МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Федоренкова Эдуарда

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Кинетика упругого взаимодействия нейтрального газа и плазмы в расширителе открытой ловушки

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой	**Научный руководитель**
д-р физ.-мат. наук,	канд. физ.-мат. наук,
профессор	в.н.с., ИЯФ СО РАН
Иванов А. А./…………..	Беклемишев А. Д./…………..
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)	(фамилия И., О.) / (подпись, МП)
«……»………………2018 г.	«……»………………2018 г.

Дата защиты: «……»………………2018 г.

Новосибирск, 2018

Оглавление

1. Введение

На установке ГДЛ в течение многих лет ведутся экспериментальные исследования по удержанию горячей плазмы. Характерным элементом подобных установок является расширитель потока плазмы, вытекающей из магнитных пробок. Схема расширителя ГДЛ приведена на рис. 1

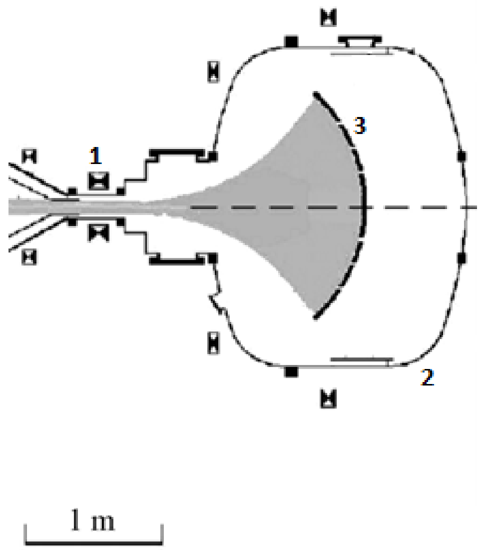


Рис. 1. Схема расширителя на установке ГДЛ. Здесь 1 - магнитная пробка, 2 - бак расширителя, 3 - плазмоприёмник.

Расширяющийся поток плазмы приводит к образованию амбиполярного электрического потенциала, который замедляет электроны. Таким образом расширитель позволяет подавлять электронный поток тепла. Кроме того, расширитель позволяет решать ряд технических задач: снизить тепловые нагрузки на торцевую стенку, осуществить непосредственную рекуперацию энергии плазмы в электрическую и т. д.

Однако в расширителе происходят процессы, которые могут оказать негативное влияние на параметры плазмы. В расширителе находится относительно холодный, нейтральный, остаточный газ, который может ионизоваться при столкновении с вытекающей плазмой. Холодные электроны могут свободно проникать в центральную часть установки, тем самым охлаждая плазму. На первый взгляд избавиться от этого эффекта довольно просто, нужно всего лишь достаточно хорошо откачать бак расширителя, однако это налагает очень высокие требования к системе откачки. Поэтому возникла задача определения предельно допустимой концентрации газа n_{crit} в плазме, при которой можно было бы пренебречь ионизацией газа.

Для установки ГДЛ была получена оценка $n_{crit} \sim 10^{12}$ см^3, а также был проведён эксперимент, в котором хотели проверить полученную оценку для n_{crit} [1]. Эксперимент был устроен следующим образом. Перед зажиганием плазмы в расширитель через клапан напускали газ до определённой концентрации. После чего создавалась плазма и измерялся поток нейтронов. Результат этого эксперимента представлен на рис. 2. Из результатов видно, что ГДЛ работает вплоть до начальной концен-

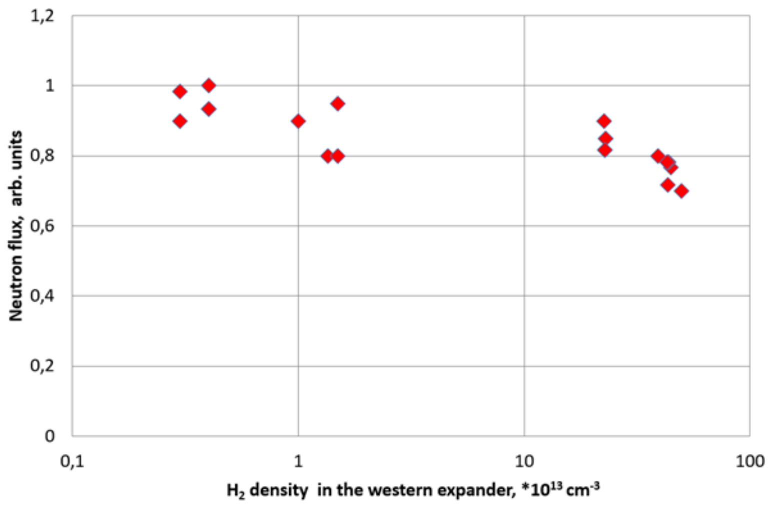


Рис. 2. Поток нейтронов в зависимости от концентрации газа до начала эксперимента.

трации в расширителе $n_i \sim 10^{14}$ см^3. Чтобы объяснить эти результаты, была выдвинута гипотеза о том, что плазма вытесняет газ к стенкам расширителя. Эта работа нацелена на теоритическое исследование упругого взаимодействия газа и плазмы. В результате учёта только этого эффекта в данной работе будет продемонстрированно, что концентрация газа вблизи стенки расширителя и концентрация газа в плазме может отличаться на несколько порядков.

2. Физическая постановка задачи

Чтобы продемонстрировать эффект вытеснения газа из плазмы, будем решать задачу в идеализированных условиях по сравнению с реальным расширителем.

Пусть имеется бесконечный, однородный плазменный цилиндр в постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, плазма имеет максвелловское распределение с температурой T_1, концентрация плазмы n_1. Концентрацию газа будем обозначать n, а температуру газа T. Причём будем считать, что $T_1 \gg T$. Пусть также плазма замагничена и находится в стационарном состоянии на протяжении всего взаимодействия газа и плазмы. Будем учитывать только упругие столкновения газа и плазмы, причём такие, что в результате столкновения газ приобретает большую скорость, порядка нескольких тепловых скоростей газа.

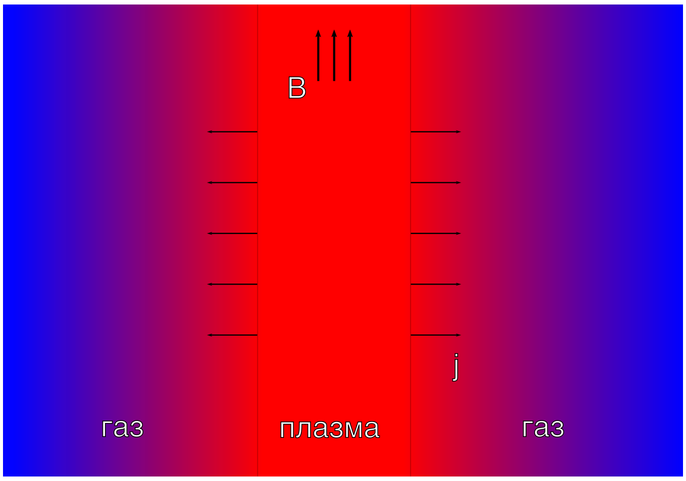


Рис. 3. Иллюстрация к постановке задачи.

3. Математическая модель

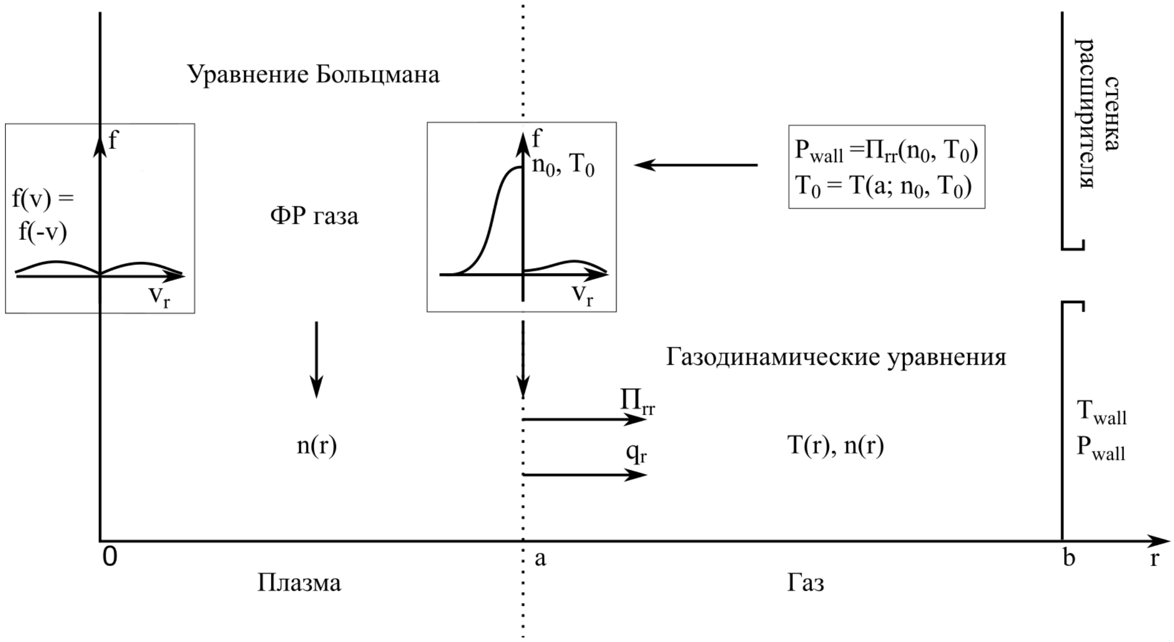


Рис. 4. Схема математической модели.

