе [8] на основе анализа дисперсионного соотношения (3) для альфвеновской волны, распространяющейся вдоль внешнего однородного магнитного поля в однородной бимаксвелловской плазме, показано, что частота и длина волны неустойчивого возмущения удовлетворяют условиям $\lambda^2 > 2\rho_\perp^2/(\mathcal{A}\beta_\perp)$, $\omega < \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$. Здесь $\rho_\perp = \sqrt{T_\perp/m\Omega_{ci}^2}$ – поперечный ларморовский радиус, Ω_{ci} – ионная циклотронная частота, \mathcal{A} – отношение поперечной и продольной ионных температур (анизотропия), $\beta_\perp = 8\pi nT_\perp/B^2$ – отношение поперечного давления плазмы к давлению внешнего магнитного поля. Границе устойчивости соответствует частота $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, при которой резонансные ионы, скорость которых удовлетворяет условию циклотронного резонанса $\omega - \Omega_{ci} - kv_\parallel = 0$, двигаются вдоль изолиний функции распределения и не обмениваются энергией с волной.

С другой стороны, если плазма является неоднородной с характерным продольным размером неоднородности l , то длина волны неустойчивого возмущения ограничена условием $\lambda \lesssim l$. Таким образом, неустойчивость возможна, если выполняется условие

$$\beta_\perp \mathcal{A} \lesssim \rho_\perp^2/l^2. \quad (1)$$

Характерный размер бимаксвелловской плазмы, помещенной в неоднородное магнитное поле с размером неоднородности L , можно оценить как $l \sim L/\sqrt{\mathcal{A}}$ (см. п. 4.2). Таким образом, условие (1) можно переписать в виде

$$\frac{\omega_{pi}L}{c} \lesssim 1. \quad (2)$$

Возможность стабилизации АИС неустойчивости неоднородностью плазмы в гидродинамическом режиме (длина волны возмущения предполагалась много большей поперечного ларморовского радиуса) также обсуждалась в работе [10].

Сравним (1) с критерием абсолютности неустойчивости (см. п. 3). Порогу абсолютности неустойчивости в однородной плазме соответствует длина волны возмущения $\lambda \sim \rho_\perp \sqrt{\mathcal{A}}$, которая должна быть меньше длины плазмы. Таким образом, критерий (1) определяет устойчивость при $\mathcal{A} \gg l^2/\rho_\perp^2$, что эквивалентно $\mathcal{A} \gg L/\rho_\perp$.

Для плазмы в неоднородном магнитном поле частоту баунс-колебаний частиц можно оценить как $\Omega_b \sim v_\perp/L = \Omega_{ci}\rho_\perp/L$. Сравним разность частоты возмущения и циклотронной частоты с баунс-частотой. Частоту неустойчивого возмущения можно оценить как $\omega \sim \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, таким образом при $\mathcal{A} \gg L/\rho_\perp$ $\omega - \Omega_{ci} \sim \Omega_{ci}/\mathcal{A} \ll \Omega_b$ – за время

сбоя фазы между циклотронным вращением и вращением поля волны частица успевает совершить много баунс-осцилляций. Это приводит к необходимости использовать интегральные соотношения при описании неустойчивого возмущения в неоднородной плазме. В обратном предельном случае, $\mathcal{A} \ll L/\rho_{\perp}$, за время обмена энергией с волной частица перемещается в продольном направлении на расстояние много меньшее размера неоднородности и можно использовать локальное дисперсионное соотношение.

Помимо альфвеновской ионно-циклотронной, в анизотропной плазме может развиваться зеркальная неустойчивость. Критерий возникновения этой неустойчивости в однородной бимаксвелловской плазме при $k_{\perp}\rho_{\perp} \ll 1$ имеет вид $\beta_{\perp}(\mathcal{A}-1) > 1 + (k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2)(1 + (\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})/2)$ [13]. Из условий $k_{\perp}\rho_{\perp} \ll 1$ и $k_{\parallel} > 1/l$ найдем $\rho_{\perp}/l \ll k_{\parallel}/k_{\perp}$, таким образом в данной задаче при $\mathcal{A} \gg 1$ граница зеркальной неустойчивости лежит выше границы АИС неустойчивости.

3 Абсолютная неустойчивость в пределе большой анизотропии

Дисперсионное уравнение для альфвеновской волны с волновым вектором k и частотой ω порядка ионно-циклотронной, распространяющейся вдоль однородного магнитного поля в бесстолкновительной бимаксвелловской плазме, можно записать в виде [8, 9, 11] $D[k, \omega] = 0$, где

$$D[k, \omega] = k^2 v_A^2 - \frac{\omega^2 - \{1 - 1/\mathcal{A} - \omega/\Omega_{ci}\} \Omega_{ci}^2 \mathcal{A} G[X]}{1 - \omega/\Omega_{ci}}, \quad X = \frac{\omega - \Omega_{ci}}{\sqrt{2} |k v_{T\parallel}|}, \quad (3)$$

где v_A – альфвеновская скорость, $v_{T\parallel} = \sqrt{T_{\parallel}/m}$ – продольная тепловая скорость ионов,

$$G[x] = \sqrt{\pi} x e^{-x^2} (\operatorname{erfi}[x] - i) - 1, \quad \operatorname{erfi}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{y^2} dy. \quad (4)$$

Результаты работы [8] показывают, что в неограниченной бимаксвелловской плазме неустойчивость есть всегда – необходимо и достаточно выбрать возмущение с длиной волны $\lambda^2 > \rho_{\perp}^2 / (\mathcal{A} \beta_{\perp})$. Однако неустойчивость может оказаться либо абсолютной (возмущение нарастает во всех точках плазмы), либо конвективной – возмущение представляет собой волновой пакет, который перемещается достаточно быстро и возмущение в фиксированной точке убывает при $t \rightarrow \infty$ [14]. Для нахождения границы абсолютности неустойчивости в работе [11] применяется критерий Бриггса-Берса. Этот критерий отбирает частоту и комплексный волновой вектор возмущения, удовлетворяющие дисперсионному соотношению $D[k, \omega] = 0$ и условию слияния корней дисперсионного соотношения $\partial_k D[k, \omega] = 0$ [15]. В комплексной плоскости сливающиеся корни $k[\omega]$ должны расходиться по разные стороны вещественной оси при $\omega \rightarrow \infty$.

Найдем асимптотику границы абсолютности неустойчивости в однородной бимаксвелловской плазме при $\mathcal{A} \gg 1$. С учетом $D[k, \omega] = 0$ запишем условие $\partial_k D[k, \omega] = 0$ как

$$\frac{\partial D}{\partial k} = \omega^2 \Omega_{ci} (\Omega_{ci} - \omega) + \left(\Omega_{ci}^2 v_{T\parallel}^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_{ci}} + 1 - \mathcal{A} \right) - v_A^2 (\omega - \Omega_{ci})^2 \right) k^2 + 3v_A^2 v_{T\parallel}^2 k^4 = 0. \quad (5)$$

Альфвеновская скорость связана с давлением плазмы и тепловой скоростью частиц соотношением $v_A = \sqrt{2/\beta_{\parallel}} v_{T\parallel}$, где $\beta_{\parallel} = \beta_{\perp}/\mathcal{A}$. Ищем асимптотику частоты и давления на границе абсолютной неустойчивости в пределе $\mathcal{A} \gg 1$ в форме $\omega/\Omega_{ci} = 1 - a/\mathcal{A}^{\xi}$,

$\beta_{\parallel} = b/\mathcal{A}^{\eta}$, $a, b, \xi, \eta > 0$. Тогда решение уравнения (5) можно записать в виде

$$k^2 = \frac{\Omega_{ci}^2}{12v_{T\parallel}^2} \left(2a^2/\mathcal{A}^{2\xi} + (\mathcal{A} - 2 + a/\mathcal{A}^{\xi})b/\mathcal{A}^{\eta} \pm \sqrt{4a^4/\mathcal{A}^{4\xi} + 4a((10 + \mathcal{A})a/\mathcal{A}^{\xi} - 6 - 5a^2/\mathcal{A}^{2\xi})b/\mathcal{A}^{\xi+\eta} + (\mathcal{A} - 2 + a/\mathcal{A}^{\xi})^2 b^2/\mathcal{A}^{2\eta}} \right) \rightarrow$$

$$\frac{\Omega_{ci}^2}{12v_{T\parallel}^2} \left(2a^2/\mathcal{A}^{2\xi} + b/\mathcal{A}^{\eta-1} \pm \sqrt{4a^4/\mathcal{A}^{4\xi} + 4ab(a/\mathcal{A}^{\xi-1} - 6)/\mathcal{A}^{\xi+\eta} + b^2/\mathcal{A}^{2\eta-2}} \right) \quad (6)$$

