

**МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное агентство
по образованию**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НГУ)**

физический факультет

**Квалификационная работа на соискание
степени бакалавра**

Кафедра физики плазмы

Хохлов Роман Олегович

**Захваченные ионы и экранирование заряда пылевой частицы в
низкотемпературной плазме низкой плотности**

Научный руководитель:

**Д.ф.-м.н., г.н.с. Института теплофизики СО РАН,
Сухинин Геннадий Иванович.**

Новосибирск – 2009 год

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Теоретическая часть.....	5
2.1. Предел ограниченных орбит.....	5
2.2. Кинетический подход.....	9
2.3. Случай малой частоты столкновений.....	11
3. Численная схема.....	15
3.1. Расчет периодов.....	15
3.2. Интегрирование по углам и энергиям.....	17
3.3. Особенность в ядре.....	18
3.4. Оптимизация.....	18
3.5. Уравнение Пуассона.....	19
3.6. Самосогласованный потенциал.....	19
4. Результаты.....	20
5. Заключение.....	31
6. Список литературы.....	32

1. Введение

Пылевой плазмой называют ионизованный газ, содержащий заряженные частицы твердого вещества [1-5]. Пылевые частицы, помещенные в плазму, приобретают, как правило, отрицательный заряд (для частиц размером $\sim 10^{-4}$ см, заряд $\sim 10^3 - 10^4$ зарядов электрона). В некоторых случаях, например, если есть эмиссия электронов с поверхности пылевой частицы, заряд может оказаться положительным. Пылевая плазма широко распространена во вселенной. Хвосты комет, кольца планет-гигантов, туманности содержат пылевую плазму. На Земле пылевая плазма часто встречается в технологической плазме, например, в промышленных установках плазменного травления, напыления, в плазмохимических реакторах и в экспериментальных установках управляемого термоядерного синтеза. К появлению пыли в плазме могут приводить различные эффекты: вследствие распыления катода в дуговом разряде, диссоциации молекул сложных веществ в газовом разряде, приводящей к образованию и росту кластеров, наконец, в экспериментах нередко специально приготовленную пыль вносят в плазму извне [3].

Взаимодействие между пылевыми частицами часто приводит к появлению коллективных эффектов в пылевой плазме, таких как волны, неустойчивости, образование структур. В зависимости от условий пылевая плазма может вести себя как газ, жидкость или кристалл. Также можно наблюдать фазовые переходы между этими состояниями. Пылевая плазма позволяет моделировать процессы, происходящие в газе, жидкости и твердом теле. Такая модель очень удобна, поскольку позволяет наблюдать за отдельными частицами.

Исследованию поведения заряженной пыли и влияния пыли на плазму посвящено множество экспериментальных и теоретических работ (см. обзорные работы [1-5]). Впервые сложное поведение пылевых частиц в плазме наблюдал Ирвин Ленгмюр в первой половине XX века [6], но в то время исследований в данном направлении практически не велось. Большой всплеск интереса к пылевой плазме произошел в конце 80-х годов XX века в связи с возникновением проблемы предотвращения загрязнения рабочей поверхности при производстве микросхем. Следующий пик интенсивности разработки данной тематики начался в 1994 году, после того, как сразу в нескольких лабораториях наблюдались пылевые кристаллы. В то же время космические аппараты Кассини и Вояджер-2 предоставили доказательства того, что кольца Сатурна содержат пылевую плазму. На сегодняшний день физика пылевой плазмы является бурно развивающейся областью. Тем не менее, существует еще множество нерешенных проблем.

Одной из важнейших задач в области пылевой плазмы является определение величины заряда пылевой частицы, который зависит от параметров плазмы и пылевых частиц. Величина заряда пылевых частиц определяет поведение пылевой плазмы. От заряда пылевых частиц зависят силы взаимодействия частиц между собой и с внешним полем, силы ионного трения (ion drag force) и т.д. Несмотря на то, что существует множество теоретических моделей для различных предельных случаев, эту задачу до сих пор нельзя считать полностью решенной. Даже в приближении изолированной частицы возникают нетривиальные эффекты. Один из них – образование облака захваченных ионов вблизи пылевой частицы. Захваченные ионы – это ионы, находящиеся на финитных орбитах вокруг пылевой частицы. Дж. Гори в 1992 году предположил, что даже при очень низкой плотности плазмы в течение большого времени вокруг пылевой частицы возникает облако захваченных ионов [7]. Такие ионы, подобно электронам в атоме, сильно экранируют заряд пылевой частицы и оказывают существенное влияние на взаимодействие пылевых частиц с плазмой и между собой. Построение теории образования облака захваченных ионов необходимо для развития физики пылевой плазмы.

Над этой задачей работает несколько исследовательских групп в разных странах мира. Одна из первых моделей этого явления была предложена в 2003 году Мартином Лампе (Martin Lampe) [8]. В 2007 году Хатчинсон (Hutchinson) и Патачини (Patacchini) предложили решение данной задачи с использованием метода частиц в ячейках (particle-in-cell) [9]. В 2008 году А.В. Зобнин и др. предложил решение кинетического уравнения в случае со сферической поглощающей пылевой частицей с учетом ион-нейтральных столкновений [10].

В 2009 году Г.И. Сухинин, А.В. Федосеев, С.Н. Антипов, О.Ф. Петров, В.Е. Фортов предложили модель, в которой подробно рассматривался случай малой, но ненулевой частоты столкновений [12]. В новой модели был выдвинут ряд предположений, значительно упрощавших вычисления. Однако, для развития этой теории и подтверждения выдвинутых предположений необходимо произвести более точные и сложные расчеты.

2. Теоретическая часть

2.1. Предел ограниченных орбит

Предел ограниченных орбит (orbit motion limited – OML-theory) – самый простой метод оценки плавающего потенциала тела, помещенного в плазму. Этот метод часто применяется для ленгмюровских зондов [11]. Кратко приведем лишь основные положения этой теории и интересующие нас результаты.

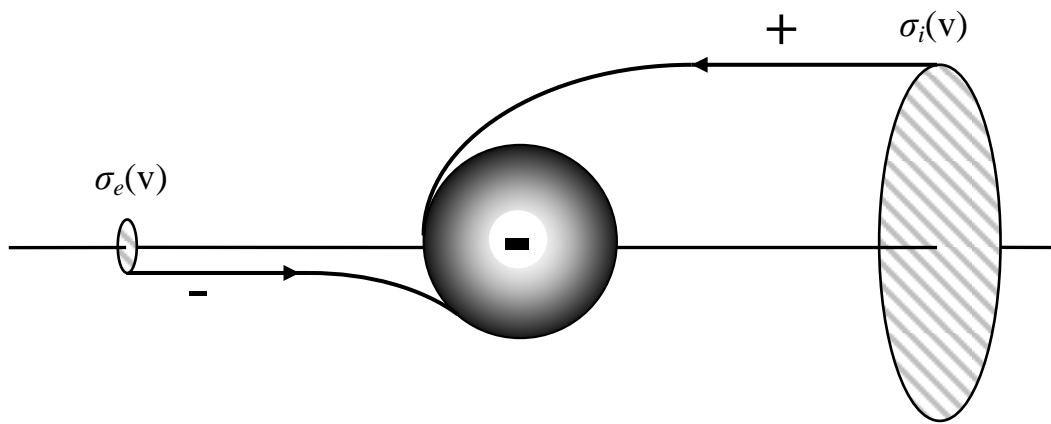


Рис.1. Поток частиц плазмы на поверхность пылевой частицы.

Пусть r_0 – радиус пылевой частицы, $\lambda_D = \left(\frac{T_i}{4\pi e^2 n_0} \right)^{1/2}$ – радиус Дебая невозмущенной плазмы, l_i – длина свободного пробега иона. В условиях, когда $r_0 \ll \lambda_D \ll l_i$ движение ионов и электронов можно считать бесстолкновительным. Такие условия часто реализуются в газовых разрядах. Используя законы сохранения энергии и момента импульса можно найти сечения падения электронов и ионов на поверхность пылевой частицы (см. рис.1):

$$\sigma_e(v) = \begin{cases} \pi r_0^2 \left(1 + \frac{2e\varphi_s}{m_e v^2} \right), & \frac{2e\varphi_s}{m_e v^2} > -1 \\ 0, & \frac{2e\varphi_s}{m_e v^2} < -1 \end{cases}; \quad \sigma_i(v) = \pi r_0^2 \left(1 - \frac{2e\varphi_s}{m_i v^2} \right), \quad (1)$$

где v – скорость иона (электрона) на бесконечности, φ_s – потенциал поверхности пылевой частицы, e – элементарный заряд, m_i и m_e – массы ионов и электронов, соответственно. Найдем потоки ионов и электронов на поверхность пылевой частицы.

$$I_{i(e)} = \int v \sigma_{i(e)}(v) f_{i(e)}(v) d^3v \quad (2)$$

В газоразрядной плазме функция распределения ионов (электронов) $f_{i(e)}(v)$ часто бывает неравновесной. Вычисление неравновесной функции распределения является отдельной сложной задачей. В OML-теории обычно предполагается, что функция распределения является максвелловской.

$$f_{i(e)}(v) = \left(\frac{m_{i(e)}}{2\pi T_{i(e)}} \right)^{3/2} v \exp\left(-\frac{m_{i(e)} v^2}{2T_{i(e)}}\right), \quad (3)$$

где $T_{i(e)}$ – температура ионов (электронов). Подставляя (3) в (2) и приравнявая электронный и ионный токи, получим уравнение на плавающий потенциал

$$\sqrt{\frac{T_e m_i}{T_i m_e}} \exp\left(\frac{e\varphi_s}{T_e}\right) = \left(1 - \frac{e\varphi_s}{T_i}\right). \quad (4)$$

Введем безразмерные параметры $Q = \frac{e\varphi_s}{T_i} = \frac{Z_d e^2}{r_0 T_i}$, (потенциал на поверхности пылевой частицы, отнесенный к температуре ионов), где Z_d – зарядовое число пылевой частицы, $\tau = \frac{T_e}{T_i}$ (отношение температур электронов и ионов), $\mu = \frac{m_i}{m_e}$ (отношение масс иона и электрона). Все три параметра обычно $\gg 1$: $Q \sim 10^2 - 10^3$, $\tau \sim 10 - 100$, $\mu \sim 10^3 - 10^5$ (для инертных газов, часто используемых в экспериментах с газовыми разрядами: He, Ne, Ar, Kr). Эти обозначения будут использоваться далее. В безразмерном виде уравнение (4) будет выглядеть как:

$$\sqrt{\mu\tau} \exp\left(\frac{Q}{\tau}\right) = (1 - Q). \quad (5)$$

Вычисленный с помощью уравнения (5) заряд частицы Q является достаточно хорошей оценкой и будет использоваться для вычислений потенциала и плотностей заряженных частиц плазмы.