Математическую модель условно разделим на 3 части, для простоты.

1. Задача внутри плазмы.
2. Задача вне плазмы.
3. Определение граничных условий для задачи внутри плазмы, по граничным условиям на стенке установки.

В первой части будем искать ФР газа в плазме, решая кинетическое уравнение. В качестве граничного условия будем считать, что газ, проникающий в плазму, имеет максвелловское распределение, с параметрами n_0, T_0. Также из-за цилиндрической симметрии ФР газа на оси цилиндра должна быть симметричной по скоростям. Из ФР газа в плазме определяется концентрация газа $n(r)$, потоки тепла и импульса газа.

Во второй части будут решаться газодинамические уравнения. Потоки тепла и импульса газа из плазмы будут использованы в качестве граничных условий. В части возможны две постановки задачи:

1. На стенке установки задана температура и давление, то есть стенки с открытым клапаном, газ может вытекать из установки. PT задача.

2. На стенке установки задана температура и фиксированно полное число газа в установке. NT задача.

В третей части определяется связь граничных условий на стенке установки и параметрами ФР проникающего в плазму газа: n_0 и T_0. Таким образом, вся задача будет определяться граничными условиями на стенке установки.

4. Задача внутри плазмы

Рассмотрим кинетическое уравнение с интегралом столкновений Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \int |\vec{v} - \vec{v}_1| [f(\vec{v}') f_M(\vec{v}_1') - f(\vec{v}) f_M(\vec{v}_1)] \, d\vec{v}_1 \, d\sigma, \tag{1}$$

где $f(\vec{r},\vec{v},t)$ - ФР газа, $f_M(\vec{v},t)$ - максвелловская ФР плазмы, σ - сечение рассеяния, $\vec{v}$ - скорость газа до столкновения, $\vec{v}_1$ - скорость плазмы (иона или электрона) до столкновения, $\vec{v}'$ - скорость газа после столкновения, $\vec{v}_1'$ - скорость плазмы после столкновения.

Из закона сохранения импульса и энергии, скорости частиц после столкновения можно записать в следующем виде:

$$\vec{v}' = \frac{m_1}{m + m_1} |\vec{v} - \vec{v}_1| \vec{n}_0 + \frac{m\vec{v} + m_1 \vec{v}_1}{m + m_1}, \tag{2}$$

$$\vec{v}_1' = -\frac{m}{m + m_1} |\vec{v} - \vec{v}_1| \vec{n}_0 + \frac{m\vec{v} + m_1 \vec{v}_1}{m + m_1}, \tag{3}$$

где $\vec{n}_0$ - единичный вектор в направлении скорости частицы с массой m после столкновения в системе центра инерции.

С учётом (2) и новых обозначений $\vec{u_0} = \vec{v} - \vec{v}_1$, $\alpha = \frac{m_1}{m+m_1}$, $\beta = \frac{m}{m+m_1}$, преобразуем интеграл столкновений:

$$St(f) = \int u_0 [f(\alpha u_0 \vec{n}_0 - \alpha \vec{u_0} + \vec{v}) f_M(-\beta u_0 \vec{n}_0 - \alpha \vec{u_0} + \vec{v}) - f(\vec{v}) f_M(\vec{v}_1)] d^3 u_0 d\sigma. \tag{4}$$

Поскольку температура плазмы много больше температуры газа, то при интегрировании $f(\vec{v}')$ можно заменить на $n \cdot \delta(\vec{v}')$, поскольку $f(\vec{v}') \approx 0$ при $v' \gg \langle v' \rangle$, то есть $f(\vec{v}')$ "близка" к δ-функции в смысле интегрирования по скоростям столкновения. Получим из (4)

$$St(f) = \int u_0 [n \cdot \delta(\alpha u_0 \vec{n}_0 - \alpha \vec{u_0} + \vec{v}) f_M(-\beta u_0 \vec{n}_0 - \alpha \vec{u_0} + \vec{v}) - f(\vec{v}) f_M(\vec{v}_1)] d\sigma d^3 u_0. \tag{5}$$

Для того, чтобы упростить $St(f)$, нужно знать $\frac{d\sigma}{d\Omega}(u_0,\chi)$ как функцию угла рассеяния χ и энергии сталкивающихся частиц или их относительной скорости u_0.

Рассмотрим отдельно источник в $St(f)$:

$$q_{\text{ист}} = \int u_0 n \delta^{(3)}(\alpha u_0 \vec{n}_0 - \alpha \vec{u}_0 + \vec{v}) f_M(-\beta u_0 \vec{n}_0 - \alpha \vec{u}_0 + \vec{v}) \frac{d\sigma}{d\Omega}(u_0,\vec{n}_0) d\Omega d^3 u_0. \tag{6}$$

Сначала проинтегрируем по углам рассеяния Ω. Для этого рассмотрим интеграл (7). Из определения и свойств δ-функции следует, что

$$\int \delta^{(3)}(\alpha\vec{r} - \vec{a}) f(-\beta\vec{r} - \vec{a}) d^3 r = \frac{1}{\alpha^3} f\left(-\vec{a}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{\alpha^3} f\left(-\frac{\vec{a}}{\alpha}\right). \tag{7}$$

С другой стороны можно записать

$$\int \delta^{(3)}(\alpha\vec{r} - \vec{a}) f(-\beta\vec{r} - \vec{a}) d^3 r = \int\limits_0^\infty r^2 \int \delta^{(3)}(\alpha\vec{r} - \vec{a}) f(-\beta\vec{r} - \vec{a}) d\Omega dr. \tag{8}$$

Сравнивая интегралы (7) и (8) можно вычислить следующий интеграл

$$\int \delta^{(3)}(\alpha\vec{r} - \vec{a}) f(-\beta\vec{r} - \vec{a}) d\Omega = \frac{1}{\alpha^2 r^2} \delta^{(1)}(\alpha r - a) f\left(-r\beta\frac{\vec{a}}{a} - \vec{a}\right). \tag{9}$$

Видно, что при подстановке интеграла (9) в (8) ответ получается такой же, как и в (7). С учётом формулы (9) проинтегрируем (6) по Ω и получим:

$$\begin{gathered} q_{\text{ист}} = \int \frac{n}{\alpha^2 u_0} \delta^{(1)}(\alpha u_0 - |\alpha\vec{u}_0 - \vec{v}|) f_M\left(-\beta u_0 \vec{n}_0^* - \alpha\vec{u}_0 + \vec{v}\right) \frac{d\sigma}{d\Omega}(u_0,\vec{n}_0^*) d^3 u_0, \\ \vec{n}_0^* = \frac{\alpha\vec{u}_0 - \vec{v}}{|\alpha\vec{u}_0 - \vec{v}|}. \end{gathered} \tag{10}$$

Теперь проинтегрируем (10) по u_0. Для этого перейдём в сферические координаты с полярным углом θ, отсчитываемым от вектора $\vec{v}$. Рассмотрим, как преобразуется δ-функция в этой системе координат. Для этого воспользуемся общеизвестной формулой $\delta(f(x)) = \sum\limits_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}$, где x_k - простые нули функции f.

$$\delta^{(1)}(\alpha u_0 - |\alpha\vec{u}_0 - \vec{v}|) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha\cos^2\theta} \cdot \delta^{(1)}\left(u_0 - \frac{v}{2\alpha\cos\theta}\right), & \text{если } \cos\theta > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{11}$$

С учётом этого, (10) запишется

$$q_{\text{ист}} = \frac{n\pi}{\alpha^3} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 f_M\left(|\alpha\vec{u}_0 - \vec{v}| + u_0\beta\right) \frac{d\sigma}{d\Omega}(u_0,\vec{n}_0^*)\delta\left(u_0 - \frac{v}{2\alpha\cos\theta}\right) \frac{d\cos\theta}{\cos^2\theta} u_0 du_0. \tag{12}$$

Проинтегрируем (12) по u_0

$$\boxed{q_{\text{ист}} = \frac{\pi}{2\alpha^4} nv \int\limits_0^1 f_M\left(\frac{v}{2\alpha\cos\theta}\right) \frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\frac{v}{2\alpha\cos\theta},\vec{n}_0^*\right) \frac{d\cos\theta}{\cos^3\theta}.} \tag{13}$$

Формула (13) представляет собой общий вид первого члена в $St(f)$ для произвольного сечения $\frac{d\sigma}{d\Omega}(u_0,\vec{n}_0)$. Сток в $St(f)$ не упрощается для произвольного сечения. Однако можно выписать общий вид кинетического уравнения:

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{v},\vec{x},t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial f(\vec{v},\vec{x},t)}{\partial x_k} = p(v) \int f(\vec{v},\vec{x},t) d^3v - \nu(v) f(\vec{v},\vec{x},t).} \tag{14}$$

Следует отметить, что данный вид интеграла столкновения является только следствием подстановки δ - функции в $St(f)$, а конкретный вид функций $p(v)$ и $\nu(v)$ зависит от того, как устроенно сечение рассеяния холодного газа на плазме.

4.1. Модель однократных столкновений с плоской границей в пространстве скоростей

Прежде чем перейти к решению кинетического уравнения, учтём особенности геометрии задачи в пространстве скоростей. Направление $\widehat{v}_z$ будет соответствовать движению вдоль плазмы. Направление $\widehat{v}_\theta$ перпендикулярно $\widehat{v}_z$ и радиальному направлению $\widehat{v}_r$, эти три направления образуют в каждой точке цилиндра локальную декартову систему координат в пространстве скоростей (рис. 5). В координатном пространстве естественно работать в цилиндрической системе координат. Очевидно, что f не зависит от φ и z из-за цилиндрической симметрии.