Границе абсолютности неустойчивости соответствуют комплексные значения волнового вектора. Из условия отрицательности подкоренного выражения в (6) следует $\xi + \eta \leq 4\xi$, $\xi + \eta \leq 2\xi + \eta - 1$, $\xi + \eta \leq 2(\eta - 1)$, откуда найдем $\xi \geq 1$, $\eta \leq 3\xi$, $\eta \geq \xi + 2$. Эти условия удовлетворяются при $\xi = 1$, $\eta = 3$, что дает граничное значение волнового вектора в пределе большой анизотропии $k^2 = \Omega_{ci}^2 \left(2a^2 + b \pm \sqrt{4a^4 + 4ab(a - 6) + b^2} \right) / (12v_{T\parallel}^2 \mathcal{A}^2)$. Подставляя его в дисперсионное соотношение и учитывая асимптотики для частоты и β_{\parallel} , получим уравнение для коэффициентов a и b :

$$\frac{a}{6b} \left(2a^2 + b + \sqrt{4a^4 + 4ab(a - 6) + b^2} \right) = 1 - (a - 1)G \left[\frac{\sqrt{6}a}{\sqrt{2a^2 + b + \sqrt{4a^4 + 4ab(a - 6) + b^2}}} \right]. \quad (7)$$

Численное решение дает значения $a = 1.55283 \dots$, $b = 3.51841 \dots$. Таким образом, асимптотика критерия абсолютности неустойчивости в однородной бимаксвелловской плазме имеет вид

$$\beta_{\perp} \mathcal{A}^2 > 3.51841, \quad (8)$$

границе неустойчивости соответствуют волновой вектор и частота возмущения $k\rho_{\perp} = \sqrt{2a^2 + b + \sqrt{4a^4 + 4ab(a - 6) + b^2}}/\sqrt{12\mathcal{A}} \approx (0.9 + 0.4i)/\sqrt{\mathcal{A}}$, $\omega/\Omega_{ci} = 1 - a/\mathcal{A} \approx 1 - 1.5/\mathcal{A}$.

4 Неустойчивые моды в сильно анизотропной неоднородной плазме

4.1 Оператор диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы

Рассмотрим возмущение электрического поля $\delta\vec{E}[\vec{r}]e^{-i\omega t}$ в плазме, помещенной во внешнее неоднородное магнитное поле. Возмущение поля удовлетворяет уравнению Максвелла

$$c^2(\partial_\alpha\partial_\beta - \delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma^2)\delta E_\beta = \omega^2\delta D_\alpha, \quad (9)$$

где возмущение электрической индукции связано с возмущением поля оператором диэлектрической проницаемости

$$\delta D_\alpha = \delta E_\alpha + \frac{4\pi i}{\omega} j_\alpha = \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}\delta E_\beta. \quad (10)$$

В неоднородной среде оператор диэлектрической проницаемости является интегральным оператором.

Возмущение плотности тока есть $j_\alpha = \sum_s q_s \int d^3v v_\alpha \delta f[\vec{r}, \vec{v}, t]$, возмущение функции распределения δf удовлетворяет линеаризованному уравнению Власова. Далее будем использовать возмущение функции распределения как функцию от координат и импульсов, $\delta f[\vec{r}, \vec{p}, t] = \left(\delta f[\vec{r}, \vec{v}, t] - q\delta\vec{A} \cdot \partial_{\vec{v}}\mathcal{F}[\vec{r}, \vec{v}, t]/(mc) \right) |_{\vec{v}=(\vec{p}-q\vec{A}/c)/m}$, где импульс $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}/c$, \vec{A} есть векторный потенциал внешнего магнитного поля, $\delta\vec{A} = ic\delta\vec{E}/\omega$ – его возмущение. Функция δf удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta f}{dt} = \{\delta H, \mathcal{F}\}_{\vec{p}, \vec{r}}, \quad (11)$$

где $\{a, b\}_{\vec{p}, \vec{q}} = \partial_{\vec{q}}a \cdot \partial_{\vec{p}}b - \partial_{\vec{p}}a \cdot \partial_{\vec{q}}b$ – скобка Пуассона величин a и b по переменным \vec{p} и \vec{q} , $\mathcal{F}[\vec{r}, \vec{p}]$ – невозмущенная функция распределения, $\delta H = -\frac{q}{c}\vec{v} \cdot \delta\vec{A}$ – возмущение гамильтониана.

Решение уравнения (11) в случае $\text{Im}[\omega] > 0$ можно записать в виде

$$\delta f[t, \vec{r}, \vec{p}] = i\frac{q}{c}e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \{\delta\vec{E}[\vec{r}^{\check{}}] \cdot \check{\vec{v}}, \mathcal{F}\}_{\vec{p}, \vec{r}}, \quad (12)$$

где $\check{\vec{r}} = \check{\vec{r}}[\tau, \vec{r}, \vec{p}]$ и $\check{\vec{v}} = \check{\vec{v}}[\tau, \vec{r}, \vec{p}]$ есть координата и скорость частицы на невозмущенной траектории, удовлетворяющие условиям $\check{\vec{r}}[0, \vec{r}, \vec{p}] = \vec{r}$, $\check{\vec{v}}[0, \vec{r}, \vec{p}] = \vec{v}$.

Выражая возмущение плотности тока через возмущение функции распределения, оператор диэлектрической проницаемости можно записать как

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}\delta E_\beta = \delta E_\alpha + \sum_s \left\{ -\frac{\omega_{ps}^2[\vec{r}]}{\omega^2} \delta E_\alpha + \frac{4\pi q_s^2}{\omega^2 m_s^3} \int d^3p \cdot v_\alpha \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \left\{ \mathcal{F}_s, \check{v}_\beta \delta E_\beta[\vec{r}^{\check{}}] \right\}_{\vec{p}, \vec{r}} \right\}, \quad (13)$$

где $\omega_{ps}^2[\vec{r}] = 4\pi n[\vec{r}]e_s^2/m_s$ – плазменные частоты, сумма берется по всем сортам частиц. Переходя к фурье-компонентам, получим

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}\delta E_\beta = \delta E_\alpha + \frac{1}{8\pi^3} \sum_s \int d^3r' d^3k d^3k' e^{i\vec{k}\vec{r} - i\vec{k}'\vec{r}'} G_{\alpha\beta}^{(s)}[\omega, \vec{k}, \vec{k}'] \delta E_\beta[\vec{r}'] \quad (14)$$

где

$$G_{\alpha\beta}^{(s)} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi^3\omega^2} \int d^3r \omega_{ps}^2[\vec{r}] e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{r}} + \frac{q_s^2}{2\pi^2\omega^2 m_s^3} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\omega\tau} \int d\Gamma \mathcal{F}_s \left\{ \check{v}_\beta e^{i\vec{k}'\vec{r}}, v_\alpha e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right\}_{\vec{p}, \vec{r}}, \quad (15)$$

$d\Gamma = d^3q d^3p$ – элемент объема фазового пространства. Полученное выражение для оператора диэлектрической проницаемости инвариантно относительно канонических преобразований, что упрощает замену переменных.