В рамках данного подхода можно вычислить радиальное распределение плотности свободных ионов вокруг пылевой частицы [11]:

$$n_{if}(r) = \frac{n_0}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{T_i^{3/2}} \int_{E_m(r)}^{\infty} d\varepsilon \exp(-\varepsilon/T_i) [\sqrt{\varepsilon - U(r)} + \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \sqrt{\varepsilon - E_o(r)}], \quad (6)$$

где n_0 – плотность невозмущенной плазмы, $U(r)$ – потенциал, создаваемый зарядом пылевой частицы,

$$E_0 = \frac{r^2 U(r) - r_0^2 U(r_0)}{r^2 - r_0^2},$$

$$\begin{cases} E_m = 0, E_0 \leq 0, \\ E_m = E_0, E_0 > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Характерный вид зависимости, задаваемой формулой (6) представлен на *рис.2*.

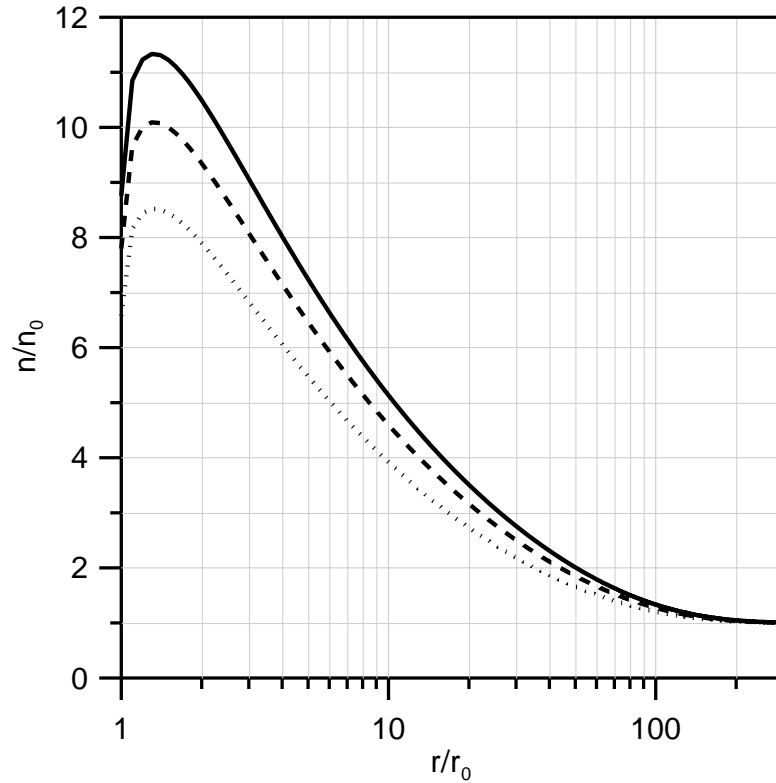


Рис.2. Распределения плотности свободных ионов в потенциале Дебая-Хюкеля при различных значениях заряда пылевой частицы: $Q=240$ (сплошная линия), $Q=190$ (пунктир), $Q=135$ (точки).

Данный подход широко используется, однако часто результаты этой теории сильно рознятся с экспериментальными данными. Чтобы увидеть недостатки данного подхода рассмотрим, как ведет себя эффективный потенциал иона вблизи заряженной пылевой частицы:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}. \quad (8)$$

На *рис.3* построены кривые эффективного потенциала для различных значений момента импульса J , в формулу (8) подставлен потенциал Дебая-Хюкеля:

$$U(r) = -\frac{Q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

Как видно из *рис.3* эффективный потенциал может иметь центробежный барьер, что приведет к небольшому уменьшению тока ионов на поверхность пылевой частицы.

При некоторых J возникает потенциальная яма. Ион, летящий из бесконечности, не может оказаться внутри этой ямы. Если считать, что частота столкновений $\nu = 0$, то случай финитных траекторий не реализуется. Однако в реальной плазме столкновения есть всегда. В случае слабоионизованной газоразрядной плазмы самые частые столкновения – столкновения между ионами и нейтралами, с резонансной перезарядкой. В результате такого столкновения может родиться ион внутри потенциальной ямы. Такой ион будет иметь финитную траекторию (захваченный ион). Как видно из *рис.3*, потенциальная яма находится на расстоянии порядка λ_D . В силу условия $\lambda_D \ll l_i$ захваченный ион, прежде чем вновь столкнется с нейтралом, сделает большое число витков и внесет большой вклад в экранировку заряда пылевой частицы. Вместе с этим будет происходить накопление захваченных ионов. Облако захваченных ионов будет оказывать существенное влияние на экранировку заряда пылевой частицы. Пусть суммарный заряд облака порядка заряда пылевой частицы, тогда плотность захваченных ионов в этом облаке

$$n_{tr} \sim \frac{Z_d}{\lambda_D^3} \sim \frac{10^4}{(10^{-2} \text{ cm})^3} \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3} \sim 10^2 n_0, \quad (9)$$

где $n_0 \sim 10^8 \text{ cm}^{-3}$ – плотность невозмущенной плазмы. $Z_d \sim 10^4$ – характерное зарядовое число пылевой частицы.

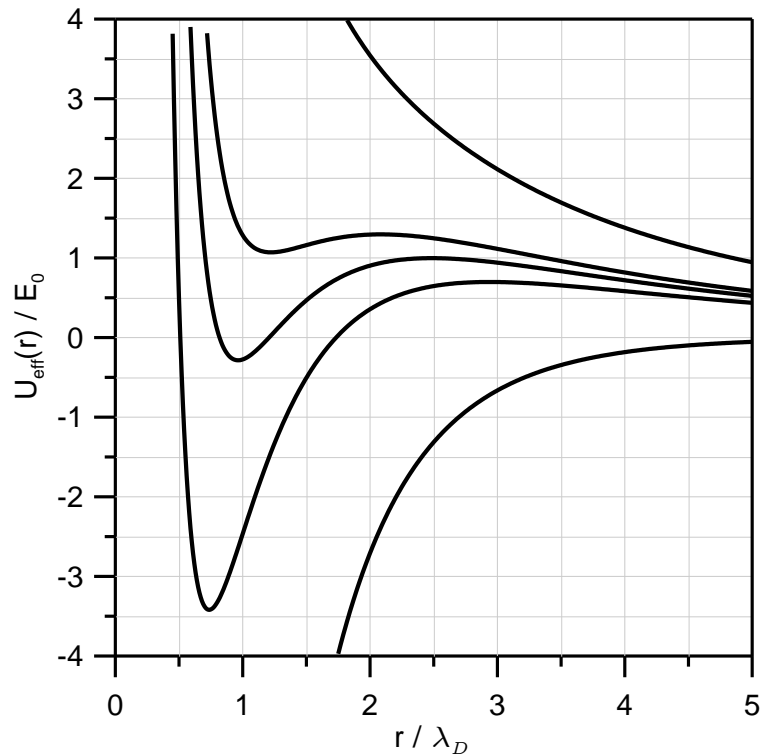


Рис.3. Характерный вид эффективного потенциала при различных значениях момента импульса J . E_0 – кинетическая энергия на бесконечности.

2.2. Кинетический подход

Чтобы учесть столкновения, воспользуемся кинетическим уравнением с интегралом столкновений в форме τ -приближения (уравнение Бхатнагара-Гросса-Крука – БГК):

$$\frac{df(r, p)}{dt} = -\nu[f(r, p) - n_i F_0], \quad (10)$$

где ν – частота столкновений, n_i – плотность ионов, F_0 – распределение Максвелла

$$F_0 = \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{W - U(r)}{T_i} \right). \quad (11)$$

Перейдем в этом уравнении к сферическим координатам, а затем, учитывая сферическую симметрию, к координатам (r, W, J) , где W – полная энергия иона, J – момент импульса.

Кинетическое уравнение примет вид [10]

$$v_r(r) \frac{\partial f(W, J)}{\partial r} = -\nu[f(W, J) - n_i F_0], \quad (12)$$

где v_r – радиальная скорость. Решение уравнения (12) можно выразить через функцию Грина:

$$\begin{aligned} f(W, J, r) = & \nu \int_{r_0}^r \frac{F_0(W, r') n_i(r')}{v_r(r')} G(W, J, r, r') dr' \\ & + \nu \int_r^{\infty} \frac{F_0(W, r') n_i(r')}{v_r(r')} G(W, J, r', r) dr' + f_0(W, r). \end{aligned} \quad (13)$$

Функция $G(W, J, r, r')$ отлична от 0 только при $2m_i[W - U(r)]r^2 - J^2 \geq 0$. Пусть r_{\min} и r_{\max} – корни уравнения $2m_i[W - U(r)]r^2 - J^2 = 0$. Тогда $r_{\min} \geq r$, $r' \leq r_{\max}$. Используя интеграл вероятности столкновения (collision probability integral)

$$P(r_1, r_2) = \nu \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{v_r(t)} \quad (14)$$

запишем функцию Грина в виде:

$$G_1(r, r') = \frac{\exp[-P(r', r)]}{2}, \quad (15a)$$

если $r_{\min} \leq r_0$, $r_{\max} = \infty$ (Часть G , описывающая ионы, упавшие на пылевую частицу);

$$G_2(r, r') = \exp[-P(r_{\min}, r)] \cosh[P(r_{\min}, r')], \quad (15b)$$

если $r_{\min} \leq r_0$, $r_{\max} = \infty$ (Ионы, имеющие инфинитные траектории);

$$G_3(r, r') = \cosh[P(r, r_{\max})] \exp[-P(r', r_{\max})], \quad (15c)$$

если $r_{\min} \leq r_0$, $r_{\max} < \infty$ (ионы, имеющие финитные траектории, пересекающие поверхность пылевой частицы), и

$$G_4(r, r') = \frac{\cosh[P(r, r_{\max})]\cosh[P(r_{\min}, r')]}{\sinh[P(r_{\min}, r_{\max})]}, \quad (15d)$$

если $r_{\min} > r_0$, $r_{\max} < \infty$ (ионы, имеющие финитные траектории, не пересекающие поверхность пылевой частицы).