Примем следующую модель:

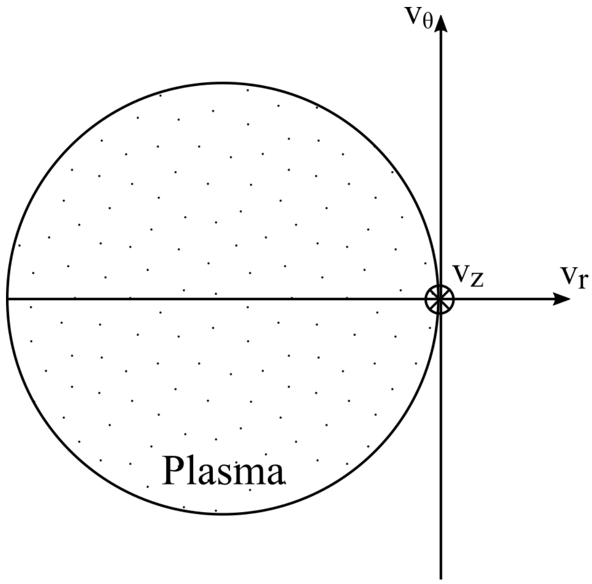


Рис. 5. Особенности системы координат.

1. Столкновениями газа с газом в плазме пренебрежём.

2. Будем считать, что ν из $q_{\text{сток}}$ не зависит от скорости, поскольку ФР газа f - функция с малым носителем в пространстве скоростей.

3. Плоская граница $v_r = v_\varepsilon$, разделяющая $q_{\text{ист}}$ и $q_{\text{сток}}$. Газ проникнувший в плазму исчезает из фазового пространства в области $|v_r| < v_\varepsilon$. Этот процесс будет описывать сток из интеграла столкновения $q_{\text{сток}} = -\nu f$. Появление частиц с $|v_r| > v_\varepsilon$ будет описывать источник $q_{\text{ист}} = p(v) \int\limits_{|v_r|<v_\varepsilon} f d^3v$.

Последнее условие означает, что столкновения газа и плазмы однократные, то есть при столкновении частица из области $|v_r| < v_\varepsilon$ попадает в область $|v_r| > v_\varepsilon$ и больше не сталкивается. Формально нужно было разделить источник и сток сферической границей $v = v_\varepsilon$, поскольку использование упрощённого источника $q_{\text{ист}}$ в интеграле столкновений (14) предполагает большую передачу импульса газу. Это означает, что

$$|\vec{v} - \alpha u_0 \vec{n}_0 + \alpha \vec{u}_0 - \vec{v}| > v_\varepsilon, \tag{15}$$

где v_ε - минимальное изменение скорости газа в результате столкновения с плазмой. v_ε прядка нескольких тепловых скоростей газа. С учётом δ-функции в уравнении (5), условие (15) преобразуется в $v > v_\varepsilon$. Однако в таком случае невозможно построить правдоподобную модель однократных столкновений, поскольку частицы с малым v_r и большими v_z и v_θ, так что-бы при этом выполнялось условие $v > v_\varepsilon$, не будут сталкиваться. Это приведёт к особенности у ФР при $v_r = +0$. ФР ведёт себя как $\frac{1}{v_r}$.

Можно было строить модель многократных столкновений и выводить частицы с малым v_r и большими v_θ, v_z дополнительными слагаемыми в $St(f)$. Но мы будем использовать менее обоснованную, но более простую модель с плоской границей, в которой однократные столкновения не приводят к сингулярности у ФР.

В принятой модели так же легко выражать ν через $p(v)$, пользуясь сохранением числа частиц:

$$\int St(f)d^3v = \int\limits_{|v_r|>v_\varepsilon} p(v)d^3v n_c(r) - \nu n_c(r) \equiv 0. \tag{16}$$

Следовательно:

$$\boxed{\nu = \int\limits_{|v_r|>v_\varepsilon} p(v)d^3v.} \tag{17}$$

Перейдём к решению стационарного кинетического уравнения в рамках принятой модели:

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} = \theta(|v_r| - v_\varepsilon)p(v) \int\limits_{|v_r|<v_\varepsilon} f d^3v - \theta(v_\varepsilon - |v_r|)\nu f. \tag{18}$$

Граничные условия:

$$\begin{gathered} f(r = a, v_r < 0) = f_0, \\ f(r = 0, -\vec{v}) = f(r = 0, \vec{v}). \end{gathered} \tag{19}$$

Решение уравнения (18) с граничными условиями (19):

$$f = \begin{cases} f_0 e^{-\frac{\nu r}{v_r} - \frac{\nu a}{|v_r|}}, & \text{если } |v_r| < v_\varepsilon, \\ f_0 + \frac{p}{|v_r|}\int\limits_0^a n_c(r')dr' + \frac{p}{v_r}\int\limits_0^r n_c(r')dr', & \text{если } |v_r| > v_\varepsilon. \end{cases} \tag{20}$$

В уравнении (20) введено обозначение $n_c(r) = \int\limits_{|v_r|<v_\varepsilon} f d^3v$.

4.2. Модель упругих шаров

Получим явное выражение $St(f)$ для упругих шаров. Известно, что в этом случае дифференциальное сечение постоянно $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathrm{const}$. Это позволит вычислить интеграл (13) и получить явное выражение для источника:

$$q_{\text{ист}} = -\frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{n_1 n}{2\alpha\sqrt{\pi}v_{1T}^3} \cdot \frac{\alpha v_{1T}}{u} \int\limits_{u^2}^{\infty} e^{-y^2} dy^2 = \frac{Qn}{u} e^{-u^2}, \tag{21}$$

В (21) введены обозначения:

$$Q = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{n_1}{2\alpha^3\sqrt{\pi}v_{1T}^2},\ v_{1T} \equiv \sqrt{\frac{2T_1}{m_1}},\ u = \frac{v}{2\alpha v_{1T}},\ y = \frac{u}{\cos\theta}. \tag{22}$$

Вычислим ν в рамках модели упругих шаров:

$$\begin{aligned} \nu = (2\alpha v_{1T})^3 Q \pi^{3/2} \int\limits_{|u_r|>u_\varepsilon} \operatorname{erfc}(|u_r|) du_r = \\ = 2\pi^{3/2} Q (2\alpha v_{1T})^3 \left(\frac{e^{-u_\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}} - u_\varepsilon \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) \right). \end{aligned} \tag{23}$$

При написании программы удобно задавать параметр $\gamma = \frac{\nu a}{v_{T_0}}$ и выражать Q через γ (24).

$$\boxed{aQ = \frac{\gamma v_{T_0}}{2\pi^{3/2}(2\alpha v_{1T})^3} \frac{1}{\left[\frac{e^{-u_\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}} - u_\varepsilon \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) \right]}.} \tag{24}$$

4.3. Проверка сохранения числа частиц в модели с плоской границей для упругих шаров

Убедимся что уравнение (18) сохраняет число частиц. Для этого посчитаем плотность потока частиц, влетающих в плазму:

$$j_{in} = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_{T_0}^3} \int\limits_{v_r<0} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{T_0}^2} \right) v_r d^3 v = -\frac{n_0 v_T}{2\sqrt{\pi}}. \tag{25}$$

Будем обозначать далее $\tilde{u} = v/v_{T_0}$. Плотность потока частиц, вылетающих из плазмы:

$$j_{out} = \frac{n_0 v_{T_0}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) \tilde{u}_r d\tilde{u}_r + \frac{n_0 v_T}{2\sqrt{\pi}} e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} + 2\nu \int\limits_0^a n_c(r')dr' \quad (26)$$

Покажем, что эти потоки по модулю ровны:

$$\frac{j_{out}}{|j_{in}|} = 2 \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) \tilde{u}_r d\tilde{u}_r + e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} + \frac{2\sqrt{\pi}\gamma}{n_0} \int\limits_0^1 n_c(y')dy', \quad (27)$$

и действительно, поскольку:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{\pi}\gamma}{n_0} \int\limits_0^1 n_c(y')dy' &= 2\gamma \int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{\gamma y'}{\tilde{u}_r}\right) dy' \int\limits_{-\tilde{u}_\varepsilon}^{\tilde{u}_\varepsilon} \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right) d\tilde{u}_r = \\ &= 2 \int\limits_{-\tilde{u}_\varepsilon}^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{\tilde{u}_r}}\right] \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right) d\tilde{u}_r = \\ &- 2 \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) \tilde{u}_r d\tilde{u}_r + 1 - e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Если подставит (28) в выражение (27), то мы получим:

$$\frac{j_{out}}{|j_{in}|} = 1. \quad (29)$$

4.4. Результаты в модели упругих шаров

Радиальный профиль концентрации вычисляется из (20) как $\int f d^3v$:

$$n(r) = n_c(r) + n_0 \operatorname{erfc}(\tilde{u}_\varepsilon) + 2Q\pi^{3/2} \int\limits_0^a n_c(r')dr' \int\limits_{u_\varepsilon}^{\infty} \frac{\operatorname{erfc}(u_r)}{u_r} du_r \quad (30)$$

Выражение для $n_c(r)$ также можно получить из (20):

$$n_c(r) = \int\limits_{|v_r|<v_\varepsilon} f_0 e^{-\frac{\nu r}{v_r} - \frac{\nu a}{|v_r|}} d^3v = \frac{2n_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{\tilde{u}_r}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma y}{\tilde{u}_r}\right) d\tilde{u}_r, \quad (31)$$

где $\gamma \equiv \frac{\nu a}{v_{T_0}}$ и $y = r/a$. На рис. 6 приведены результаты вычислений $n(r)$.