4.2 Интегральное уравнение для собственных мод

Используем следующий гамильтониан, приближенно описывающий движение ионов в ловушке со слабо (квадратично) меняющимся в продольном направлении параксиальным магнитным полем

$$H[\theta, z; \mu, p_z] = \mu\Omega_{ci}(1 + \kappa^2 z^2) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad (16)$$

где Ω_{ci} – ионная циклотронная частота в центре ловушки,

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2\Omega_{ci}(1 + \kappa^2 z^2)}, \quad \theta = -\arctan \left[\frac{v_y}{v_x} \right], \quad (17)$$

есть адиабатический инвариант и сопряженная с ним фаза. В качестве интегралов движения удобно выбрать полную и "поперечную" энергии

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}, \quad \mathcal{E}_\perp = \Omega\mu = \frac{mv_\perp^2}{2(1 + \kappa^2 z^2)}. \quad (18)$$

В качестве равновесной функции распределения можно выбрать любую функцию от интегралов движения \mathcal{E} и \mathcal{E}_\perp . Для ионов предполагаем бимаксвелловское распределение

$$\mathcal{F}[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\perp] = n_c \sqrt{\frac{m^3 \mathcal{A}}{8\pi^3 T_\perp^3}} e^{-(\mathcal{A}\mathcal{E} - (\mathcal{A}-1)\mathcal{E}_\perp)/T_\perp}, \quad (19)$$

где n_c – плотность частиц в центре ловушки, $\mathcal{A} = T_\perp/T_\parallel$ – анизотропия. Продольная зависимость плотности есть

$$n[z] = n_c \frac{1 + \kappa^2 z^2}{1 + \mathcal{A}\kappa^2 z^2} = n_c \frac{1 + z^2/L^2}{1 + z^2/l^2}, \quad (20)$$

где $L = 1/\kappa$ – характерный размер изменения магнитного поля и $l = L/\sqrt{\mathcal{A}}$ есть характерный размер изменения плотности плазмы (рисунок 1). Электроны предполагаем холодными, при этом их плотность в каждой точке плазмы совпадает с плотностью ионов.

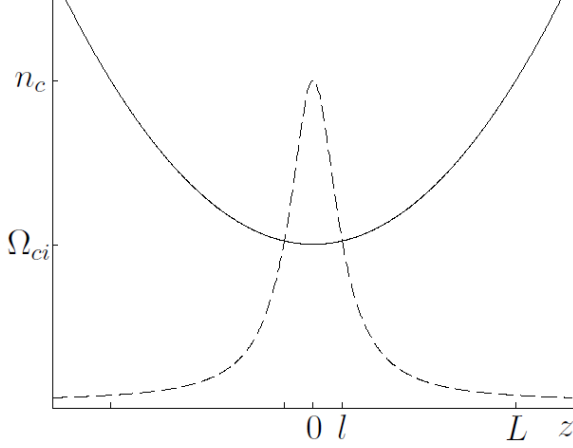


Рис. 1: Зависимость величины магнитного поля на оси (сплошная линия) и плотности плазмы (пунктир) от продольной координаты.

Удобно представить электрическое поле в виде набора циркулярных поляризаций,

$$E_{\pm} = E_x \pm iE_y, \quad D_{\pm} = D_x \pm iD_y, \quad (21)$$

Ищем возмущение электрического поля в форме $\delta\vec{E}[\vec{k}] = \delta\vec{E}[k_{\parallel}] \exp[i\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}]$, где k_{\perp} порядка поперечного размера неоднородности. Подставляя (16), (19) и (20) в (14), получим, что уравнения на все компоненты E_+ , E_- , E_z расщепляются:

$$D_{\pm}[k] = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\pm}[k, k'] E_{\pm}[k'] dk', \quad D_z[k] = \int_{-\infty}^{\infty} G_z[k, k'] E_z[k'] dk'. \quad (22)$$

Далее будем предполагать, что частота волны слабо отличается от циклотронной ионной в центре ловушки $\omega/\Omega_{ci} - 1 \sim 1/\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \gg l^2/\rho_{\perp}^2$ (условие $\mathcal{A} \gg 1$ соответствует малости изменения внешнего магнитного поля на размере неоднородности плазмы), $k_{\perp}\rho_{\perp} \ll 1$ (электрическое поле возмущения слабо изменяется в на ларморовском радиусе иона). Подставляя в выражение (15) функцию распределения ионов (19), предполагая электроны холодными и переходя к переменным гамильтониана (16), найдем выражение для циркулярных компонент оператора диэлектрической проницаемости (см. Приложение 1) в форме

$$G_{\pm}[\check{k}, \check{k}'] = \frac{\omega_{pic}^2}{\omega^2 \kappa \sqrt{\mathcal{A}}} g_{\pm}[\check{k}, \check{k}'], \quad (23)$$

где

$$g_{\pm}[\check{k}, \check{k}'] = -\frac{\delta[\check{k} - \check{k}']}{\mathcal{A}} - \frac{1 - 1/\mathcal{A} \pm \omega/\Omega_{ci}}{2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \frac{1}{4} \mathcal{A} (1 + |\check{k} - \check{k}'|) e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \frac{\mathcal{A}^{3/2}}{\check{\rho}} \left(\frac{\omega}{\Omega_{ci}} \mp \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}}\right) \right) \int_0^{\infty} \frac{udu}{(1+u^2)^2 X} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_n[\check{k}u] J_n[\check{k}'u] (X_n^2 - 2X_n^4 G[X_n]) - \frac{3}{4} J_0[\check{k}u] J_0[\check{k}'u] \right). \quad (24)$$

Здесь ω_{pic} – ионная плазменная частота в центре ловушки, $\check{k} = kl$ и $\check{\rho} = \rho_{\perp}/l$ – волновой вектор и поперечный ларморовский радиус, нормированные на длину плазмы, функция $G[x]$ определяется выражением (4), $X = \sqrt{\mathcal{A}} (\omega/\Omega_{ci} \mp \{1 + u^2/(2\mathcal{A})\}) \sqrt{1 + u^2}/\check{\rho}$, $X_n = X/n$.

Подставив диэлектрическую проницаемость в уравнение Максвелла (9), запишем уравнения для циркулярных компонент электрического поля в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\pm}[\check{k}, \check{k}'] E_{\pm}[\check{k}'] d\check{k}' = \frac{\check{\rho}^2}{\beta_{\perp}} \left(\left(\check{k}^2 + \frac{\check{k}_{\perp}^2}{2} \right) E_{\pm}[\check{k}] - \frac{\check{k}_{\perp}^2}{2} E_{\mp}[\check{k}] \right). \quad (25)$$

4.3 Численные результаты

Алгоритм численного решения уравнений (25), применявшийся в данной работе, описан в Приложении 2. Ограниченность плазмы приводит к появлению дискретного набора собственных мод. Численное решение позволяет найти при заданных анизотропии, ларморовском радиусе и k_{\perp} для каждой моды распределение возмущений полей, частоту возмущения и соответствующее β_{\perp} . Граница устойчивости определяется модой с наименьшим β_{\perp} .

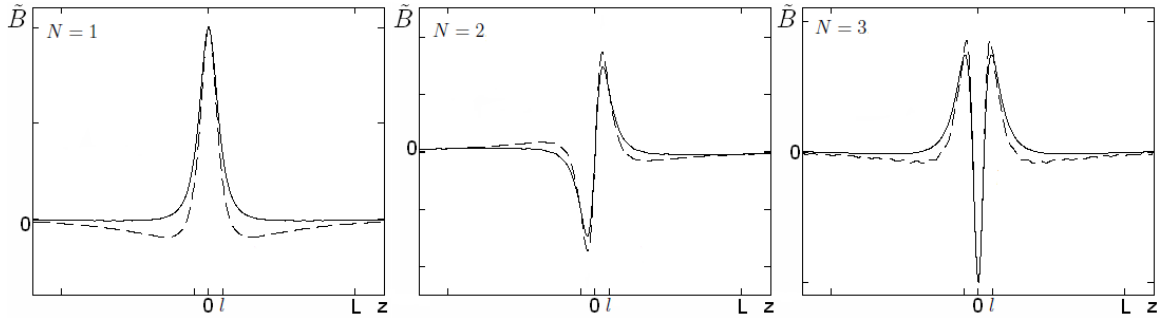


Рис. 2: Возмущения магнитного поля для первых трех мод. Сплошная кривая – поля с $k_{\perp} = 0$, пунктирная кривая – $k_{\perp} l = 0.2$.

На рисунке 2 показаны характерные распределения компоненты $B_{+}[z]$ возмущения магнитного поля (компонента B_{-} не находится в резонансе с ионами и мала) для первых

трех мод с наименьшими значениями β_{\perp} (пороговое значение β_{\perp} возрастает с номером моды). Видно, что магнитное поле возмущений локализовано в области порядка характерного размера неоднородности плазмы. Граница устойчивости определяется первой модой.