Интегрирование по фазовому пространству дает интегральное уравнение для плотности ионов,

$$n(r) = \int_{r_0}^{\infty} K(r, r')n(r')dr', \quad (16)$$

где

$$K(r, r') = \left(\frac{2\pi m_i}{T_i^3}\right)^{-1/2} \nu \int_{\max\{U(r), U(r')\}}^{\infty} dW \int_0^{J_{\max}^2} dJ^2 \frac{r'}{r} \frac{\exp[-\frac{W+U(r')}{T}][G(r, r')\theta(r-r') + G(r', r)\theta(r'-r)]}{\sqrt{2m_i[W-U(r)]r^2 - J^2} \sqrt{2m_i[W-U(r')]r'^2 - J^2}}, \quad (17)$$

где $J_{\max}^2 = \min\{2m_i[W-U(r)]r^2, 2m_i[W-U(r')]r'^2\}$

Выпишем функции Грина при $\nu \rightarrow 0$.

$$G_1 \rightarrow 1/2, \quad (18a)$$

$$G_2 \rightarrow 1, \quad (18b)$$

$$G_3 \rightarrow 1, \quad (18c)$$

$$G_4 \rightarrow \frac{1}{\nu \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{v_r}}. \quad (18d)$$

Функция Грина G_4 обратно пропорциональна ν . Если подставить (18d) в (13), то полученная функция распределения захваченных ионов не будет зависеть от частоты столкновений. Это подтверждает то, что при достаточно малой частоте столкновений ν плотность захваченных ионов не зависит от ν . В приведенном в [10] решении опущено рассмотрение нулевых мод уравнения (12). Действительно, уравнение

$$v_r(r) \frac{\partial f(W, J)}{\partial r} = -\nu f(W, J) \quad (19)$$

имеет ненулевое решение, которое, по видимому, соответствует потоку частиц из бесконечности и должно давать плотность свободных ионов $n_{if}(r)$. В случае большой частоты столкновений ν поток частиц из бесконечности не оказывает влияния на

область вблизи пылевой частицы, но в пределе малой v этот поток может оказаться определяющим.

2.3. Случай малой частоты столкновений

Случай малой, но ненулевой частоты столкновений, наиболее интересен и важен для нас. Рассмотрим подробнее процесс образования облака захваченных ионов.

Рассмотрим ион, родившийся в результате резонансной перезарядки. В зависимости от кинетической энергии ε , угла θ под которым он летел, и расстояния до пылевой частицы R , он может оказаться захваченным, может, рассеявшись, улететь на бесконечность, или упасть на пылевую частицу (см. *рис.4а*). Проинтегрировав функцию распределения по соответствующим углам и энергиям, найдем вероятности каждой из этих трех ситуаций (см. *рис.4б.*), соответственно:

$$P_{tr}(r) = \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} \sqrt{y - \frac{E_1}{T_i}} e^{-y} dy, \quad (20a)$$

$$P_{free}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y_{\max}}^{\infty} \sqrt{y} \exp(-y), \quad (20b)$$

$$P_{fall}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_{\max}} \sqrt{y} \exp(-y) - \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y_{\max}}^{y_{\min}} \sqrt{y - \frac{E_1}{T_i}} e^{-y} dy, \quad (20c)$$

где $y = \frac{\varepsilon}{T_i}$, $E_1(r) = \frac{r_0^2(U(r) - U(r_0))}{(r^2 - r_0^2)}$, $y_{\max} = -\frac{U(r)}{T_i}$, $y_{\min} = \frac{E_1(r)}{T_i}$,

Легко проверить, что

$$P_{tr}(r) + P_{free}(r) + P_{fall}(r) = 1. \quad (21)$$

Верхний предел интегрирования по энергии y_{\max} определяется высотой центробежного барьера. Однако, мы берем верхний предел $-U(r)$. Такое приближение вносит небольшую погрешность [8], но делает вычисления значительно проще. Это приближение будет использоваться и далее.

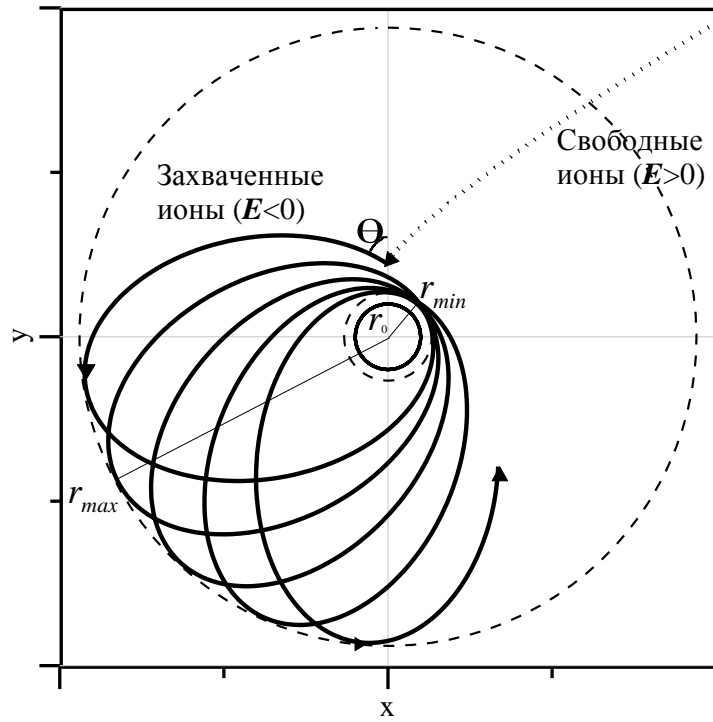


Рис.4а. Образование захваченных ионов.

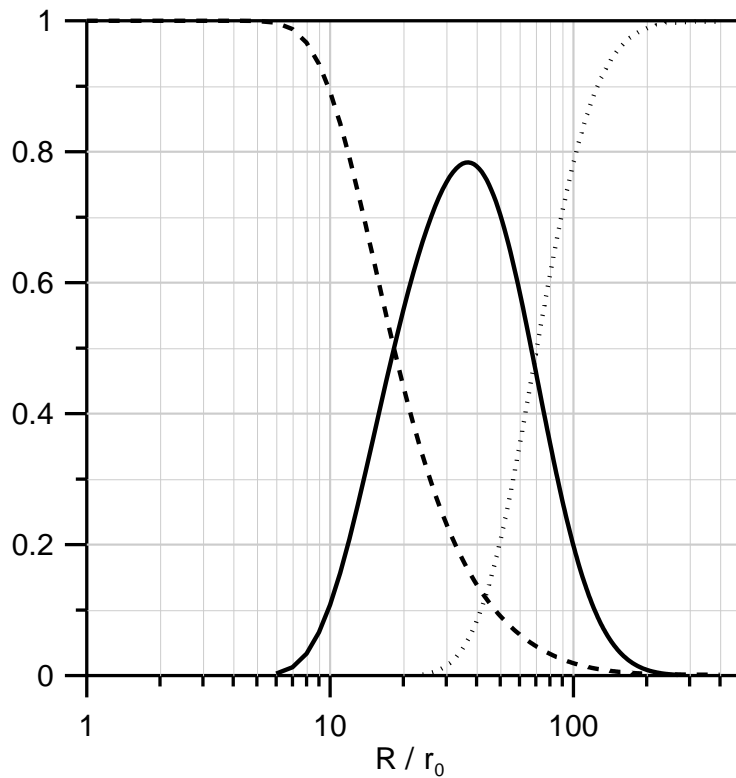


Рис.4б. Вероятности захвата (сплошная линия), падения (пунктир) и освобождения (точки).

Теперь выведем уравнение баланса захваченных ионов. В стационарном случае количество ионов, освободившихся от захвата за единицу времени равно количеству захватившихся за ту же единицу времени. Уравнение баланса для плотностей имеет вид

$$v\Delta_- n(r) = v\Delta_+ n(r). \quad (22)$$

Частоту столкновений можно сократить, поскольку она считается независимой от каких величин, входящих в уравнение. Δn легко выразить, зная вероятности захвата, падения и освобождения

$$\Delta n = n_{tr} (P_{fall}(r) + P_{free}(r)). \quad (23)$$

Для определения правой части уравнения (22) рассмотрим траекторию движения иона в центральном поле. Вклад одного иона в плотность на расстоянии r от частицы пропорционален времени dt , в течении которого ион находится в сферическом слое радиуса r и толщиной dr .

$$dt = \frac{dr}{v_r(R, r, \varepsilon, \theta)} = \sqrt{\frac{M}{2\varepsilon}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r)}{\varepsilon}}}. \quad (24)$$

Полупериод радиального движения:

$$T = \sqrt{\frac{M}{2\varepsilon}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r)}{\varepsilon}}}. \quad (25)$$

Теперь суммируя по всем энергиям и углам с учетом функции распределения вычислим плотность новообразовавшихся ионов, и подставим в уравнение баланса

$$r^2 n_{tr}(r) (P_{fall}(r) + P_{free}(r)) = \int_{r_0}^{R_{max}} R^2 n_{if}(R) K(R, r) dR, \quad (26)$$

где

$$K(r, R) = \int_{E_{min}(R)}^{E_{max}(R)} d\varepsilon \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{T_i^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_i}\right) \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta \frac{\sin \theta}{2} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r)}{\varepsilon}}} \frac{1}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r'^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r')}{\varepsilon}}}}. \quad (27)$$

Для расчетов плотностей необходимо знать потенциал $U(r)$, который можно найти из уравнения Пуассона:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} U(r) = -4\pi e^2 \Delta n(r), \quad (28)$$

где $\Delta n = n_{tr} + n_{if} - n_e$, n_e – плотность электронов. Функцию распределения электронов с хорошей точностью можно считать бoльцмановской [8]:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{U(r)}{T_e}\right). \quad (29)$$

$n_{if}(r)$ – ПЛОТНОСТЬ СВОБОДНЫХ ИОНОВ (6), $n_{tr}(r)$ – ПЛОТНОСТЬ ЗАХВАЧЕННЫХ ИОНОВ (26)

3. Численная схема

Уравнение (26) не поддается точному аналитическому решению. В уравнение входят распределения плотности заряженных частиц, зависящие от потенциала, а потенциал, в свою очередь зависит от распределения плотностей. В связи с этим можно найти численно самосогласованный потенциал и распределение плотности методом итераций.