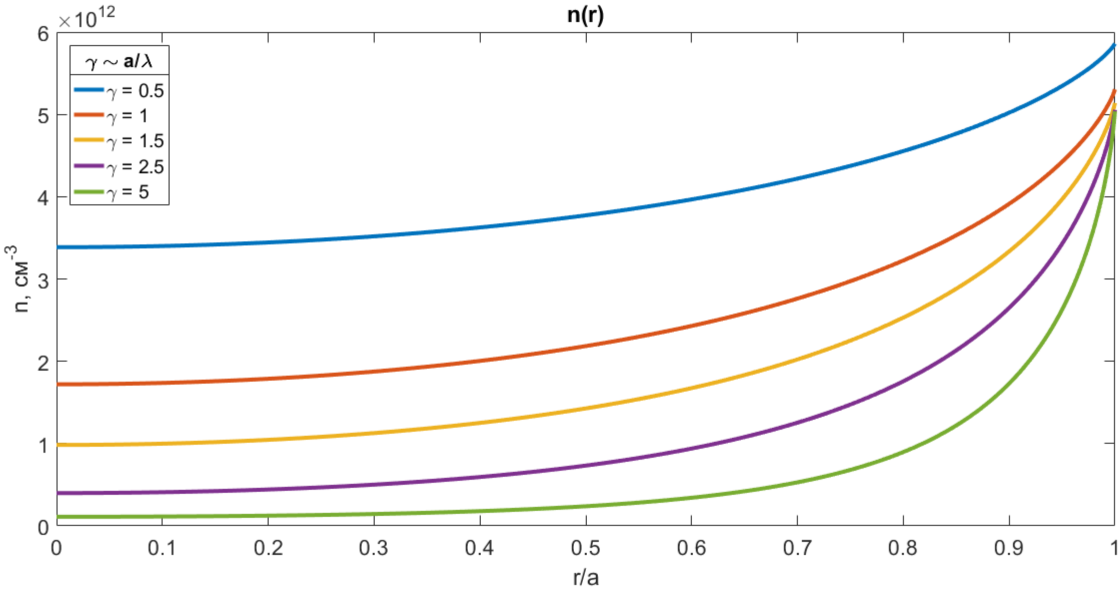


Рис. 6. Радиальный профиль концентрации газа для разных значений параметра γ. Вычисления сделаны при $T_1 = 100$эВ, $\frac{v_{T_0}}{v_{1T}} = 0.01$, $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$ и $\tilde{u}_\varepsilon = 1.9$.

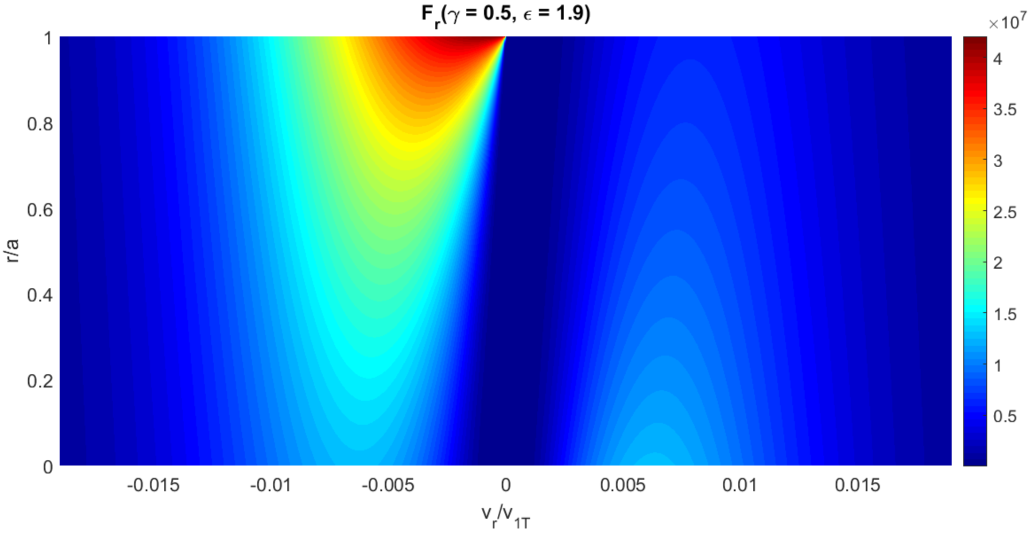
Здесь и далее $\tilde{u}_\varepsilon = 1.9$ выбранна так, чтобы хвосты ФР и ФР при $|v_r| < v_\varepsilon$ на границе $|v_r| = v_\varepsilon$ были одного порядка.

$$F_r(v_r, r) = \int f dv_\theta dv_z =$$
$$= \begin{cases} \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{T_0}} e^{-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma y}{\tilde{u}_r} - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}}, & \text{при } |v_r| < v_\varepsilon, \\ \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{T_0}} e^{-\tilde{u}_r^2} + N(u_r, r) Q \pi^{3/2} (2\alpha v_{1T}) \operatorname{erfc}(|u_r|), & \text{при } |v_r| > v_\varepsilon. \end{cases} \quad (32)$$

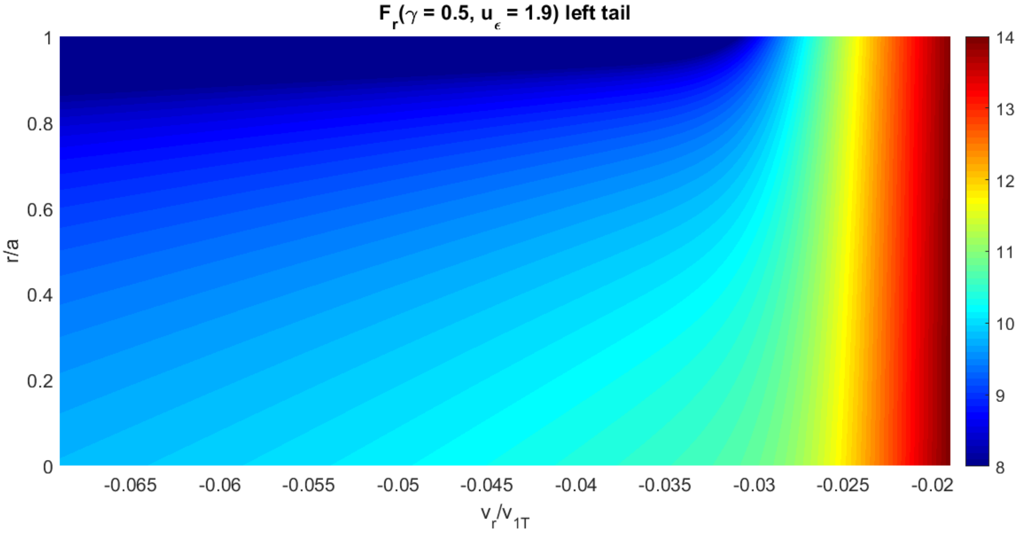
В выражении (32) введено обозначение:

$$N(u_r, r) = \left[\frac{1}{|u_r|} \int\limits_0^a n_c(r') dr' + \frac{1}{u_r} \int\limits_0^r n_c(r') dr' \right], \quad (33)$$

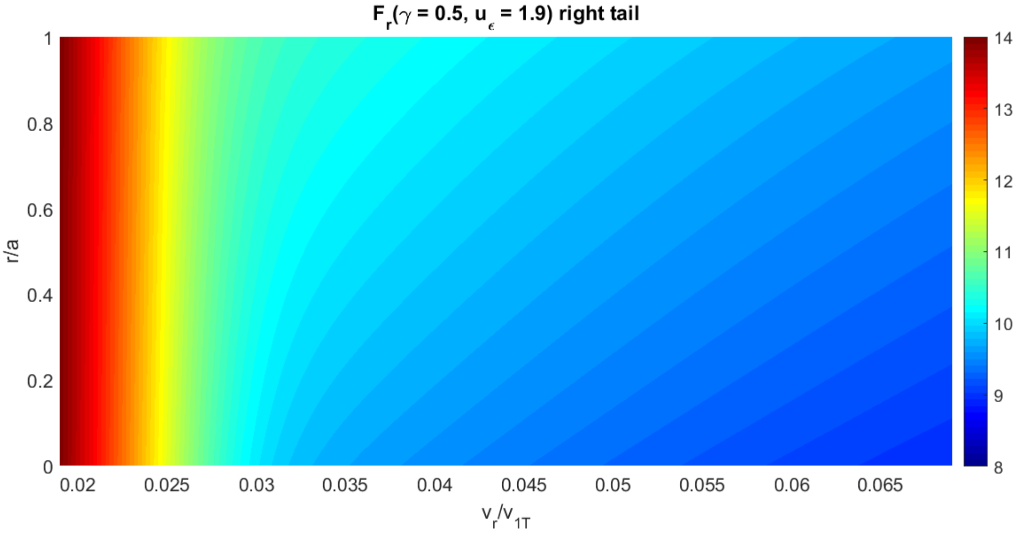
где $u = v/(2\alpha v_{1T})$ и $\tilde{u} = v/v_{T_0}$. На рис. 7a приведён график F_r при $|v_r| < v_\varepsilon$. На рис. 7b и рис. 7c приведены хвосты F_r.