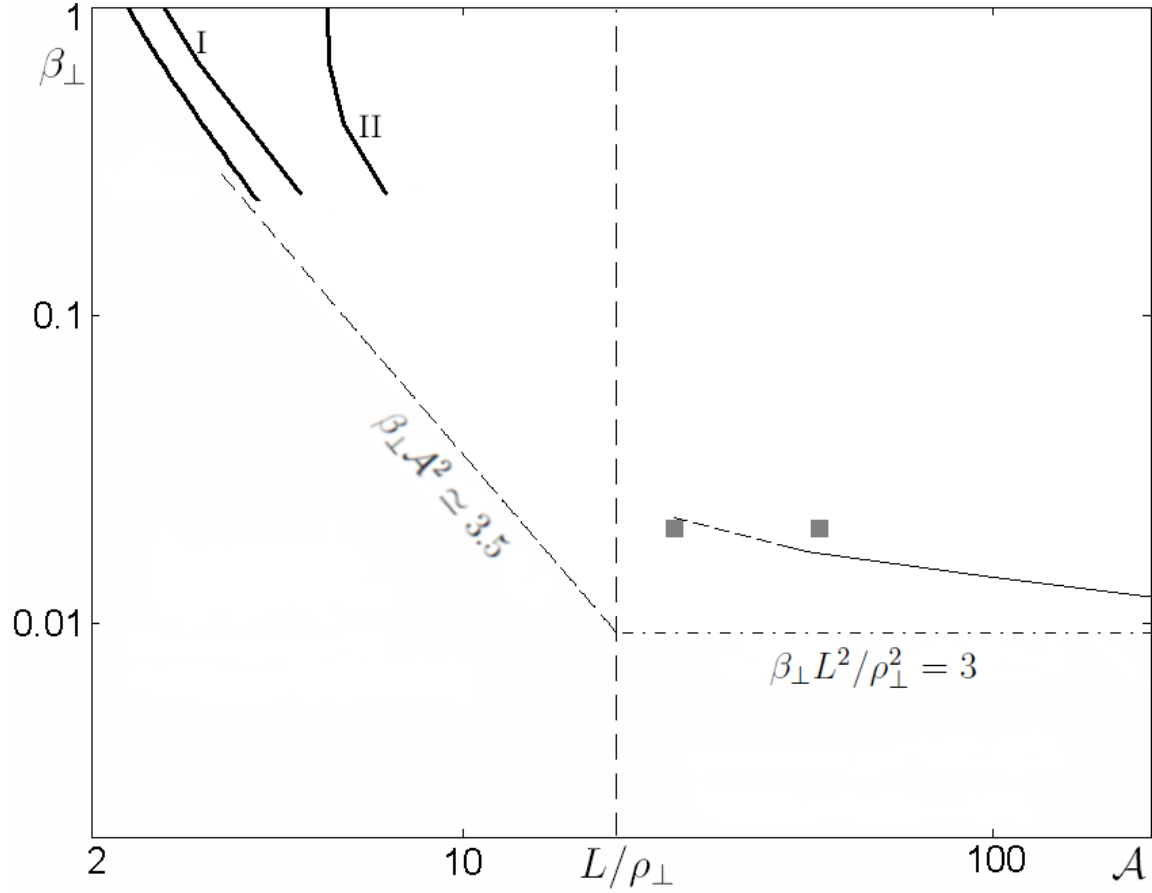


Рис. 3: Граница альфвеновской ионно-циклотронной неустойчивости в бимаксвелловской плазме. Толстые кривые – граница устойчивости при $r_p = 15\rho_{\perp}$, $L = 50\rho_{\perp}$ (кривая I), $r_p = 2.7\rho_{\perp}$, $L = 15\rho_{\perp}$ (кривая II) и граница абсолютности неустойчивости (данные взяты из [11]), пунктир – асимптотика границы абсолютности неустойчивости, штрихпунктир – асимптотика границы неустойчивости в неоднородной плазме при $A \rightarrow \infty$, тонкая кривая – граница устойчивости для $r_p = 7.4\rho_{\perp}$ и $L = 18\rho_{\perp}$.

На рисунке 3 в логарифмическом масштабе показана зависимость граничного β_{\perp} от анизотропии при различных параметрах бимаксвелловской плазмы. Толстые кривые, взятые из работы [11], соответствуют границе абсолютности неустойчивости для бесконечной однородной плазмы и границе АИС неустойчивости для плазмы с поперечным размером $r_p = 15\rho_{\perp}$ в магнитном поле с характерным размером неоднородности $L = 50\rho_{\perp}$ (кривая I) и плазмы с $r_p = 2.7\rho_{\perp}$ и $L = 15\rho_{\perp}$ (кривая II). Пунктирная пря-

мая соответствует асимптотике границы абсолютности неустойчивости для бесконечной однородной плазмы. Горизонтальная прямая соответствует асимптотике границы устойчивости неоднородной плазмы в пределе $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ (см. п. 4.4) при $L = 18\rho_{\perp}$. Тонкая кривая соответствует порогу устойчивости при $r_p = 7.4\rho_{\perp}$ и $L = 18\rho_{\perp}$ (параметры компактного пробкотрона ГДЛ), полученному численным решением уравнения (25). Точки – граничное β_{\perp} , при достижении которого в компактном пробкотроне развивалась неустойчивость (при заполнении дейтериевой плазмой). Поскольку распределение ионов в компактном пробкотроне отклоняется от бимаксвелловского, выражения L^2/l^2 и $W_{\perp}/(2W_{\parallel})$, определяющие анизотропию, не совпадают – отношение размера неоднородности магнитного поля к размеру неоднородности плазмы есть $L^2/l^2 = 47$, а отношение средней поперечной энергии к продольной $W_{\perp}/(2W_{\parallel}) = 25$. Поэтому на рисунке 3 приведены две экспериментальные точки. Видно согласие между предсказаниями теории и экспериментальным результатом. Также, критерий (28) предсказывает уменьшение пороговой плотности при уменьшении массы ионов плазмы, что наблюдалось экспериментально при замене водородной плазмы на дейтериевую.

4.4 Аналитическое решение в пределе бесконечно большой анизотропии

В пределе $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, $L = Const$ размер неоднородности плазмы $l = L/\sqrt{\mathcal{A}} \rightarrow 0$. Тогда $\check{k}_{\perp} = k_{\perp}l \rightarrow 0$. Как видно из (25), в этом пределе уравнения для левой и правой поляризации расцепляются. Рассмотрим уравнение для компоненты E_+ , вращающейся в одну сторону с ионами. Мнимая часть функции g_+ обращается в ноль при $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$. Эта частота соответствует порогу неустойчивости при $\mathcal{A} \rightarrow \infty$.

В пределе $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, $\check{k} \rightarrow 0$ уравнение для компоненты E_+ имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\delta[\check{k} - \check{k}']}{\mathcal{A}} - (1 - 1/\mathcal{A})e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \mathcal{A} \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} \right) E_+[\check{k}'] d\check{k}' = \frac{\check{\rho}_{\perp}^2}{\beta_{\perp}} \check{k}^2 E_+[\check{k}]. \quad (26)$$

Представив электрическое поле в виде $E_+[\check{k}] = \int \exp[-i\check{k}z'/l] E[z'] dz'$, умножив уравнение на $\exp[i\check{k}z/l]$ и проинтегрировав по \check{k} , перейдем к уравнению в координатном представлении

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} + \frac{\beta_{\perp} \mathcal{A} (1 - 1/\mathcal{A})^2 - 2z^2/L^2 - z^4/L^2}{\rho_{\perp}^2 (1 + z^2/l^2)^2} E_+[z] = 0. \quad (27)$$

Рассматриваем уравнение в области порядка размера неоднородности плазмы, $z \sim l$. При $\mathcal{A} \gg 1$ размер неоднородности магнитного поля значительно превышает размер

неоднородности плазмы, тогда можно считать $z \ll L$ и уравнение (27) примет вид

$$\frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} + \Lambda^2 \frac{l^2}{(l^2 + z^2)^2} E_+ = 0, \quad (28)$$

где безразмерный параметр $\Lambda^2 = \beta_\perp \mathcal{A} l^2 / \rho_\perp^2$, что эквивалентно $\Lambda^2 = \beta_\perp L^2 / \rho_\perp^2$ и $\Lambda^2 = \omega_{pic}^2 L^2 / c^2$.