Кратко перечислим основные трудности такого численного решения. Во-первых, область интегрирования имеет нетривиальную форму. Как будет показано далее, пределы интегрирования в некоторых случаях являются решениями трансцендентных или численно заданных алгебраических уравнений, и могут быть определены только численно. Во-вторых, интегралы в уравнении (26) имеют особенности. Эти особенности не приводят к аналитической расходимости, но существенно усложняют алгоритм численного расчета. В-третьих, высокая размерность делает невозможным использование распространенных математических пакетов, таких как MATLAB и MATHCAD. Для написания расчетных программ использовался язык С.

3.1. Расчет периодов

Определим величину $p(\varepsilon, \theta, R)$, как

$$p(\varepsilon, \theta, R) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r'^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r')}{\varepsilon}}}. \quad (30)$$

$p(\varepsilon, \theta, R)$ стоит в знаменателе во внутреннем интеграле в (27).

Точки r_{\min} и r_{\max} – точки поворота траектории, найдем их из условия равенства нулю радиальной скорости

$$1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r)}{\varepsilon} = 0. \quad (31)$$

В зависимости от параметров R , ε и θ уравнение (31) может иметь один, два, или три корня. Случай одного корня соответствует рассеянию иона на потенциале частицы. Такие ионы не являются захваченными и исключаются из рассмотрения. Два корня, между которыми левая часть (31) положительна – это и есть интересующие нас корни. Если уравнение (31) имеет три корня, это означает, что ион может оказаться как захваченным, так и рассеянным, в зависимости от того, на каком расстоянии от пылевой частицы он родился. В этом случае необходимо рассматривать только

наименьшие два корня. Во всех трех случаях точка поворота может оказаться внутри пылевой частицы. Этот случай соответствует упавшему иону.

Для решения уравнения (31) прежде всего оценим отрезок, на котором интересующие нас корни будут существовать. Левая граница – радиус пылевой частицы r_0 , правая граница R^* строго определяется условием равенства верхнего и нижнего пределов в (20а) $y_{\min} = y_{\max}$. При $r > R^*$ вероятность захвата в точности равна 0. Однако R^* – очень большое расстояние. Реально, вероятность захвата становится близка к 0 при гораздо меньших r . В связи с этим, правую границу области следует выбирать исходя из требуемой точности вычислений.

Определив отрезок, на котором будут находиться корни уравнения (31), разобьем этот отрезок N точками на $N-1$ отрезков (минимальное использованное $N = 100$). Если значения в соседних точках имеют разный знак, значит корень лежит между двумя этими точками. Далее, уточняем корень методом деления пополам. Описанный метод не позволяет найти корень, если он является точкой экстремума, однако такая ситуация соответствует либо иону, покоящемуся на дне потенциальной ямы, либо иону, «забирающемуся» на вершину потенциального барьера, порождаемого центробежным потенциалом. Первый случай приводит к $r_{\min} = r_{\max}$ и, следовательно, $p = 0$. Такая ситуация возможна только при $r = R$. Этот случай рассматривается отдельно, как будет показано ниже. Второй случай не реализуется, поскольку в рамках сделанных приближений энергия всегда ниже высоты потенциального барьера. Так же мы не можем обнаружить корни, если они оба лежат между пробными точками. Эта проблема устраняется повторными расчетами с уменьшением шага до тех пор, пока конечный результат не перестанет зависеть от шага.

После того, как найдены пределы, интеграл вычисляется методом трапеций [14]:

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f(r) dr = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(r_{i+1}) + f(r_i)}{2} (r_{i+1} - r_i). \quad (32)$$

Последовательность $\{r_0, r_1, r_2 \dots r_N\}$ возрастающая. Необходимо отметить, что в точках r_{\min} и r_{\max} подынтегральная функция обращается в бесконечность. Однако, это не приводит к расходимости интеграла. Тем не менее, это создает сложности при численном решении.

Если отбрасывать крайние точки и приближать к ним пределы численного интегрирования, то значение интеграла, в конце концов, перестает зависеть от разницы реальных и теоретических пределов. Это соответствует тому, что интеграл численно сходится. Очевидно, что с увеличением количества точек и приближением концов отрезка численного интегрирования к r_{\min} и r_{\max} увеличится точность. Однако для

увеличения скорости счета с незначительной потерей точности значения $f(r_{\min})$ и $f(r_{\max})$ заменяются линейной экстраполяцией по двум ближайшим точкам

$$\begin{aligned} f(r_0 = r_{\min}) &= 2f(r_1) - f(r_2), \\ f(r_N = r_{\max}) &= 2f(r_{N-1}) - f(r_{N-2}). \end{aligned} \quad (33)$$

Величина p не зависит от r , однако, в интеграле по углам подынтегральная функция не равна 0 только при $r_{\min} < r < r_{\max}$ (ионы, которые не пересекают сферу радиуса r , не могут дать вклад в плотность на этом радиусе). Поэтому целесообразно вычислять интеграл, только если выполняется это условие. В противном случае подынтегральная функция интеграла по углам равна нулю вне зависимости от периода.

Потенциал Дебая-Хюкеля на расстояниях много меньших радиуса Дебая мало отличается от кулоновского потенциала. Также известно, что в кулоновском потенциале период не зависит от момента импульса [13]. Этот факт используется для проверки правильности вычислений.

3.2. Интегрирование по углам и энергиям

Пределы интегрирования по углам определяются несколькими условиями: траектория иона должна пересекать сферу радиуса r , подкоренное выражение в знаменателе больше нуля, период конечен. Для определения области, в которой выполняются все эти условия, требуется довольно громоздкий анализ, трудноосуществимый в компьютерной программе. По этой причине, при интегрировании по углам применяется следующий прием. Поскольку θ лежит в интервале от 0 до π , то можно интегрировать в этих пределах, при этом заменять подынтегральную функцию на 0 в тех случаях, когда условия не выполняются. Этот прием позволяет оптимизировать программу и сократить время расчета.

Результат интегрирования по углам умножается на функцию распределения Максвелла (см. (26)). Эта функция не имеет особых точек, кроме того пределы интегрирования заданы аналитически и не зависят от переменных внутреннего интеграла. Задача интегрирования по энергиям тривиальна. Значение интеграла по энергиям будет конечно, если конечно значение интеграла по углам.

Однако, на этом этапе становится существенным вопрос о быстродействии алгоритма счета. Если непосредственно рассчитывать интеграл по энергиям (который, по сути, и является ядром $K(r,R)$), то для выполнения одной итерации требуется вызвать процедуру расчета $p(\varepsilon, \theta, R)$ порядка 10^9 раз. Расчет самосогласованного потенциала при этом потребовал бы непрерывной работы ЭВМ в течение 3 лет.

3.3. Особенность в ядре

Если проинтегрировать $K(r,R)$ по r , и изменить порядок интегрирования, то интеграл примет вид.

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^{\infty} K(r,R) dr &= \int_{E_{\min}(R)}^{E_{\max}(R)} d\varepsilon \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{T_i^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_i}\right) \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \frac{\sin \theta}{2} \times \\
 &\times \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r)}{\varepsilon}}} \frac{1}{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{r'^2} \sin^2 \theta + \frac{U(R) - U(r')}{\varepsilon}}}} = \\
 &= \int_{E_{\min}(R)}^{E_{\max}(R)} d\varepsilon \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{T_i^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_i}\right) \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \frac{\sin \theta}{2} = P_{tr}(R)
 \end{aligned} \tag{34}$$

$P_{tr}(r)$ – известная нам зависимость (см. 20а). Свойство (34) активно использовалось для проверки точности вычисления ядра. Было показано, что уменьшение ошибки расчета за счет измельчения шагов во всех интегралах позволяет добиться выполнения (34) с любой наперед заданной точностью. В то же время, выяснилось, что значения вблизи прямой $r=R$ очень чувствительны к малейшему укрупнению шагов, тогда как значения вдали гораздо более устойчивы. При этом, окрестность $r=R$ и остальная область $\{r\} \times \{R\}$ дают сопоставимые по величине вклады в интеграл (34).

Если разложить $K(r, R)$ вблизи $r=R$, то можно получить свойство симметрии:

$$K(R + \delta r, R) = K(R, R + \delta r) \tag{35}$$

Таким образом, появляется возможность быстро и с хорошей точностью вычислить значения $K(r,R)$, вдали от $r=R$, и заменить значения вблизи $r=R$, на некоторые фиктивные, подобранные таким образом, чтобы выполнялось равенство (34). Рассчитанное таким образом ядро в силу (35) даст достоверный результат при интегрировании по R , которое производится при расчете плотности захваченных ионов. Описанный прием позволяет многократно увеличить скорость вычислений.

3.4. Оптимизация

Поскольку четырехкратное интегрирование требует большого количества операций, становится необходимо оптимизировать расчетную программу. Самый очевидный способ ускорить вычисление – укрупнять шаги во всех интегралах. Однако, даже если укрупнить шаги до допустимого предела (определяющегося требованиями к точности), время необходимое для расчета все равно неприемлемо большое.

Оптимизировать программу можно, если не производить вычислений в точках, где подынтегральное выражение заведомо равно 0. Этот метод применялся при интегрировании по углам. Интервал 0 до π разбивается на N отрезков N+1 точкой. В каждой точке проверяются условия принадлежности этой точки к отрезку интегрирования. Значение в этой точке вычисляется, только если все условия выполняются.

Оптимизированная программа выполняет одну итерацию за 5 – 6 часов. На самосогласованный расчет требуется не больше недели.