(a) $F_r(|v_r| < v_\varepsilon, r)$

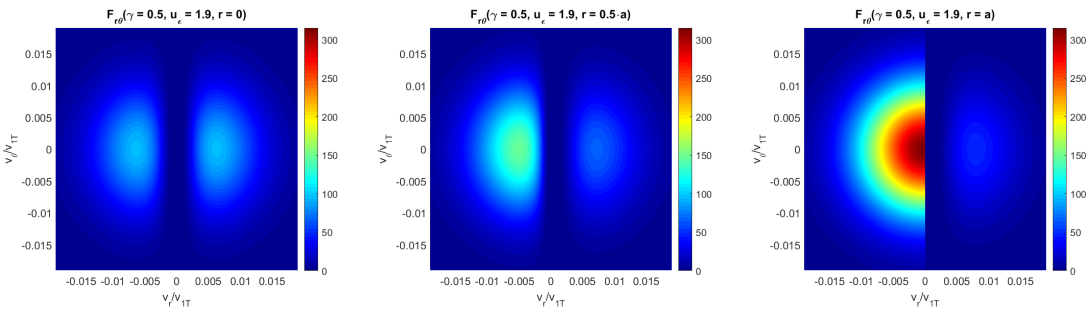


(b) $\ln\left(F_r(v_r < -v_\varepsilon, r)\right)$



(c) $\ln\left(F_r(v_r > v_\varepsilon, r)\right)$

Рис. 7. $\gamma = 0.5$, $T_i = 100$ эВ, $\frac{v_{T0}}{v_{1T}} = 0.01$, $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$.



(a) $\frac{r}{a} = 0$ (b) $\frac{r}{a} = 0.5$ (c) $\frac{r}{a} = 1$

Рис. 8. $F_{r\theta}(v_r, v_\theta, r)$, $\gamma = 0.5$, $T_i = 100$ эВ, $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$, $\frac{v_{T_0}}{v_{1T}} = 0.01$.

$$F_{r\theta}(v_r, v_\theta, r) = \int f dv_z =$$
$$= \begin{cases} \frac{n_0}{\pi v_{T_0}^2} \exp\left(-\tilde{u}_\theta^2 - \tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma y}{\tilde{u}_r} - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right), & \text{при } |v_r| < v_\varepsilon, \\ \frac{n_0}{\pi v_{T_0}^2} e^{-\tilde{u}_\theta^2 - \tilde{u}_r^2} + Q \exp\left(-\frac{u_\theta^2 + u_r^2}{2}\right) K_0\left(\frac{u_\theta^2 + u_r^2}{2}\right) N(u_r, r), & \text{при } |v_r| > v_\varepsilon \end{cases} \tag{34}$$

На рис. 8 представленна $F_{r\theta}$ на трёх разных расстояниях от оси.

Пользуясь функцией распределения, вычислим, какую энергию и импульс переносит газ, то есть посчитаем радиальные компоненты тензора плотности потока импульса $\Pi_{rr} = \int m v_r^2 f(\vec{v}, r) d^3 v$ (не трудно понять, что $\Pi_{rz} = \Pi_{r\theta} = 0$) и радиальную компоненту плотности потока энергии $q_r = \int \frac{mv^2}{2} v_r f(\vec{v}, r) d^3 v$. Если разделить q_r и Π_{rr} на плотность потока частиц, влетающих в плазму $j_0 = \int\limits_{v_r<0} f_M v_r d^3 v = n_0 v_T / (2\sqrt{\pi})$, мы получим импульс и энергию, приходящуюся на одну частицу.

$$\frac{\Pi_{rr}(a;\gamma)}{m} = \frac{n_0 v_{T_0}^2}{\sqrt{\pi}} \left[I_\gamma + \frac{1}{4}\left(3\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) + 2\tilde{u}_\varepsilon e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right)\right] + Q\pi^{3/2}(2\alpha v_{1T})^4 I_n,$$
$$I_\gamma = \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r^2 \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) d\tilde{u}_r;$$
$$I_n = \int\limits_0^a n_c(r') dr' \left[\left(\frac{1}{2} - u_\varepsilon^2\right) \mathrm{erfc}(u_\varepsilon) + \frac{e^{-u_\varepsilon^2} u_\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right]. \tag{35}$$

$$\frac{2q_r(a;\gamma)}{m} = \frac{n_0 v_{T_0}^3}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r (1+\tilde{u}_r^2) \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) d\tilde{u}_r + \frac{1}{2}(2+\tilde{u}_\varepsilon^2) e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} - 1 \right]$$
$$+ Q\pi^{3/2}(2\alpha v_{1T})^5 \int_0^a n_c(r')dr' \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u_\varepsilon^2} - u_\varepsilon \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) \right). \tag{36}$$

Вычислим асимптотики потоков в двух предельных случаях: когда $\gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$. Случай малой столкновительности($\gamma \ll 1$):

$$\begin{aligned} \frac{2q_r(a;\gamma)}{m} &\simeq \gamma n_0 v_{T_0}^3 \left(\frac{3}{2} \operatorname{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) - \frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-\tilde{u}_\varepsilon} \right) + \\ &+ aQ\pi^{3/2}(2\alpha v_{1T})^5 n_0 \operatorname{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u_\varepsilon^2} - u_\varepsilon \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) \right), \text{при } \gamma \ll 1. \end{aligned} \tag{37}$$

Это значит, что $q_r(a;\gamma) \propto \gamma$ при $\gamma \ll 1$, поскольку $Q \propto \gamma$. В случаи большой сталкновительности($\gamma \gg 1$):

$$\begin{aligned} \frac{2q_r(a;\gamma)}{m} &\simeq \frac{n_0 v_{T_0}^3}{\sqrt{\pi}} \left[\left(1 + \frac{\tilde{u}_\varepsilon^2}{2}\right) e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} - 1 \right] + \\ &+ \frac{\pi}{2} \frac{aQ}{\gamma} (2\alpha v_{1T})^5 n_0 \left(1 - e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u_\varepsilon^2} - u_\varepsilon \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) \right), \text{ при } \gamma \gg 1. \end{aligned} \tag{38}$$

Это значит, что $q_r(a)$ не зависит от γ при $\gamma \gg 1$. На рис. 12b приведена зависимость $q_r(a;\gamma)$, нормированная на плотность потока массы газа из плазмы mj_0.

Аналогично для плотности потока импульса:

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{rr}(a;\gamma)}{m} \simeq \frac{n_0 v_{T_0}^2}{2} - \frac{n_0 v_{T_0}^2}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(1 - e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right) + aQ\pi^{3/2}(2\alpha v_{1T})^4 n_0 \operatorname{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) \cdot \\ \left[\left(\frac{1}{2} - u_\varepsilon^2 \right) \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) + \frac{e^{-u_\varepsilon^2} u_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \right], \text{ при } \gamma \ll 1. \end{aligned} \tag{39}$$

Из асимптотики (39) видно, что в бесстолкновительном пределе $\gamma \equiv 0$

получается правильная асимптотика ($P = n_0 T_0$).

$$\frac{\Pi_{rr}(a;\gamma)}{m} \simeq \frac{n_0 v_{T_0}^2}{4} + \frac{n_0 v_{T_0}^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{2} e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erfc}(\tilde{u}_\varepsilon) \right) + \frac{aQ}{\gamma} \frac{\pi}{2} (2\alpha v_{1T})^4 n_0 \cdot$$
$$\cdot \left(1 - e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right) \left[\left(\frac{1}{2} - u_\varepsilon^2 \right) \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) + \frac{e^{-u_\varepsilon^2} u_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \right], \text{ при } \gamma \gg 1. \qquad (40)$$

В противоположном пределе получаем такой же результат, как и для потока тепла, то есть $\Pi_{rr}(a)$ не зависит от γ. На рис. 12а приведена зависимость $\Pi_{rr}(a;\gamma)$, нормированная на плотность потока массы газа из плазмы mj_0.

4.5. Модель с реальным сечением

Модель упругих шаров позволяет получить относительно простые качественные результаты, однако реальное сечение сильно зависит от угла рассеяния (рис. 9). Данное сечение взято из источника [2]. На рис. 9

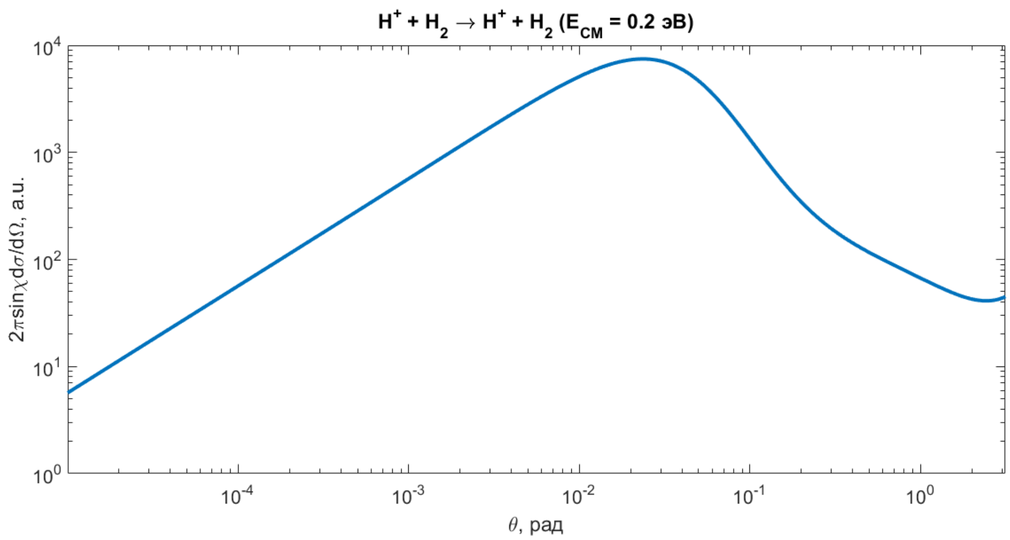


Рис. 9. Сечение рассеяния иона водорода на молекуле с энергией в системе центра инерции $E_{CM} = 0.2$ эВ