Удобно перейти к уравнению для магнитного поля. Из соотношения $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} / c$ получим $\partial_z E_+ = \omega B_+ / c$. Таким образом, возмущение магнитного поля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} (l^2 + z^2)^2 \frac{\partial B_+}{\partial z} + l^2 \Lambda^2 B_+[z] = 0, \quad (29)$$

граничным условием является обращение поля в ноль на бесконечности.

Уравнение (29) имеет аналитическое решение, спадающее на бесконечности, $\Lambda^2 = n^2 + 2n$, $B_+[z] = (z \cos[(n+1) \arctan[z/l]] - (n+1)l \sin[(n+1) \arctan[z/l]]) / \sqrt{l^2 + z^2}$ для четных n и $B_+[z] = (l(n+1) \cos[(n+1) \arctan[z/l]] + z \sin[(n+1) \arctan[z/l]]) / \sqrt{l^2 + z^2}$ для нечетных. Наименьшему β_\perp отвечает мода с $n = 1$. Таким образом, критерий устойчивости в пределе большой анизотропии зависит только от плазменной частоты в центре ловушки и характерного размера неоднородности магнитного поля,

$$\omega_{pic}^2 L^2 / c^2 < 3, \quad (30)$$

что соответствует сделанной во второй части оценке. Критерий (30) позволяет оценить снизу критическое β_\perp для плазмы с конечной анизотропией.

Уравнение (28) совпадает с уравнением для циркулярно поляризованной волны с частотой $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$ в сильно анизотропной холодной ($T_\perp \rightarrow 0$) бимаксвелловской плазме с плотностью (20), помещенной в параксиальное магнитное поле с напряженностью на оси $B = B_0(1 + z^2/L^2)$. Плотность энергии волны в такой системе есть сумма энергии электромагнитного поля и кинетической энергии частиц плазмы,

$$W[z] = \frac{\delta \vec{E}^2 + \delta \vec{B}^2}{8\pi} + \frac{\omega_{pi}^2[z]}{(\Omega_{ci}[z] - \omega)^2} \frac{\delta \vec{E}^2}{8\pi}. \quad (31)$$

Из соотношения $B_+[z] = c \partial_z E_+ / \omega$ следует $E_+^2 \sim \Omega_{ci}^2 l^2 B_+^2 / c^2 = \Lambda^2 (\Omega_{ci}^2 / \mathcal{A} \omega_{pi}^2) B_+^2 \ll B_+^2$. Таким образом, электромагнитная энергия возмущения сосредоточена в магнитном поле. При $\omega = \Omega_{ci}(1 - 1/\mathcal{A})$, пренебрегая вкладом E_+^2 , получим

$$W[z] = \frac{1}{8\pi} \frac{c^2}{\Omega_{ci}^2} \left(\left(\frac{\partial E_+}{\partial z} \right)^2 + \frac{l^4 \Lambda^2}{(l^2 + z^2)^3} E_+^2 \right). \quad (32)$$

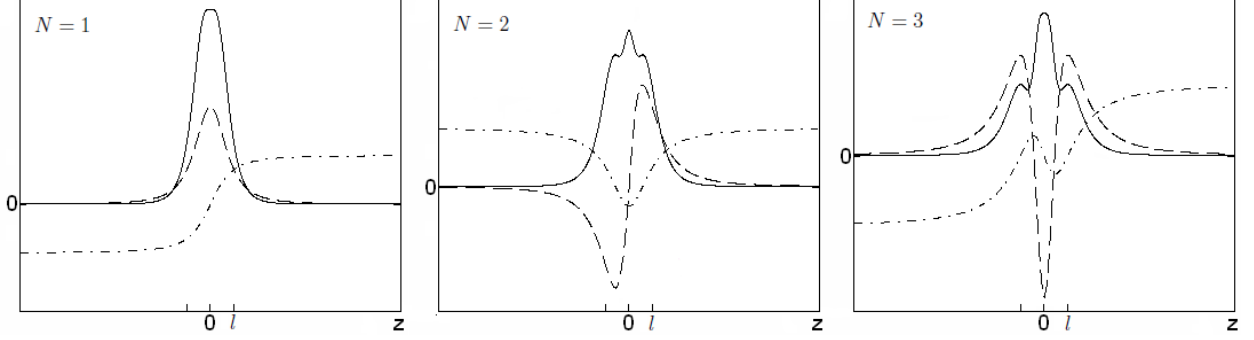


Рис. 4: Зависимость плотности энергии (сплошная кривая), магнитного поля (пунктир) и электрического поля возмущения (штрихпунктир) от продольной координаты.

На рисунке 4 показаны распределения плотности энергии, электрического и магнитного поля для возмущения, описываемого уравнением (28). Распределение магнитного поля является аналогичным изображенным на рисунке 2 возмущениям с $k_{\perp} = 0$. Хотя электрическое поле не спадает на бесконечности, энергия волны локализована на размере неоднородности плазмы.

Интересно понять причину локализации возмущений и рассмотреть вопрос об учете конечности пробочного отношения внешнего магнитного поля. Уравнение (28) имеет вид уравнения Шредингера, описывающего движение частицы с нулевой полной энергией в потенциальной яме. Рассмотрим случай, когда изменение плотности и магнитного поля создают потенциальный барьер: плотность и магнитное поле при $z < 0$ и $z > z_0$ постоянны, при $0 < z < z_0$ возмущение электрического поля описывается уравнением (28). В области с однородной плазмой возмущение электрического поля описывается уравнением $\partial_z^2 E_+ + k^2 E_+ = 0$. Из (3) получим, что для $\omega/\Omega_{ci} = 1 - 1/\mathcal{A}$ при $\mathcal{A} \gg 1$ $k^2 = \beta_{\perp} \mathcal{A}/\rho^2 = \omega_{pi}^2 L^2/(l^2 c^2)$. Тогда уравнение для электрического поля примет вид

$$w[z]l^2 \frac{\partial^2 E_+}{\partial z^2} + \Lambda^2 E_+ = 0, \quad (33)$$

где $w[z] = 1$ при $z < 0$, $w = (1 + z^2/l^2)^2$ для $0 < z < z_0$ и $w = (1 + z_0^2/l^2)^2$ при $z > z_0$. При $z > z_0$ решением является уходящая волна $E_+ \sim \exp[i\Lambda z l/(l^2 + z_0^2)]$, для $z < 0$ решение является суммой приходящей и отраженной волны $\exp[i\Lambda z/l] + const \exp[-i\Lambda z/l]$. Сшивая решения при $z = 0$ и $z = z_0$, получим распределения возмущений полей и коэффициент отражения. Постоянная z_0 определяет пробочное отношение для магнитного поля $K = 1 + z_0^2/L^2$. Зависимость коэффициента отражения R от анизотропии плазмы для пробочного отношения $K = 2$ показана на рисунке 5.

На рисунке 6 показаны распределение плотности энергии и амплитуда возмущений

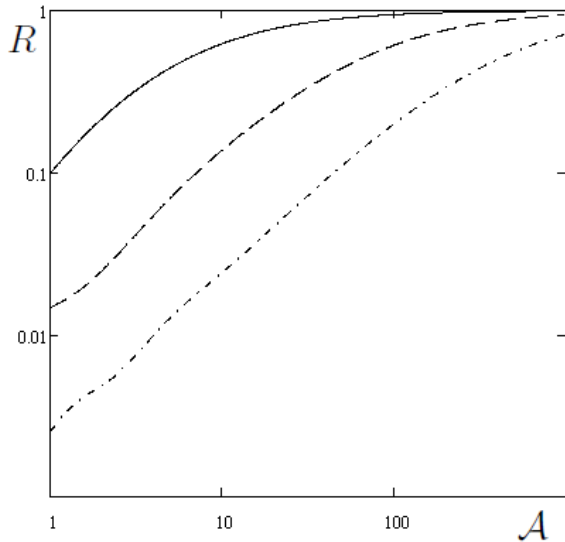


Рис. 5: Зависимость коэффициента отражения от анизотропии. Сплошная кривая – $\Lambda^2 = 3$, пунктир – $\Lambda^2 = 8$, штрихпунктир – $\Lambda^2 = 15$.