3.5. Уравнение Пуассона

Решение уравнения Пуассона можно представить в виде:

$$U(r) = -\frac{e^2 Z_d}{r} + \frac{4\pi e^2}{r} \int_{r_0}^r dx x^2 \Delta n(x) + 4\pi e^2 \int_r^{\infty} dx x \Delta n(x) \quad (36)$$

где $\Delta n = n_{if} + n_{tr} - n_e$. В (36) входит интеграл до бесконечности. При расчетах бесконечность заменяется конечным пределом, при котором подынтегральная функция уже настолько мала, что отличие от нуля не больше, чем погрешность вычислений. Результат, к которому приводит такая замена, будет обсуждаться ниже. Как видно, Δn является суммой трех величин, но n_e вычисляется гораздо точнее, чем два других слагаемых.

3.6. Самосогласованный потенциал

Самосогласованный потенциал рассчитывается методом итераций. На i-той итерации рассчитывается плотность ионов при помощи равенств (26) и (27) для потенциала, найденного в i-1 итерации. Для найденной плотности решается уравнение Пуассона. Затем расчет повторяется до тех пор, пока новый потенциал не будет отличаться от старого. В качестве потенциала на нулевой итерации использовался потенциал Дебая-Хюкеля

$$U(r) = -\frac{Q}{r} \exp\left(-\frac{r-r_0}{\lambda_D}\right). \quad (37)$$

Для того, что бы избежать расходимости на каждой итерации использовался не непосредственно потенциал предыдущей итерации U_i , а средневзвешенное значение двух предыдущих:

$$U_i^*(r) = q_1 U_i(r) + q_2 U_{i-1}(r), \quad (38)$$

где q_1, q_2 – весовые коэффициенты: $q_1 + q_2 = 1$, причем q_1 в десятки раз меньше, чем q_2 . Весовые коэффициенты подбираются эмпирически. В большинстве расчетов $q_1 = 5\%$.

4. Результаты

На *рис 5* представлен характерный вид ядра $K(R,r)$ в самосогласованном потенциале. На *рис.6* приведена контурная карта той же поверхности. Срезы этого ядра

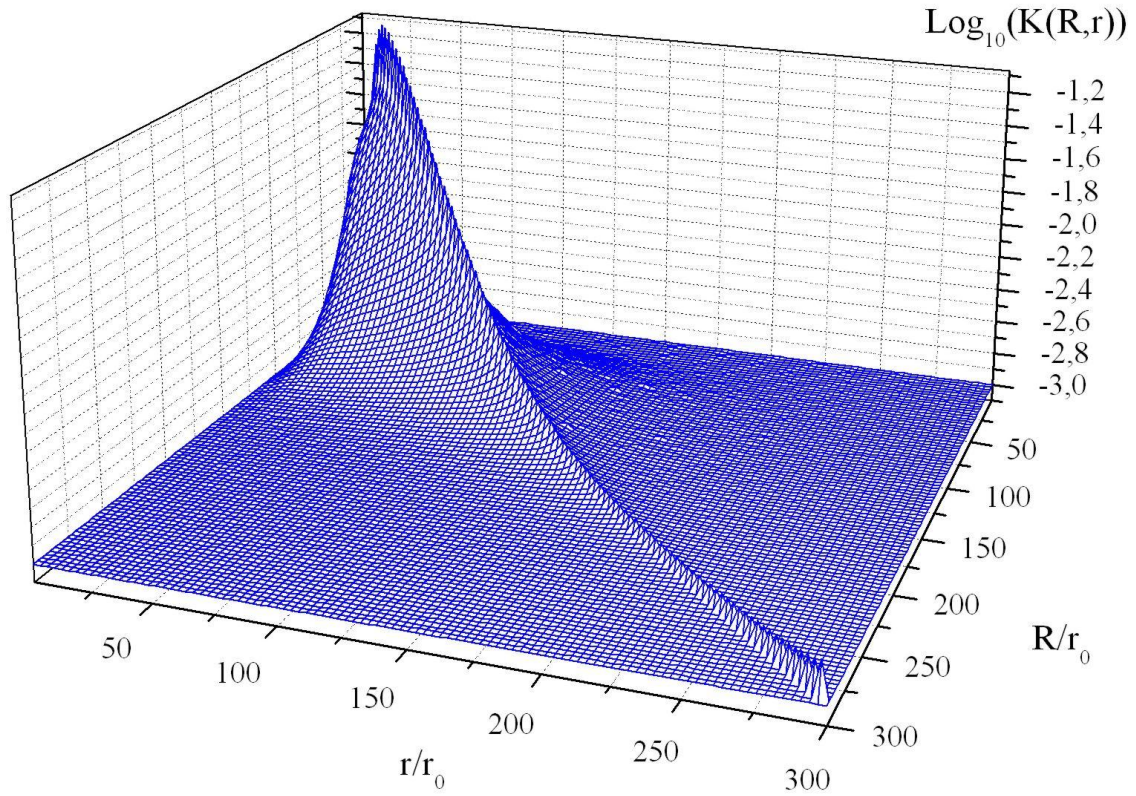


Рис.5. Общий вид ядра $K(R,r)$.

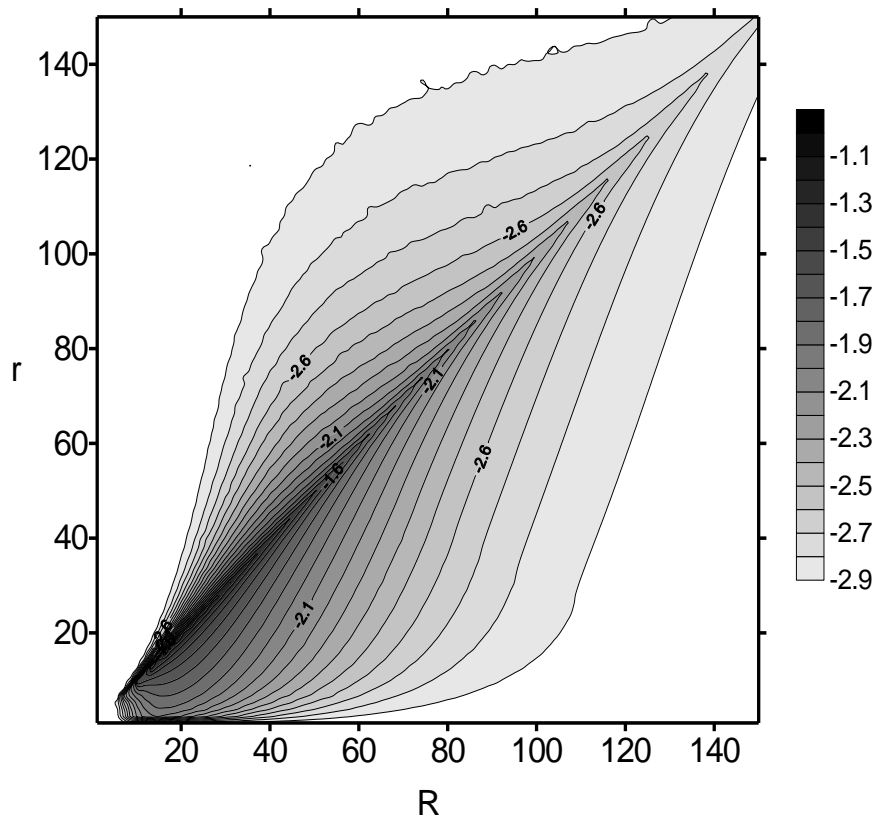


Рис.6. Контурная карта поверхности $K(R, r)$.

при фиксированных r и R приведены на рис.7 и рис.8. соответственно. Видно, что ионы, родившиеся на расстоянии R , дадут наибольший вклад в плотность на расстоянии $r \approx R$. В частности, при $r = R$, можно наблюдать ионы, находящиеся на круговых орбитах, т.е. $r_{\min} = r_{\max}$. Период радиального движения таких ионов равен 0, поэтому при $r = R$ ядро должно обращаться бесконечность. В представленном ядре значения при $r = R$ уже заменены вычисленными конечными значениями, как говорилось в 3.4.

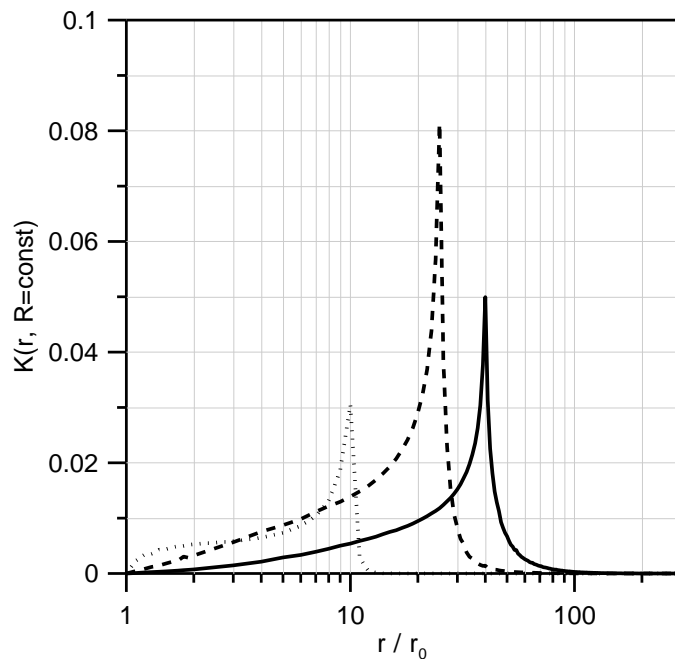


Рис.7. $K(R, r)$ при $R=40$ (сплошная линия), $R=25$ (пунктир), $R=10$ (точки).