представленна аппроксимация экспериментальных данных по формуле:

$$2\pi sin\chi \frac{d\sigma}{d\Omega} = a_{\text{Б}}^2 \left[A + B(1-\cos\chi) + C\sin^2\chi\right] \exp\left(\frac{\sum\limits_{i=0} a_i (\ln\chi)^i}{1 + \sum\limits_{j=1} b_j (\ln\chi)^j} \right), \qquad (41)$$

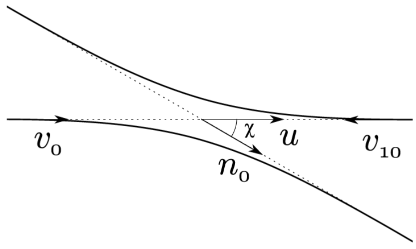


Рис. 10. Рассеяние в системе центра инерции

здесь χ - угол рассеяния в системе центра инерции, коэффициенты A, B, C, a_i, b_j зависят от энергии сталкивающихся частиц в системе центра инерции E_{CM}, $a_Б$ - боровский радиус.

Вернёмся к общему выражению источника в интеграле столкновения (13) и преобразуем его для реального сечения.

$$n_{0_z} \equiv cos\chi = \frac{\alpha u_0 - v_z}{|\alpha \vec{u}_0 - \vec{v}|}, \tag{42}$$

здесь $\vec{n}_0$ - единичный вектор в направлении рассеяния молекулы после столкновения в системе цента инерции.

С учётом рис. 10 и δ - функции в источнике не трудно преобразовать (42) и получить:

$$\cos\chi = \frac{\frac{1}{\cos\theta} - 2\cos\theta}{\sqrt{2 + \frac{1}{\cos^2\theta}}}, \tag{43}$$

здесь θ - угол между $\vec{u}_0$ и $\vec{v}$. Связь между углами θ и χ позволяет получить функцию $p(v)$ из интеграла столкновения (14):

$$p(v) = \frac{\pi v}{2\alpha^4} \int\limits_0^1 f_M\left(\frac{v}{2\alpha\cos\theta}\right) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) \frac{d\cos\theta}{\cos^3\theta}. \tag{44}$$

При вычислении $p(v)$ пренебрежём зависимостью сечения от энергии, поскольку в диапазоне энергий $E_{CM} = 0.1 \div 100$ эВ коэффициенты A, B, C, a_i, b_j изменяются в пределах 10%. Будем по-прежнему придерживаться модели с плоской границей. Условие сохранения числа частиц в этом случае имеет вид:

$$\nu = 2\pi \int\limits_{|v_r|>v_\varepsilon} \int\limits_0^\infty p(v) v_\rho dv_\rho dv_r = 2\pi \int\limits_{|v_r|>v_\varepsilon} \int\limits_{|v_r|}^\infty p(v) v dv dv_r. \tag{45}$$

Пользуясь реальным сечением, мы можем характеризовать функцию распределения вылетающего газа концентрацией, температурой и радиусом плазмы, а не параметром γ, как это было сделано в модели упругих шаров.

$$\gamma \equiv \frac{\nu a}{v_{T_0}} = \frac{n_1 v_{1T} a}{v_{T_0}} \sigma_{eff}(\tilde{u}_\varepsilon). \tag{46}$$

Пользуясь формулой (45), можно вычислить $\sigma_{eff}(\tilde{u}_\varepsilon)$. Для $\tilde{u}_\varepsilon = 1.9$ и $\frac{v_{T_0}}{v_{1T}} = 0.01$ получается следующий результат: $\sigma_{eff} = (12.04 \cdot a_{\text{Б}})^2$. В итоге выражение для γ примет следующий вид:

$$\boxed{\gamma = \frac{n_1 v_{1T} a}{v_{T_0}} (12.04 \cdot a_{\text{Б}})^2}. \tag{47}$$

4.6. Результаты для упругого рассеяния протона на молекуле водорода

С помощью формулы (44) можно численно получить $p(v)$, следовательно, имеем ФР в соответствии с (20). Приведём результаты численных вычислений $F_r(v_r > v_\varepsilon, r)$, $q_r(a;\gamma)$ и $\Pi_{rr}(a,\gamma)$ для сравнения моделей. На рис. 11 изображен хвост $F_r(v_r > v_\varepsilon, r)$ для упругого столкновения H^+ и H_2. Результаты для плотности потока тепла и импульса для упругих

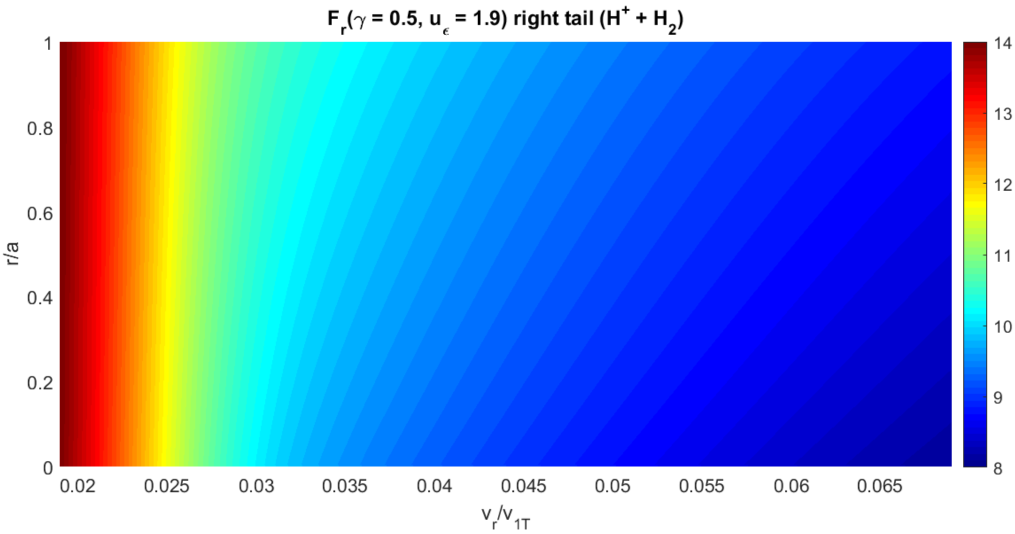
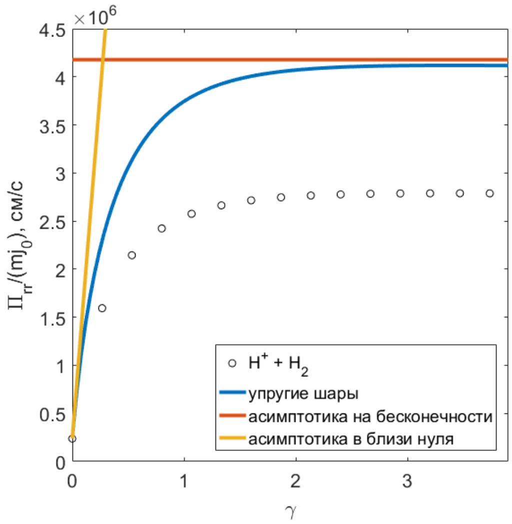


Рис. 11. $\ln\left(F_r(v_r > v_\varepsilon, r)\right)$. $\gamma = 0.5$, $T_i = 100$ эВ, $\frac{v_{T_0}}{v_{1T}} = 0.01$ и $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$.

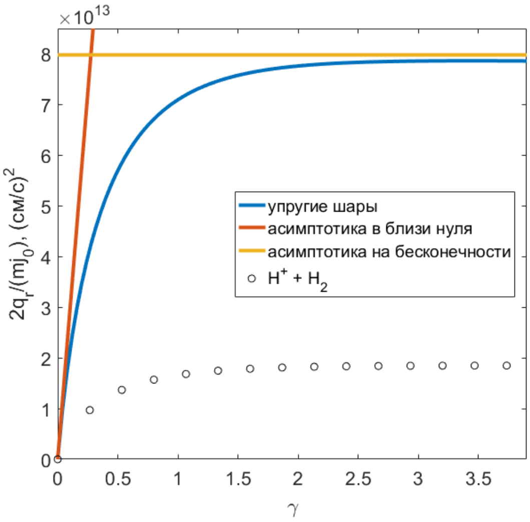
столкновений H^+ и H_2 и для упругих шаров (рис. 12).

5. Задача вне плазмы

Если характерная концентрация нейтралов в расширителе достаточно велика, для ГДЛ $n \sim 10^{13}$ см$^{-3}$, то длина свободного пробега газа мала по сравнению с размерами расширителя. В этом приближении можно пользоваться уравнениями газовой динамики.



(a) $\Pi_{rr}(a;\gamma)$.



(b) $q_r(a;\gamma)$.

Рис. 12. Зависимость плотности потока импульса и плотности потока тепла из плазмы от γ в модели упругих шаров (с асимптотикой $\gamma \gg 1$ и $\gamma \ll 1$) и модели с реальным сечением для упругих столкновений $H^+ + H_2$. $T_i = 100$ эВ, $n_0 = 10^{13}$ см$^{-3}$, $\frac{v_{T_0}}{v_{1T}} = 0.01$.