полей для первой моды. Видно, что при $\mathcal{A} \gg 1$ коэффициент отражения для первой моды, определяющей устойчивость, близок к единице – через барьер проходит лишь малая часть волны, а основная часть отражается от неоднородности плотности и магнитного поля. В случае с потенциальной ямой неоднородность приводит к локализации неустойчивых возмущений. Также видно, что учет конечности пробочного отношения приведет к незначительному уносу энергии возмущения из системы, что вызовет уменьшение инкремента неустойчивости и незначительное уменьшение порогового β_{\perp} .

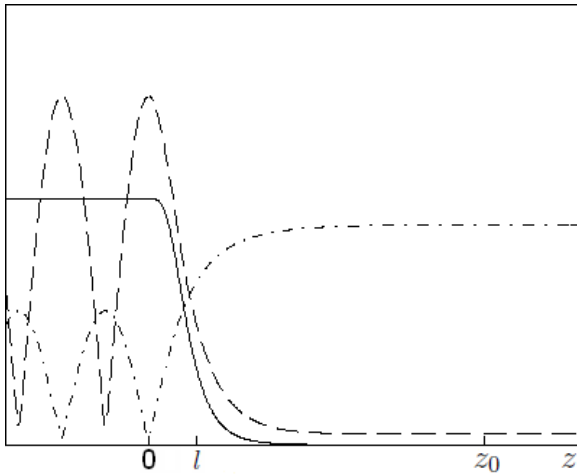


Рис. 6: Зависимость плотности энергии (сплошная линия), возмущения магнитного (пунктир) и электрического (штрихпунктир) поля от продольной координаты.

5 Заключение

В данной работе исследованы условия развития альфвеновской ионной циклотронной неустойчивости в сильно анизотропной бимаксвелловской плазме. Для однородной неограниченной бимаксвелловской плазмы в однородном магнитном поле получена асимптотика границы абсолютности неустойчивости в пределе большой анизотропии. Получено уравнение для возмущений магнитного поля в неоднородной сильно анизотропной бимаксвелловской плазме в ловушке с аксиально-симметричным магнитным полем. Численное решение этого уравнения позволяет при заданной анизотропии и размерах плазмы найти пороговое β_{\perp} и зависимость инкремента и частоты неустойчивого возмущения от β_{\perp} . Также численное решение позволяет найти пространственное распределение возмущений полей, которые оказываются локализованными на размере неоднородности плазмы. В пределе $\mathcal{A} \rightarrow \infty$ найдено аналитическое решение и получена асимптотика границы устойчивости. Оценки и численно полученные результаты согласуются с результатами, известными из эксперимента в компактном пробкотроне ГДЛ.

6 Приложение 1

Вклад ионов в G_{\pm} есть

$$\begin{aligned}
G_{\pm}^{(i)} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\omega_{pi}^2[z]}{2\pi\omega^2} e^{i(k'-k)z} + \frac{q^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v \{(\check{v}_x \pm i\check{v}_y) e^{-ikz}, \mathcal{F}\}_{\vec{p}, \vec{r}} \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau (v_x \mp iv_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = - \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\omega_{pi}^2[z]}{2\pi\omega^2} + \\
&+ \frac{q^2}{\omega^2 T_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v \mathcal{F} \{ \mathcal{A}\mathcal{E} - (\mathcal{A} - 1)\mathcal{E}_{\perp}, (v_x \pm iv_y) e^{-ikz} \}_{\vec{p}, \vec{r}} \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = \\
&= - \frac{\omega_{pic}^2}{2\pi\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1 + \kappa^2 z^2}{1 + \mathcal{A}\kappa^2 z^2} e^{i(k'-k)z} + \frac{q^2}{\omega^2 T_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v (v_x \pm iv_y) e^{-ikz} \mathcal{F} \times \\
&\quad \times \left(\pm \Omega_{ci} (1 + \mathcal{A}\kappa^2 z^2) - \frac{\mathcal{A}\kappa^2 z v_z}{1 + \kappa^2 z^2} + i\mathcal{A}k v_z \right) \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = \\
&= - \frac{\omega_{pic}^2}{\omega^2 \kappa \sqrt{\mathcal{A}}} \left(-\frac{1}{\mathcal{A}} \delta \left[\frac{k' - k}{\kappa \sqrt{\mathcal{A}}} \right] + \frac{1 - 1/\mathcal{A}}{2} e^{-|k' - k|/(\kappa \sqrt{\mathcal{A}})} \right) + \frac{i\omega_{pic}^2 m}{4\pi\omega^2 T_{\perp} n_c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int d^3v e^{-ikz} \times \\
&\quad \times (v_x \pm iv_y) \mathcal{F} \left(\mathcal{A}k v_z \pm \Omega_{ci} (1 + \kappa^2 z^2) + i \frac{\mathcal{A}\kappa^2 z v_z}{1 + \kappa^2 z^2} \right) \int_{-\infty}^0 d\tau (\check{v}_x \mp i\check{v}_y) e^{ik'\check{z} - i\omega\tau} = G_0^{(i)} + G_{1\pm}^{(i)}. \quad (34)
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $v_{\perp} = \Omega_z \sqrt{1 + \kappa^2 z^2} / \kappa$, $z = Z \cos \varphi$, $v_z = \Omega_z Z \sin \varphi$, $v_x = v_{\perp} \cos \theta$, $v_y = -v_{\perp} \sin \theta$, где Ω_z и Z – частота и амплитуда баунс-колебаний. Движение ионов вдоль невозмущенной траектории в этих переменных описывается соотношениями $\check{z} = Z \cos[\varphi - \Omega_z \tau]$, $\check{v}_x = v_x \cos[\Delta\theta[\tau]]$, $\check{v}_y = -v_y \sin[\Delta\theta[\tau]]$, $\Delta\theta = \Omega\tau + \kappa^2 Z^2 (2\Omega_z \tau + \sin[2(\Omega_z \tau - \varphi)] + \sin[2\varphi])\Omega / (4\Omega_z)$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned}
G_{1\pm}^{(i)} &= \frac{i\omega_{pic}^2 m}{4\omega^2 T_{\perp} \kappa^4} \sqrt{\frac{m^3 \mathcal{A}}{8\pi^3 T_{\perp}^3}} \int_0^{\infty} d\Omega_z^2 \Omega_z^4 \int_0^{\infty} dZ Z \exp \left[-\frac{m}{T_{\perp}} \frac{\Omega_z^2}{2\kappa^2} (1 + \mathcal{A}\kappa^2 Z^2) \right] \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikZ \cos \varphi} \times \\
&\quad \times (1 + \mathcal{A}\kappa^2 Z^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} \left(\mathcal{A}kZ \sin \varphi \pm \frac{\Omega_{ci}}{\Omega_z} (1 + \mathcal{A}\kappa^2 Z^2 \cos^2 \varphi) + i \frac{\mathcal{A}\kappa^2 Z^2 \sin[2\varphi]}{2(1 + \mathcal{A}\kappa^2 Z^2 \cos^2 \varphi)} \right) \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau (1 + \mathcal{A}\kappa^2 Z^2 \cos^2[\varphi - \Omega_z \tau])^{1/2} e^{ik'Z \cos[\varphi - \Omega_z \tau] - i\omega\tau \pm i\Delta\theta}. \quad (35)
\end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным переменным $\check{\rho} = \sqrt{2T_{\perp}/(m\Omega_{ci}^2)l^2}$, $\check{k} = k/l$, $\check{\omega} = \omega/|\Omega_{ci}|$, $s_{\Omega} = \pm \text{sign}[\Omega_{ci}]$, $t = \Omega_z \tau$, $u = Z/l$ ($l = 1/\kappa\sqrt{\mathcal{A}}$ – размер неоднородности плазмы), $\check{r} = \Omega_z \sqrt{\mathcal{A}} \sqrt{1 + u^2} / (\check{\rho}|\Omega|)$, $a = 1/\sqrt{\mathcal{A}}$ и определим функцию $\xi[\check{r}, u, a, \check{\rho}] = \sqrt{1 + u^2} / (a\check{\rho}) =$