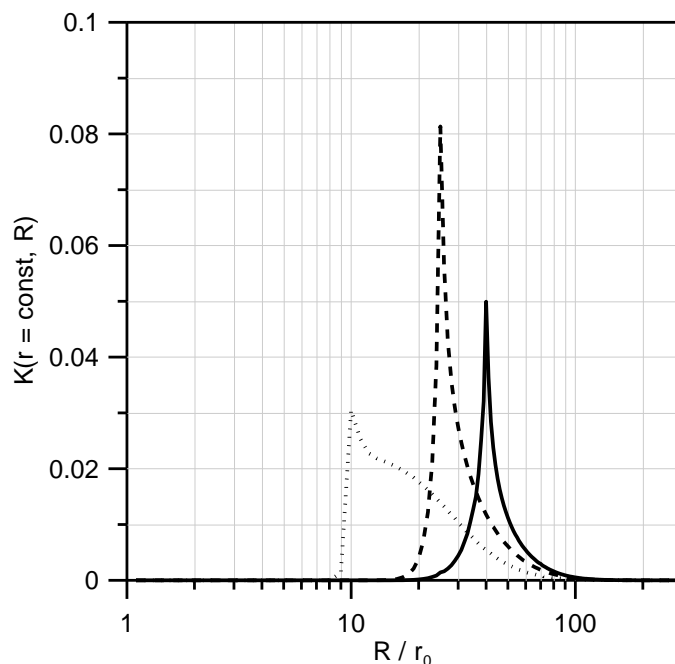


Рис.8. $K(R, r)$ при $r=40$ (сплошная), $r=25$ (пунктир), $r=10$ (точки).

Как и предполагалось в [12], ядро имеет высокий узкий максимум при $R=r$, однако области вдали от $R=r$ дают сопоставимый по величине вклад в интеграл (26). В связи с этим, аппроксимация ядра, сделанная в [12], является грубым приближением.

На рис.9 представлены рассчитанные самосогласованные распределения плотности захваченных ионов для различных значений заряда пылевой частицы Q . Ниже приведены параметры плазмы, которым соответствуют использованные значения Q : $Q = 240$ соответствует $\tau = 100$, при $r_0 = 10^{-4}$ см, газ – аргон. При этом $Z_d = 5 \cdot 10^3$; $Q=190$: $\tau = 75$, при тех же условиях. При этом $Z_d = 3,95 \cdot 10^3$; $Q = 135$: $\tau = 50$, $Z_d = 2,8 \cdot 10^3$.

Радиус Дебая в этих расчетах: $\lambda_D = 6,6 \cdot 10^{-3}$ см, что соответствует, например, $n_0 = 4 \cdot 10^8$ см⁻³ и $T_i = 0,03$ эВ.

На рис.9 видно, что плотность захваченных ионов имеет два максимума: вблизи пылевой частицы и на расстоянии $\sim 0,5 \lambda_D$. Ранее различные модели предсказывали либо только дальний максимум [12], либо только ближний [8]. Таким образом, приведенный расчет показывает, что представленная модель является более общей.

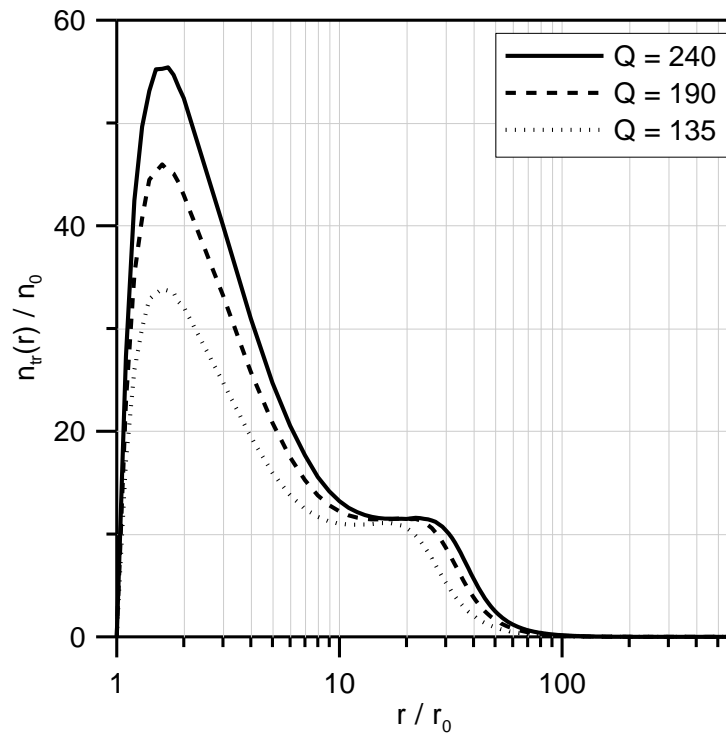


Рис.9. Распределение плотности захваченных ионов для различных зарядов пылевой частицы Q .

Для тех же значений Q рассчитан объемный заряд частиц плазмы вблизи пылевой частицы (заряд, заключенный в сфере радиуса r , измеренный в тех же единицах, что и заряд пылевой частицы Q):

$$Q_{tr}(r) = \frac{4\pi e^2 r_0^2}{T_i} \int_{r_0}^r x^2 n_{tr}(x) dx. \quad (39)$$

На рис.10 представлены результаты этого расчета. На графике построено отношение объемного заряда $Q_{tr}(r)$ к заряду пылевой частицы Q . Как видно, заряд захваченных ионов составляет около половины заряда пылевой частицы. Поскольку захваченные ионы связаны с пылевой частице, подобно электронам в атоме, с большого расстояния можно наблюдать только разность зарядов пылевой частицы и захваченных ионов. Такое рассмотрение хорошо согласуется с экспериментальными данными. Так же на рис.10 приведен характерный вид объемного заряда всех заряженных частиц плазмы (электроны, свободные и захваченные ионы), вычисленный аналогично (39). Кривые полного объемного заряда для всех этих случаев практически неразличимы на этом графике. Во всех расчетах полный объемный заряд плазмы выходит на постоянную $\sim 0,99Q$, что характеризует точность вычислений плотностей заряженных частиц плазмы.

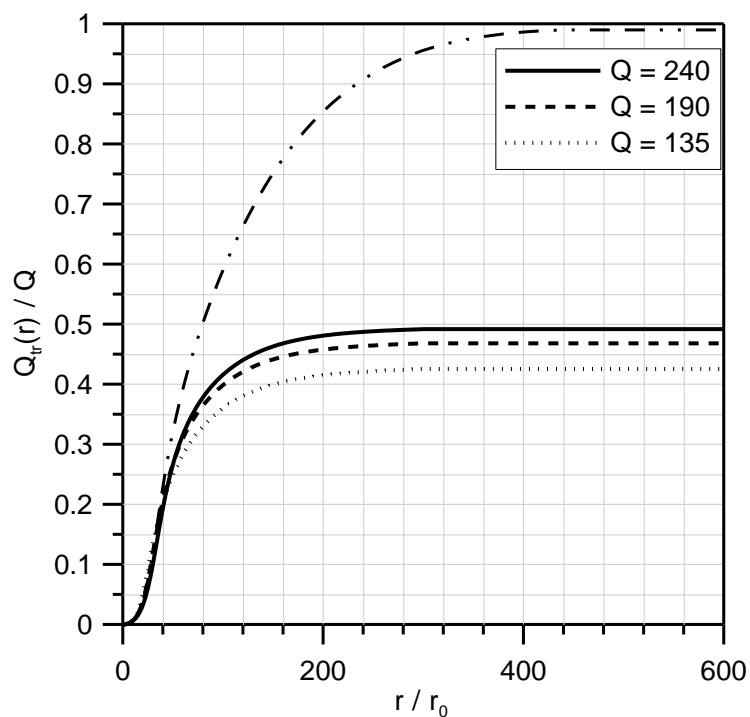


Рис.10. Объемный заряд захваченных ионов для различных зарядов пылевой частицы и характерный вид полного объемного заряда (пунктир с точками).

Подынтегральная функция в равенстве (39) – линейная плотность. Эта величина характеризует количество ионов, находящихся в сферическом слое толщины dr радиуса r . Именно эта величина определяет решение одномерной задачи. На рис.11 приведены линейные плотности для тех же параметров невозмущенной плазмы. Видно, что большая часть захваченных ионов находится на расстоянии $\sim 0,5\lambda_D$. Высота этого максимума приблизительно пропорциональна заряду пылевой частицы Q , что и понятно, поскольку полный заряд захваченных ионов составляет приблизительно $0,5Q$.

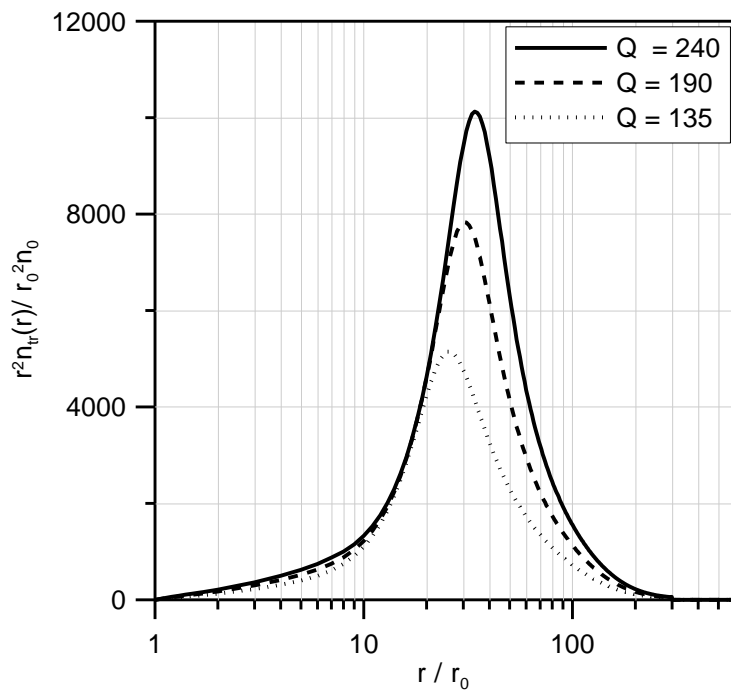


Рис.11. Линейные плотности захваченных ионов для различных значений Q , $\lambda_D = 66r_0$.