5.1. PT задача

Запишем стационарное уравнение теплопроводности и баланс сил.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r q_r = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \Pi_{rr} - \frac{\Pi_{\theta\theta}}{r} = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Плотность потока тепла на границе плазмы $q_r(a;\gamma)$, следовательно, поток вне плазмы имеет следующий вид:

$$q_r = \frac{q_r(a;\gamma)a}{r}. \tag{49}$$

Плотность потока импульса на границе плазмы $\Pi_{rr}(a;\gamma)$. Несмотря на то что на границе плазмы распределение газа не максвелловское и $\Pi_{rr} \neq$

$\Pi_{\theta\theta} = \Pi_{zz}$, можно считать, что на расстоянии порядка одной длины свободного пробега газ максвеллизовался, и следовательно $\Pi_{rr} = \Pi_{\theta\theta} = \Pi_{zz}$. То есть уравнение на баланс сил примет очень простой вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Pi_{rr} = 0. \tag{50}$$

Следовательно, газ вне плазмы имеет постоянное давление $\Pi_{rr} \equiv P_{wall} = \Pi_{rr}(a;\gamma)$.

Поскольку $\vec{q} = -\varkappa\nabla T$, выражение (49) является уравнением на температуру:

$$-\varkappa\frac{dT}{dr} = \frac{q_r(a;\gamma)a}{r}. \tag{51}$$

$$\varkappa = \frac{5}{6}\lambda\langle v\rangle n \propto \sqrt{T}. \tag{52}$$

Выделем зависимость коэффициента теплопроводности от температуры $\varkappa(T) = \varkappa_0\sqrt{T}$.

$$\varkappa_0 \equiv \frac{5}{9}\frac{1}{\sigma\sqrt{m}} \sim 1.3\cdot 10^{26}\frac{1}{\text{см}^2\text{г}^{1/2}} \tag{53}$$

Решение уравнения (51) при фиксированной температуре на стенке T_{wall}:

$$T(r) = \left[T_{wall}^{3/2} - \frac{q_p a}{\varkappa_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right]^{2/3}, \tag{54}$$

следовательно, из уравнения состояния идеального газа $P = nT$:

$$n(r) = \frac{\Pi_p}{\left[T_{wall}^{3/2} - \frac{q_p a}{\varkappa_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right]^{2/3}}. \tag{55}$$

5.2. Связь ГУ на стенке с ГУ для задачи внутри плазмы

Задание граничных условий на стенке установки (P_{wall}, T_{wall}) определяет параметры функции распределения входящего в плазму газа, поскольку $\Pi_{rr}(a;\gamma)$ и $q_r(a;\gamma)$ определяются параметрами n_0 и T_0 максвелловского распределения газа, проникающего в плазму. Два уравнения, которые свяжут n_0, T_0 с T_{wall} и P_{wall} на границе:

$$\begin{aligned} &P_{wall} = \Pi_p(n_0,T_0),\\ &T(a) = T_0. \end{aligned} \tag{56}$$

Первое уравнений из (56) позволяет легко выразить $n_0(T_0)$, поскольку $\Pi_{rr}(a;\gamma) \propto n_0$ для любого вида взаимодействия сталкивающихся частиц. Введём обозначение $\Pi_{rr}(a;\gamma) \equiv n_0\Pi_0(T_0)$, где $\Pi_0(T_0)$ уже не зависит от n_0. В модели упругих шаров получается следующий результат:

$$n_0 = \frac{P_{wall}}{\Pi_0(T_0)}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Pi_0(T_0)}{m} = \frac{v_{T_0}^2}{\sqrt{\pi}}\left[I_\gamma + \frac{1}{4}\left(3\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) + 2\tilde{u}_\varepsilon e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right)\right] + Q\pi^{3/2}(2\alpha v_{1T})^4 I_n,\\ &I_\gamma = \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r^2 \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) d\tilde{u}_r;\\ &I_n = \int\limits_0^{a} n_c(r')dr'\left[\left(\frac{1}{2} - u_\varepsilon^2\right)\mathrm{erfc}(u_\varepsilon) + \frac{e^{-u_\varepsilon^2}u_\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

Решение второго уравнения из (56) даст нам температуру на границе плазмы.

$$\begin{aligned} &v_{T_0}^3 - v_{wall}^3 + A\frac{q_0(T_0)}{\Pi_0(T_0)} = 0,\\ &q_r = n_0 q_0,\\ &A = \frac{18\sqrt{2}}{5}P_{wall}\frac{\sigma}{m}a\ln\left(\frac{a}{b}\right) \sim -3.34\cdot 10^{11}\ \left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^2 \end{aligned} \tag{59}$$

Решение этого уравнения при $T_1 = 100$ эВ, $v_\varepsilon \approx 2.46\cdot 10^6\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$:

$$\begin{aligned} &v_{T_0} \approx 1.27\cdot 10^6\ \frac{\text{см}}{\text{с}},\\ &T_0 \approx 1.8\ \text{эВ} \sim 21000\ \text{К} \end{aligned} \tag{60}$$

После определения T_0 найдём n_0 из (57). При $P_{wall} = 4.16\ \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$ (выбранно так, чтобы при комнатной температуре на стенке, $n_{wall} = 10^{14}\ \text{см}^{\text{см}^{-3}}$)

получим:

$$n_0 \approx 6.09 \cdot 10^{11}\ \text{см}^{-3} \tag{61}$$

Теперь можно получить радиальный профиль концентрации газа во всем расширителе (рис. 13).

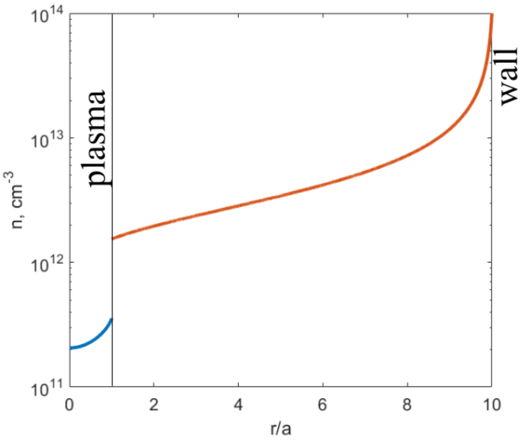


Рис. 13. Радиальный профиль концентрации газа.

6. Выводы

- Построена простая математическая модель, с помощью которой можно определять распределение газа в расширителе открытой ловушки.

- Получен $St(f)$, описывающий однократные столкновения газа и плазмы с плоской границей в пространстве скоростей. $St(f)$ получен для столкновений с большой передачей импульса газу, для произвольной зависимости сечения от энергии сталкивающихся частиц и угла рассеяния.

- Найдена функция распределения газа и вычисленны её моменты (потоки тепла и импульса) для двух видов взаимодействия частиц: упругие шары и экспериментальное сечение для $H^+ + H_2 \longrightarrow H^+ + H_2$.

- Было показано, что в результате упругих столкновений газа и плазмы в расширителе открытой ловушки концентрация газа в плазме ниже, чем концентрации газа в близи стенки расширителя. Для параметров установки ГДЛ отношение концентрации газа вблизи стенки к концентрации газа в плазме $n_{wall}/n_p \sim 10^3$.

Список литературы

1. Плазменный семинар. П.А. Багрянский "Продольный транспорт энергии и физика расширителя в магнитной ловушке открытого типа". Стр. 13.

2. Atomic and plasma-material interaction data for fusion, volume 8. International atomic energy agency Vienna, 1998. Стр. 173 - 183.

A. Решение кинетического уравнения

Решим уравнение (18) с граничными условиями (19). Рассмотрим уравнение в области $|v_r| < v_\varepsilon$:

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} = -\nu f. \tag{62}$$

Проинтегрируем это уравнение и получим:

$$f = f(0,\vec{v})e^{-\frac{\nu r}{v_r}}. \tag{63}$$

Воспользуемся граничным условием $f(a,v_r < 0) = f_0$ для того, чтобы найти $f(0,\vec{v})$:

$$f(0,v_r < 0) = f_0 e^{\frac{\nu a}{v_r}}. \tag{64}$$

Поскольку $f(0,\vec{v}) = f(0, -\vec{v})$, равенство (64) должно выполняться и для положительных v_r. Таким образом найдём $f(0,\vec{v})$:

$$f(0,\vec{v}) = f_0 e^{-\frac{\nu a}{|v_r|}}. \tag{65}$$

В итоге:

$$\boxed{f(r,|v_r| < v_\varepsilon) = f_0 e^{-\frac{\nu a}{|v_r|} - \frac{\nu r}{v_r}}} \tag{66}$$

Теперь рассмотрим уравнение в области $|v_r| > v_\varepsilon$

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} = p(v) n_c(r). \tag{67}$$

Проинтегрируем уравнения (67):

$$f = f(0,\vec{v}) + \frac{p}{v_r} \int\limits_0^r n_c(r') dr'. \tag{68}$$

Аналогичные рассуждения при учёте граничных условий приведут нас к решению:

$$\boxed{f(r,|v_r|>v_\varepsilon) = f_0 + \frac{p}{|v_r|}\int\limits_0^a n_c(r')dr' + \frac{p}{v_r}\int\limits_0^r n_c(r')dr'} \qquad (69)$$

B. Интегралы по скоростям и моменты ФР в модели упругих шаров

B.1. интегралы по v_z и v_θ

Вычислим единственный нетривиальный интеграл возникающий при вычислении $F_r(v_r,r) = \int f dv_z dv_\theta$:

$$\int p(v)du_z du_\theta = 2\pi Q \int \frac{e^{-u_\rho^2-u_r^2}}{\sqrt{u_\rho^2+u_r^2}}u_\rho du_\rho = \left[\begin{array}{c} u_\rho^2 \equiv u_\theta^2+u_z^2 \\ u_\rho^2+u_r^2 = x \end{array}\right] =$$
$$\pi Q\int\limits_{u_r^2}^{\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = 2\pi Q\int\limits_{|u_r|}^{\infty} e^{-t^2}dt \equiv Q\pi^{3/2}\operatorname{erfc}(|u_r|), \qquad (70)$$

$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1-\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-t^2}dt$ - дополнительная функция ошибок.