$|\Omega|/\Omega_z$ (далее предполагаем, что частота ларморовского вращения значительно превышает частоту баунс-колебаний, $\xi \gg 1$). В безразмерных обозначениях выражение для $G_{1\pm}^{(i)}$ есть

$$G_{1\pm}^{(i)} = \frac{\omega_{pic}^2}{\omega^2 \kappa \sqrt{\mathcal{A}}} g_1^{(i)},$$

$$g_1^{(i)} = \frac{i}{2\pi^{3/2} a^2} \int_0^\infty \frac{udu}{(1+u^2)^{5/2}} \int_0^\infty dr^2 r^3 e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi (1+a^2 u^2 \cos^2 \varphi)^{3/2} e^{-i\check{k}u \cos \varphi} \times$$

$$\times \left(\check{k}u \sin \varphi + s_\Omega a^2 \xi (1+u^2 \cos^2 \varphi) + i \frac{a^2 u^2 \sin[2\varphi]}{2(1+a^2 u^2 \cos^2 \varphi)} \right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^0 dt (1+a^2 u^2 \cos^2[\varphi-t])^{1/2} e^{i\check{k}'z \cos[\varphi-t] - i\xi \check{\omega}t + i s_\Omega \xi (1+a^2 u^2/2)t + i s_\Omega a^2 u^2 \xi (\sin[2\varphi] + \sin[2(t-\varphi)])/4}. \quad (36)$$

Данное выражение существенно упрощается в приближении большой анизотропии, $a \ll 1$, когда внешнее магнитное поле слабо изменяется на размере плазмы. Опуская члены порядка a^2 в предэкспоненциальных множителях, но сохраняя члены порядка $a^2 \xi$, преобразуем внутренний интеграл по φ и t :

$$I_\varphi = -i \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\check{k}u \cos \varphi + i\Psi[\varphi]} \frac{d}{d\varphi} \left(-i\check{k}u \cos \varphi + \Psi[\varphi] \right) \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\xi \Delta\omega t + i\check{k}'u \cos[t-\varphi] + i\Psi[t-\varphi]}, \quad (37)$$

где $\Delta\omega = \check{\omega} - s_\Omega(1-a^2)$, $x = s_\Omega \xi a^2 u^2/4$, $\Psi[\varphi] = 2x(2/u^2 + 1)\varphi + x \sin[2\varphi]$. Проинтегрировав по частям по φ и t , получим

$$I_\varphi = -2\pi i J_0[(\check{k} - \check{k}')u] + \xi \Delta\omega \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\check{k}u \cos \varphi + \Psi[\varphi]} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\xi \Delta\omega t + i\check{k}'u \cos[t-\varphi] + i\Psi[t-\varphi]}. \quad (38)$$

Используя разложение $\exp[ix \sin \varphi] = \sum_{n=-\infty}^\infty J_n[x] \exp[im\varphi]$, запишем I_φ в виде

$$I_\varphi = -2\pi i J_0[(\check{k} - \check{k}')u] + 2\pi i \xi \Delta\omega \sum_{n,n',m,m'=-\infty}^\infty \frac{(-i)^{n-n'} J_n[\check{k}u] J_{n'}[\check{k}'u] J_m[x] J_{m'}[x] \delta_{n+2m,n'+2m'}}{\xi(\omega - s_\Omega(1-a^2)) - 2x(2/z^2 + 1) - n - 2m}. \quad (39)$$

Предполагаем анизотропию достаточно большой, $\mathcal{A} \gg l^2/\rho_\perp^2$, что эквивалентно условию $x \ll 1$. Также предполагаем, что частота возмущения слабо отличается от циклотронной ионной частоты в центре ловушки, $\xi \Delta\omega \sim x$, что позволяет получить

$$I_\varphi = -2\pi i J_0[(\check{k} - \check{k}')u] + 2\pi i \xi \Delta\omega \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{J_n[\check{k}u] J_n[\check{k}'u]}{\xi(s_\Omega(1+a^2 u^2/2) - \check{\omega}) - n}. \quad (40)$$

Подставив это выражение в (36), найдем

$$g_1^{(i)} = \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} - \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{\pi}a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{uJ_n[\check{k}u]J_n[\check{k}'u]du}{(1+u^2)^{5/2}} \int_0^{\infty} d\check{r}\check{r}^4 e^{-\check{r}^2} \times$$

$$\times \frac{1}{s_{\Omega}(1+a^2u^2/2) - \check{\omega} - \frac{na\check{\rho}\check{r}}{\sqrt{1+u^2}}} = \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} - \frac{3\Delta\omega}{4a^2} \int_0^{\infty} \frac{uJ_0[\check{k}u]J_0[\check{k}'u]}{(1+u^2)^{5/2}(s_{\Omega}(1+a^2u^2/2) - \check{\omega})} -$$

$$- \frac{4\Delta\omega}{\sqrt{\pi}a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{uJ_n[\check{k}u]J_n[\check{k}'u]du}{(1+u^2)^{5/2}} \int_0^{\infty} d\check{r}\check{r}^4 e^{-\check{r}^2} \frac{s_{\Omega}(1+a^2u^2/2) - \check{\omega}}{(s_{\Omega}(1+a^2u^2/2) - \check{\omega})^2 - n^2a^2\check{\rho}^2\check{r}^2/(1+u^2)}. \quad (41)$$

Введем обозначение $X = \sqrt{1+u^2}(\check{\omega} - s_{\Omega}\{1+a^2u^2/2\})/(a\check{\rho})$, тогда

$$g_1^{(i)} = \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \frac{3\Delta\omega}{4a^3\check{\rho}} \int_0^{\infty} \frac{uJ_0[\check{k}u]J_0[\check{k}'u]}{(1+u^2)^2X} +$$

$$+ \frac{\Delta\omega}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2n^2\check{\rho}^2} \int_0^{\infty} \frac{uJ_n[\check{k}u]J_n[\check{k}'u]}{(1+u^2)^{3/2}} (s_{\Omega}(1+a^2u^2/2) - \check{\omega}) \left(2\frac{X^2}{n^2}G[X/n] - 1 \right) =$$

$$= \frac{1 + |\check{k} - \check{k}'|}{4\check{\omega}a^2} e^{-|\check{k} - \check{k}'|} + \frac{3\Delta\omega}{4a^3\check{\rho}} \int_0^{\infty} \frac{uJ_0[\check{k}u]J_0[\check{k}'u]}{(1+u^2)^2X} + \frac{\Delta\omega}{a^3\check{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{uJ_n[\check{k}u]J_n[\check{k}'u]}{n(1+u^2)^2} \left(\frac{X}{n} - 2\frac{X^3}{n^3}G[X/n] \right). \quad (42)$$

Вклад холодных электронов в диэлектрическую проницаемость равен

$$\hat{\epsilon}^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\omega_{pe}^2}{\omega\Omega_{ce}} & 0 \\ -i\frac{\Omega_{pe}^2}{\omega\Omega_{ce}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Вклад в электрическую индукцию $D_{\alpha}^{(e)} = \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}^{(e)}E_{\beta}$ равен

$$D_{\pm}^{(e)}[z] = \pm \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\Omega_{ce}} E_{\pm}[z] = -\frac{\omega_{pic}^2}{\omega|\Omega_{ci}|} \frac{s_{\Omega}}{1 + \kappa^2 z^2/a^2} E_{\pm}[z]. \quad (44)$$

Фурье-разложение дает

$$D_{\pm}^{(e)}[k] = \frac{\omega_{pic}^2}{\omega|\Omega_{ci}|} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(k-k')z} \frac{s_{\Omega}}{2\pi(1 + \kappa^2 z^2/a^2)} E_{\pm}[k'] = \frac{\omega_{pic}^2 a}{\omega^2 \kappa} \int_{-\infty}^{\infty} dk' g^{(e)}[\check{k}, \check{k}'] dk', \quad (45)$$

где электронный вклад в диэлектрическую проницаемость $g^{(e)} = s_{\Omega}\check{\omega}e^{-|\check{k} - \check{k}'|}/2$.

Объединяя вклады электронов и ионов, получим выражение (24).