На рис.12 приведен самосогласованный потенциал для $Q = 240$. Весьма интересно, что на расстоянии около $4 - 5 \lambda_D$ потенциал испытывает перегиб и при больших r убывает как r^{-1} («кулоновский хвост»). Подобные результаты часто встречаются в литературе на данную тематику (см., например [1]). Однако, достоверность подобного результата вызывает сомнения. Очевидно, что на бесконечности потенциал должен стремиться к нулю. В тоже время, плотности ионов и электронов стремятся к плотности невозмущенной плазмы. Это значит, что полная плотность зарядов (правая часть уравнения Пуассона) на бесконечности стремится к нулю в силу условия квазинейтральности. Однако, на любом большом, но конечном расстоянии полная плотность зарядов не равна нулю, и отличается от нуля на некоторую малую величину $\delta n \ll n_0$. При численных расчетах задача вычисления потенциала по плотности заданной от r_0 до ∞ заменяется задачей, в которой заряд распределен в сфере конечного радиуса, помещенной в вакуум. Разумеется, если полный заряд сферы не равен нулю, то за пределами этой сферы установится кулоновский потенциал.

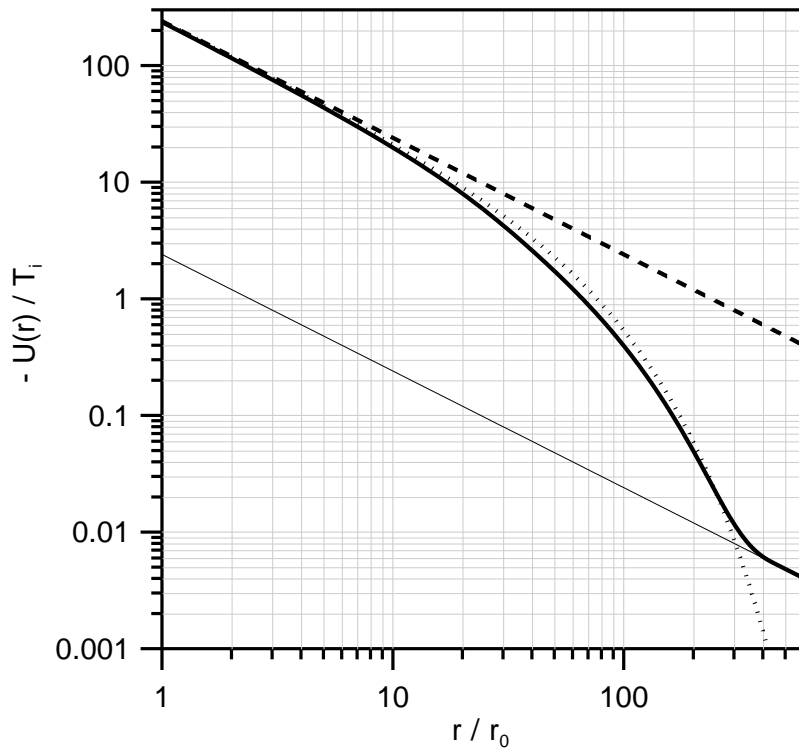


Рис.12. Самосогласованный потенциал (сплошная линия), кулоновский потенциал (пунктир) и потенциал Дебая-Хюкеля (точки).

На рис.12 «кулоновский хвост» экстраполирован до начала координат по 100 последним точкам (тонкая сплошная линия). Как видно, получившийся таким образом кулоновский потенциал соответствует заряду, составляющему $\sim 1\%$ от полного заряда пылевой частицы Q , что совпадает с величиной нескомпенсированного заряда (см. рис.9).

Все вышесказанное справедливо лишь для данной работы, однако, можно предположить, что во всех работах, посвященных расчету потенциала пылевой частицы, воспроизводящих представленный результат имеет место аналогичная численная ошибка. Невозможно полностью избавиться от этой ошибки, но можно ее уменьшить, увеличивая точность вычисления плотности. В любом случае, наблюдаемый перегиб происходит на расстоянии, при котором потенциал уже на два порядка меньше, чем температура ионов, а это значит, что распределение потенциала и плотности заряженных частиц в этой области определяется тепловыми флуктуациями. И наблюдать подобное распределение потенциала в природе уже невозможно.

На рис.13 показана эволюция потенциала от итерации к итерации. Результаты последующих итераций на данном графике сливаются с потенциалом 32-ой итерации. На более ранних итерациях потенциал испытывает скачки, становясь, то больше, то меньше исходного. Так же на первых итерациях наблюдается переэкранирование (на некотором радиусе потенциал меняет знак). Как видно, переход к кулоновскому

потенциалу с каждой итерацией отдалается от начала координат, и останавливается в некоторой точке. При этом распределение потенциала до перегиба практически не меняется.

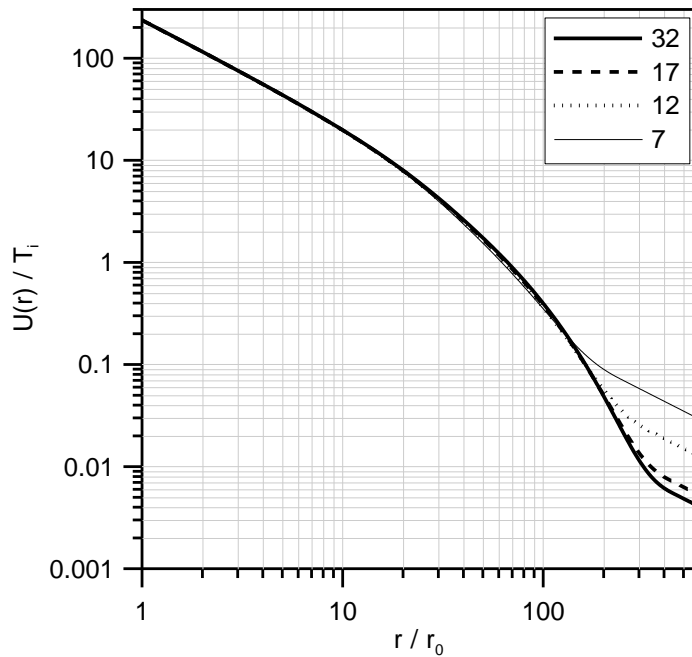


Рис.13. Потенциалы на различных итерациях.

На рис.14 и рис.15 представлены результаты расчетов плотностей захваченных ионов и потенциалы для различных значений λ_D при $Q = 240$. Видно, что с уменьшением λ_D уменьшается высота обоих максимумов.

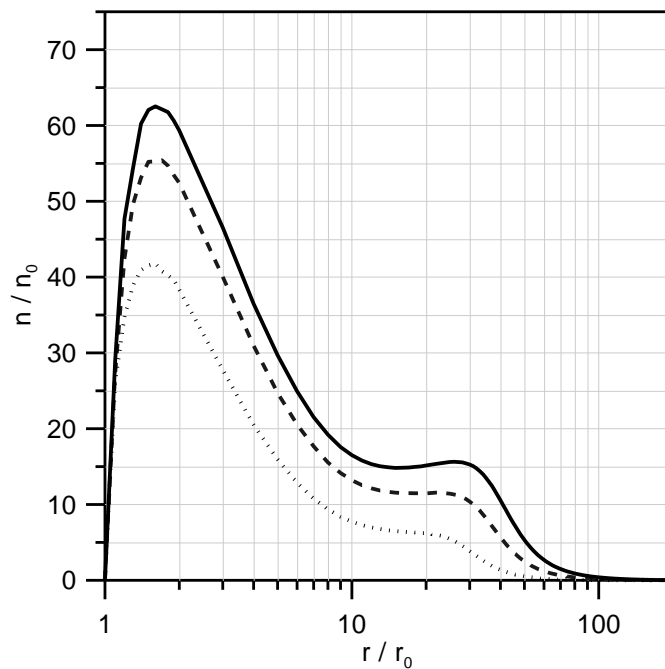


Рис.14. Распределение плотности захваченных ионов для $\lambda_D=99 r_0$ (сплошная линия), $\lambda_D=66 r_0$ (пунктирная) и $\lambda_D=33 r_0$ (точки).

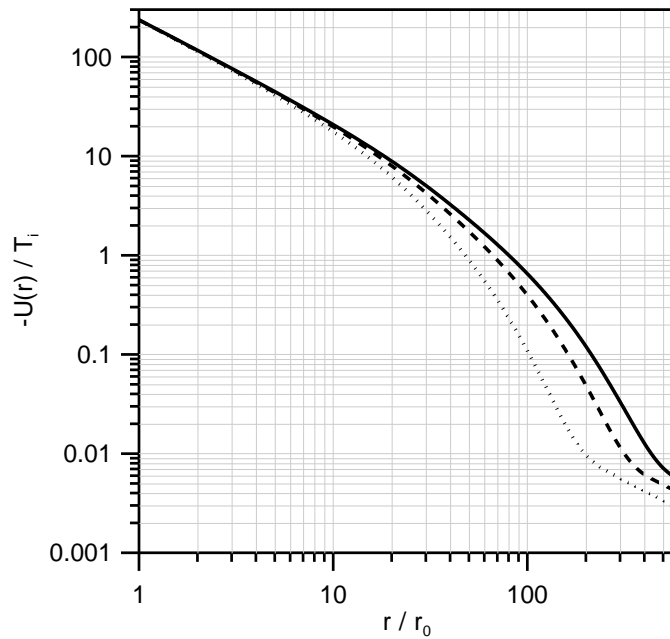


Рис.15. Распределение потенциала при $\lambda_D=99r_0$ (сплошная линия), $\lambda_D=66r_0$ (пунктирная) и $\lambda_D=33r_0$ (точки).

На рис.16 приведены линейные плотности для различных λ_D .

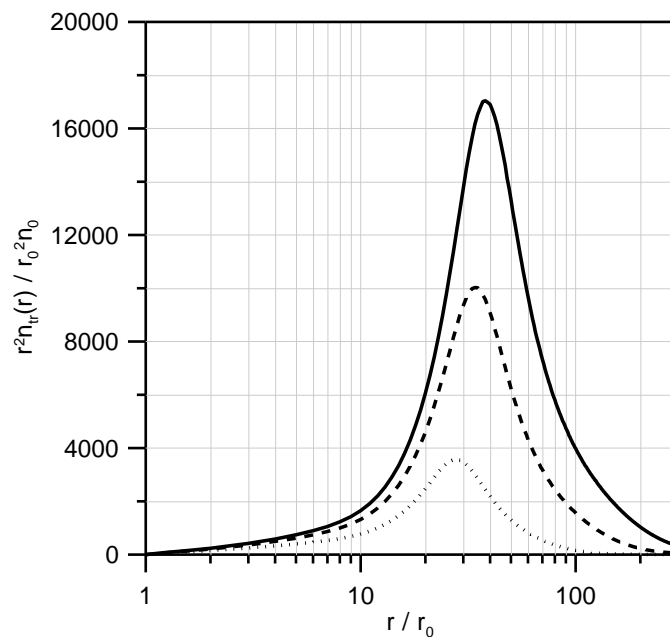


Рис.16. Линейные плотности при различных радиусах Дебая, $\lambda_D=99r_0$ (сплошная), $\lambda_D=66r_0$ (пунктирная) и $\lambda_D=33r_0$ (точки).