При вычислении $F_{r\theta}(v_r,v_\theta,r) = \int f dv_z$ возникает аналогичный интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-u_\rho^2-u_z^2}}{\sqrt{u_\rho^2+u_z^2}}du_z = \left[\begin{array}{c} u_\rho^2 \equiv u_r^2+u_\theta^2 \\ z = \frac{u_z}{u_\rho} \end{array}\right] =$$
$$=2e^{-\frac{u_\rho^2}{2}}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{u_\rho^2}{2}(1+2z^2)}}{\sqrt{1+z^2}}dz = \left[\begin{array}{c} 1+2z^2 = t \\ dz = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{dt}{\sqrt{t-1}} \end{array}\right] = \qquad (71)$$
$$= e^{-\frac{u_\rho^2}{2}}\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\frac{u_\rho^2}{2}t}}{\sqrt{t^2-1}} = e^{-\frac{u_\rho^2}{2}}K_0\left(\frac{u_\rho^2}{2}\right),$$

$K_0(x)$ - функция Макдональда.

B.2. плотность потока импульса

$$\frac{\Pi_{rr}(a;\gamma)}{m} = \int v_r^2 f d^3v = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_r^2 F_r(v_r,a)dv_r =$$

$$\frac{n_0 v_{T_0}^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int\limits_{|\tilde{u}_r|<\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r^2 \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{\tilde{u}_r} - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right) d\tilde{u}_r}_{=I_1} + \frac{n_0 v_{T_0}^2}{\sqrt{\pi}} I_2 + (2\alpha v_{1T})^4 Q \pi^{3/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\int\limits_0^a n_c(r')dr' \left(\underbrace{\int\limits_{|u_r|>u_\varepsilon} |u_r| \operatorname{erfc}(|u_r|) du_r}_{=I_3} + \underbrace{\int\limits_{|u_r|>u_\varepsilon} u_r \operatorname{erfc}(|u_r|) du_r}_{=0} \right) \right],$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r^2 e^{-\tilde{u}_r^2} d\tilde{u}_r + \underbrace{\int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r^2 e^{-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}} d\tilde{u}_r}_{=I_\gamma} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) - \frac{\tilde{u}_\varepsilon e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}}{2} + I_\gamma.$$

$$I_2 = \int\limits_{|\tilde{u}_r|>\tilde{u}_\varepsilon} e^{-\tilde{u}_r^2} \tilde{u}_r^2 d\tilde{u}_r = 2 \int\limits_{\tilde{u}_\varepsilon^2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\tilde{u}_r^2} \tilde{u}_r d\tilde{u}_r^2 = e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} \tilde{u}_\varepsilon + \int\limits_{\tilde{u}_\varepsilon}^{\infty} e^{-\tilde{u}_r^2} d\tilde{u}_r =$$

$$= e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} \tilde{u}_\varepsilon + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\tilde{u}_\varepsilon).$$

$$I_3 = 2 \int\limits_{u_\varepsilon}^{\infty} u_r \operatorname{erfc}(u_r) du_r = \int\limits_{u_\varepsilon^2}^{\infty} \operatorname{erfc}(u_r) du_r^2 = -u_\varepsilon^2 \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{u_\varepsilon}^{\infty} u_r^2 e^{-u_r^2} du_r =$$

$$- u_\varepsilon^2 \operatorname{erfc}(u_\varepsilon) + \frac{u_\varepsilon e^{-u_\varepsilon^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\operatorname{erfc}(u_\varepsilon)}{2}. \tag{72}$$

Если переписать выражение для $\Pi_{rr}(a;\gamma)$ с учётом вычисленных интегралов, получится (35). Найдём асимптотики интеграла $n_c(r)$ и I_γ в двух предельных случаях ($\gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$). Для начала преобразуем интеграл

$n_c(r)$:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^a n_c(r')dr' = \frac{an_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\tilde{u}_\varepsilon}^{\tilde{u}_\varepsilon} \int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{\gamma y}{\tilde{u}_r}\right) dy \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right) d\tilde{u}_r = \\
= \frac{an_0}{\gamma\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\tilde{u}_\varepsilon}^{\tilde{u}_\varepsilon} \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right) \tilde{u}_r \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{\tilde{u}_r}}\right) d\tilde{u}_r = \\
= -\frac{an_0}{\gamma\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\tilde{u}_\varepsilon}^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r \exp\left(-\tilde{u}_r^2 - \frac{\gamma}{\tilde{u}_r} - \frac{\gamma}{|\tilde{u}_r|}\right) d\tilde{u}_r = \\
= -\frac{an_0}{\gamma\sqrt{\pi}} \left[\int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r e^{-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}} d\tilde{u}_r + \frac{1}{2}\left(e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2} - 1\right)\right].
\end{gathered} \tag{73}
$$

1. $\gamma \ll 1$.

$$
\int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r e^{-\tilde{u}_r^2 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}} d\tilde{u}_r \simeq \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r e^{-\tilde{u}_r^2} - 2\gamma e^{-\tilde{u}_r^2} d\tilde{u}_r = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right) - \gamma\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\tilde{u}_\varepsilon). \tag{74}
$$

С учётом (73) и (74), асимптотика для интеграла $n_c(r)$ примет следующий вид:

$$
\int\limits_0^a n_c(r')dr' \simeq an_0\,\mathrm{erf}(\tilde{u}_\varepsilon). \tag{75}
$$

$$
I_\gamma \simeq \int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon} \tilde{u}_r^2 \left(1 - \frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right) e^{-\tilde{u}_r^2} d\tilde{u}_r = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\mathrm{erf}(\tilde{u}_\varepsilon) - \frac{\tilde{u}_\varepsilon e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}}{2} - \gamma\left(1 - e^{-\tilde{u}_\varepsilon^2}\right). \tag{76}
$$

Подставив эти асимптотики в (35), получим (39).

2. $\gamma \gg 1$. Из формулы (73) сразу видно, что в данном приделе интеграл $n_c(r)$ примет следующий вид:

$$
\int\limits_0^a n_c(r')dr' \simeq \frac{an_0}{2\sqrt{\pi}\gamma}\left(1 - e^{\tilde{u}_\varepsilon^2}\right). \tag{77}
$$

$$
I_\gamma \simeq 0. \tag{78}
$$

Подставив эти асимптотики в (35), получим (40).

B.3. плотность потока импульса

Для вычисления $q_r(a;\gamma)$ понадобятся следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
J_1(u_r) &= 2\pi \int\limits_0^\infty e^{-\tilde{u}_\rho^2-\tilde{u}_r^2}(\tilde{u}_\rho^2+\tilde{u}_r^2)\tilde{u}_\rho d\tilde{u}_\rho = \pi(1+\tilde{u}_r^2)e^{-\tilde{u}_r^2};\\
J_2(u_r) &= 2\pi \int\limits_0^\infty e^{-u_\rho^2-u_r^2}\sqrt{u_\rho^2+u_r^2}u_\rho du_\rho = \frac{\pi^{3/2}}{2}\operatorname{erfc}(|u_r|)+\pi|u_r|e^{-u_r^2}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Заметим заранее, что $J_2(u_r)$ - чётная функция. С учётом $J_1(u_r)$ и $J_2(u_r)$ сразу запишем:

$$\begin{aligned}
&\frac{2q_r(a;\gamma)}{m} = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty (v_r^2+v_\rho^2)v_r v_\rho f dv_\rho dv_r = \\
&= \frac{n_0 v_{T_0}^3}{\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{\tilde{u}_\varepsilon}\tilde{u}_r(1+\tilde{u}_r^2)\exp\left(-\tilde{u}_r^2-\frac{2\gamma}{\tilde{u}_r}\right)d\tilde{u}_r + \underbrace{\int\limits_{\tilde{u}_\varepsilon}^0 \tilde{u}_r(1+\tilde{u}_r^2)e^{-\tilde{u}_r^2}d\tilde{u}_r}_{=J_3}\right)\\
&+(2\alpha v_{1T})^5 Q\int\limits_0^a n_c(r')dr'\left[\underbrace{\int\limits_{|u_r|>u_\varepsilon} J_2(u_r)\frac{u_r}{|u_r|}du_r}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{|u_r|>u_\varepsilon} J_2(u_r)du_r}_{=J_4}\right]\\
&J_3 = \frac{1}{2}\left(u_\varepsilon^2+2\right)e^{-u_\varepsilon^2}-1;\\
&J_4 = 2\pi e^{-u_\varepsilon^2}-\pi^{3/2}u_\varepsilon\operatorname{erfc}(u_\varepsilon).
\end{aligned} \tag{80}$$

Если переписать выражение для $q_r(a;\gamma)$ с учётом вычисленных интегралов, получится (36). Асимптотики для $q_r(a;\gamma)$ находятся аналогично тому, как это было проделанно для $\Pi_{rr}(a;\gamma)$.