7 Приложение 2

Поскольку рассматриваемая система является симметричной относительно обращения продольной координаты (замены $z \rightarrow -z$), собственные моды можно разделить на симметричные и антисимметричные $E^\pm[-z] = \pm E^\pm[z]$. Аналогично можно классифицировать решения уравнения 25. Таким образом, ядро можно разбить на сумму $g_\pm[\check{k}, \check{k}'] = g_\mp^s[\check{k}, \check{k}'] + g_\pm^a[\check{k}, \check{k}']$, где $g_\pm^s[\check{k}, \check{k}']$ симметрично относительно смены знаков любого из своих аргументов, а $g_\pm^a[\check{k}, \check{k}']$ антисимметрично. Из (24) можно получить, что

$$g_\pm^s[\check{k}, \check{k}'] = -\frac{\delta[\check{k} - \check{k}'] + \delta[\check{k} + \check{k}']}{2\mathcal{A}} - \frac{1 - 1/\mathcal{A} \pm \omega/\Omega_{ci} - \mathcal{A}/2}{4} \left(e^{-|\check{k}-\check{k}'|} + e^{-|\check{k}+\check{k}'|} \right) + \frac{\mathcal{A}}{8} \left(|\check{k} - \check{k}'| e^{-|\check{k}-\check{k}'|} + |\check{k} + \check{k}'| e^{-|\check{k}+\check{k}'|} \right) - \frac{3}{4} \mathcal{A} (\omega \mp \Omega_{ci} (1 - \frac{1}{\mathcal{A}})) \frac{\sqrt{\mathcal{A}}}{\check{\rho}} \int_0^\infty \frac{u J_0[\check{k}u] J_0[\check{k}'u] du}{(1+u^2)^2 X} + (\omega \mp \Omega_{ci} (1 - \frac{1}{\mathcal{A}})) \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathcal{A}^{3/2}}{2n\check{\rho}} \int_0^\infty \frac{u J_{2n}[\check{k}u] J_{2n}[\check{k}'u] du}{(1+u^2)^2} \left(\frac{X}{2n} - \frac{X^3}{4n^3} G \left[\frac{X}{2n} \right] \right), \quad (46)$$

$$g_\pm^a[\check{k}, \check{k}'] = -\frac{\delta[\check{k} - \check{k}'] - \delta[\check{k} + \check{k}']}{2\mathcal{A}} - \frac{1 - 1/\mathcal{A} \pm \omega/\Omega_{ci} - \mathcal{A}/2}{4} \left(e^{-|\check{k}-\check{k}'|} - e^{-|\check{k}+\check{k}'|} \right) + \frac{\mathcal{A}}{8} \left(|\check{k} - \check{k}'| e^{-|\check{k}-\check{k}'|} - |\check{k} + \check{k}'| e^{-|\check{k}+\check{k}'|} \right) + (\omega \mp \Omega_{ci} (1 - \frac{1}{\mathcal{A}})) \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathcal{A}^{3/2}}{(2n+1)\check{\rho}} \int_0^\infty \frac{u J_{2n+1}[\check{k}u] J_{2n+1}[\check{k}'u] du}{(1+u^2)^2} \left(\frac{X}{2n+1} - \frac{2X^3}{(2n+1)^3} G \left[\frac{X}{2n+1} \right] \right). \quad (47)$$

Тогда уравнение (25) приобретает следующий вид для симметричных и антисимметричных полей $E_\pm^s[\check{k}]$ и $E_\pm^a[\check{k}]$:

$$\int_0^\infty g_\pm^{s,a}[\check{k}, \check{k}'] E_\pm^{s,a}[\check{k}'] d\check{k}' = \frac{\check{\rho}^2}{2\beta_\perp} \left(\left(\check{k}^2 + \frac{\check{k}_\perp^2}{2} \right) E_\pm^{s,a}[\check{k}] - \frac{\check{k}_\perp^2}{2} E_\mp^{s,a}[\check{k}] \right). \quad (48)$$

Численное решение системы уравнений (48) вместо системы (25) позволяет в четыре раза сократить число точек, в которых вычисляется $g[\check{k}, \check{k}']$ и в два раза уменьшить число обращений к функции Бесселя и функции $\operatorname{erfi}[x]$, что значительно ускоряет расчет.

Для численного решения уравнения (48) удобно от $E_\pm[\check{k}]$ перейти к функциям $Y_\pm[\check{k}] = E_\pm[\check{k}] \sqrt{\check{k}^2 + \check{k}_\perp^2/2}$. Разобьем интервал по \check{k} на n равных промежутков, $\check{k}_i = -\check{k}_m + 2\check{k}_m(i + n - 1)/(2n - 1)$, обозначим $g_\pm^{i,j} = g_\pm[\check{k}_i, \check{k}_j] / \sqrt{(\check{k}_i^2 + \check{k}_\perp^2/2)(\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2/2)}$ и $Y_\pm^{i,j} = Y[\check{k}_i]$. При-

ближенно заменяя интегрирование суммированием, получим

$$\begin{aligned} \Delta \check{k} \begin{pmatrix} g_+^{i,j} & 0 \\ 0 & g_-^{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+^j \\ Y_-^j \end{pmatrix} &= \frac{\check{\rho}^2}{2\beta_\perp} \begin{pmatrix} \delta_{i,j} & -\frac{\check{k}_\perp^2}{2\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2} \delta_{i,j} \\ -\frac{\check{k}_\perp^2}{2\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2} \delta_{i,j} & \delta_{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+^i \\ Y_-^i \end{pmatrix}, \\ \Delta \check{k} \begin{pmatrix} \frac{(2\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2)^2}{4\check{k}_j^2(\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2)} \delta_{jk} & \frac{2\check{k}_j^2 \check{k}_\perp^2 + \check{k}_\perp^4}{4\check{k}_j^2(\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2)} \delta_{jk} \\ \frac{2\check{k}_j^2 \check{k}_\perp^2 + \check{k}_\perp^4}{4\check{k}_j^2(\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2)} \delta_{jk} & \frac{(2\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2)^2}{4\check{k}_j^2(\check{k}_j^2 + \check{k}_\perp^2)} \delta_{jk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_+^{i,j} & 0 \\ 0 & g_-^{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_+^j \\ Y_-^j \end{pmatrix} &= \frac{\check{\rho}^2}{2\beta_\perp} \begin{pmatrix} Y_+^k \\ Y_-^k \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $\Delta \check{k} = 2k_m/(2n-1) = \check{k}_{i+1} - \check{k}_i$. Таким образом, численное решение системы (48) сводится к нахождению собственных векторов и собственных значений симметричной комплексной матрицы. Изменяя $\mathcal{R}e[\omega]$ можно найти зависимость собственного значения от частоты при фиксированных анизотропии, поперечном волновом векторе, ларморовском радиусе и инкременте неустойчивости. Обращению мнимой части собственного значения в ноль соответствует появление собственной моды, откуда можно найти ее частоту, β_\perp , при котором она существует и распределение возмущений полей. Мода с минимальным β_\perp определяет порог неустойчивости.

Список литературы

- [1] Casper T.A., Smith G.R., Physical Review Letters, V 48, № 15, p 1015 (1982)
- [2] Аникеев А.В., Багрянский П.А., Коржавина М.С., Приходько В.В., Тезисы XXXV Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС
- [3] Коржавина М.С., Тезисы XLVI Международной научной студенческой конференции
- [4] A.V. Anikeev, P.A. Bagryansky, I.S. Chernoshtanov, M.S. Korzhavina, V.V. Prikhodko, Yu.A. Tsidulko, 2010 (submitted for publication).
- [5] Mangeney A., Grappin R., Geophysical research letters, V 30 (2003)
- [6] R.P. Drake, T.A. Casper, J.F. Clauser, et. al. Nuclear Fusion, V 21, № 3 (1981)
- [7] T.D. Rognlien, Y. Matsuda. Nuclear Fusion, V 21, № 3 (1981)
- [8] Davidson R.C., Ogden J.M., Physical Fluids, V 18. № 8 (1975)
- [9] Р.З. Сагдеев, В.Д. Шафранов., ЖЭТФ, т. 39, вып. 1(7), (1960)
- [10] Tajima T., Mima K., M. Dawson J., Plasma Review Letters, V 39, № 4 (1977)
- [11] Watson D.C., Physical Fluids, v 23, № 12 (1980)
- [12] R.F. Post, Nuclear Fusion, V 27, № 10 (1987).
- [13] А.Б. Михайловский., Вопросы теории плазмы, выпуск 6 (1972)
- [14] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский., Физическая кинетика. М., (1979).
- [15] A. Bers, Основы физики плазмы, т.2, под. ред. А.А. Галеева и Р. Судана – М., (1983).