Максимум линейной плотности отдалается от пылевой частицы с увеличением λ_D . Расстояние от пылевой частицы до максимума линейной плотности растет приблизительно как $\sqrt[3]{\lambda_D}$.

На *рис.17*. приведен самосогласованный потенциал без учета захваченных ионов. Очевидно, что заряд пылевой частицы экранируется гораздо слабее, если не учитывать захваченные ионы. Видно, что перегиб потенциала находится гораздо дальше от начала координат, что свидетельствует о большей точности расчета плотности свободных ионов. Это и неудивительно, поскольку для расчета плотности свободных ионов производится гораздо меньше математических операций, накапливающих ошибку. Расчет самосогласованного потенциала производится гораздо быстрее, поэтому такие расчеты удобно использовать для отладки программы.

Приведенный расчет производился для $Q=240$, $\lambda_D=66r_0$.

Для того, чтобы лучше увидеть различия между получившимся потенциалом и потенциалом Дебая-Хюкеля, построим график величины $rU(r)$. Если при этом ось ординат взять в логарифмическом масштабе, то потенциал Дебая-Хюкеля будет выглядеть как прямая линия с отрицательным наклоном, обратно пропорциональным радиусу Дебая (*рис.18*), а кулоновский потенциал будет выглядеть как горизонтальная прямая.

Видно, что самосогласованный потенциал с учетом захваченных ионов очень близок к потенциалу Дебая-Хюкеля. Этот факт вызывает удивление, поскольку потенциал Дебая-Хюкеля – очень грубое приближение. При выводе этого потенциала используются предположения, заведомо не выполняющиеся в нашем случае.

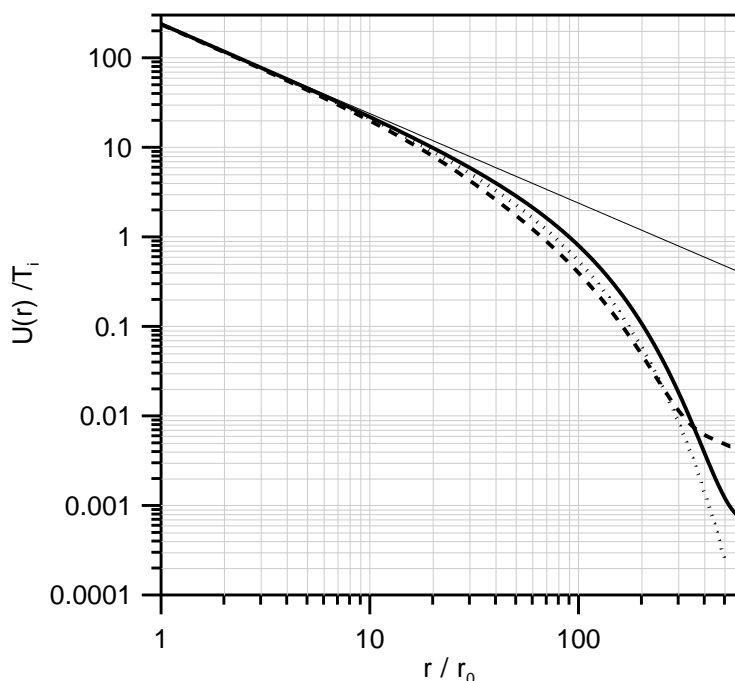


Рис.17. Самосогласованный потенциал без учета захваченных ионов (толстая сплошная линия), с учетом захваченных ионов (пунктир), потенциал Дебая-Хюкеля (точки), кулоновский потенциал (тонкая сплошная линия).

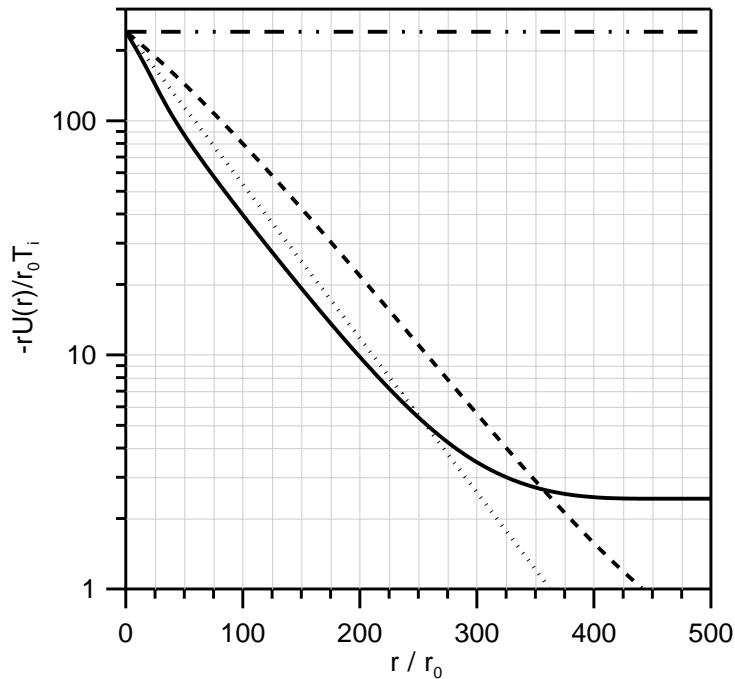


Рис.18. Самосогласованный потенциал с учетом захваченных ионов (сплошная линия), без учета захваченных (пунктир), потенциал Дебая-Хюкеля (точки), кулоновский потенциал (пунктир с точками).

В реальных экспериментах пылевая плазма обычно находится во внешнем электрическом поле. Точный учет влияния этого поля является темой для отдельной работы. В этом случае пропадет сферическая симметрия, вследствие чего размерность уравнений повысится. Наложение поля приведет к деформации облака захваченных ионов и у системы появится дипольный момент. Основываясь на результатах данной работы попробуем грубо оценить величину этого дипольного момента.

Для простоты будем считать, что все захваченные ионы находятся на расстоянии r_{tr} , соответствующем максимуму линейной плотности. Будем также считать, что все захваченные ионы двигаются по круговым орбитам. В отсутствие внешнего поля ионы находятся в минимуме эффективного потенциала. При наложении внешнего электрического поля захваченный ион смещается из минимума эффективного и на него действует возвращающая упругая сила

$$F_{упр} = \frac{d^2 U_{эфф}(r)}{dr^2} b, \quad (40)$$

где b – смещение от положения равновесия,

$$\frac{d^2 U_{эфф}}{dr^2}(r_{tr}) = \frac{d^2 U(r_{tr})}{dr^2} + \frac{3J^2}{mr_{tr}^4}, \quad (41)$$

где J – момент импульса, m – масса иона, $U(r)$ – потенциал Дебая-Хюкеля:

$$U(r) = \frac{Z_{tr} e^2}{r} \exp\left(-\frac{r-r_0}{\lambda_D}\right). \quad (42)$$

Воспользовавшись равенством центробежной и центростремительной сил для иона, имеющего круговую орбиту, получим

$$\frac{j^2}{mr^4} = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr}. \quad (43)$$

В равновесии возвращающая сила равна силе, вызванной действием внешнего электрического поля.

$$F_{\text{выпр}} = eE. \quad (44)$$

Дипольный момент всей системы будет пропорционален внешнему полю

$$d = Z_{tr} e b = \alpha E, \quad (45)$$

где Z_{tr} – количество захваченных ионов α – поляризуемость. Подставляя (41), (43), (44) в (45) получим:

$$\alpha = \frac{Z_{tr}}{Z_d} \frac{r_{tr}^3}{\left(1 - \frac{r_{tr}}{\lambda_D} - \frac{r_{tr}^2}{\lambda_D^2}\right)} \exp\left(\frac{r_{tr}-r_0}{\lambda_D}\right) \quad (46)$$

Обозначим

$$\beta = \frac{\exp\left(\frac{r_{tr}-r_0}{\lambda_D}\right)}{\left(1 + \frac{r_{tr}}{\lambda_D} - \frac{r_{tr}^2}{\lambda_D^2}\right)} \sim 1. \quad (47)$$

Таким образом,

$$\alpha = \frac{Z_{tr}}{Z_d} \beta r_{tr}^3. \quad (48)$$

Из наших расчетов следовало, что при $\lambda_D = 66 r_0$ максимум линейной плотности $r_{tr} \approx 0,5 \lambda_D$, при этом r_{tr} пропорционально $\sqrt[3]{\lambda_D}$. Из этого можно оценить r_{tr} :

$$r_{tr} [\text{см}] \approx 8,17 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\lambda_D}{r_0}\right)^{1/3}. \quad (49)$$

Поэтому для поляризуемости получим:

$$\alpha [\text{см}^3] \approx 5,5 \frac{Z_{tr}}{Z_d} \beta \frac{\lambda_D}{r_0} \quad (50)$$

5. Заключение

Представлена модель образования облака захваченных ионов вблизи изолированной сферической пылевой частицы. Разработана численная схема для решения интегрального уравнения баланса захваченных ионов. В процессе работы был решен ряд проблем, связанных с особенностями в интегралах и высокой размерностью уравнений. Произведен самосогласованный расчет распределений плотностей частиц плазмы и потенциалов для различных параметров плазмы.

Показано, что захваченные ионы вносят существенный вклад в экранирование заряда пылевой частицы. Заряд облака захваченных ионов составляет 40 – 50 % от заряда пылевой частицы. Этим можно объяснить различия между экспериментальными результатами и предсказаниями OML-теории, поскольку в эксперименте можно измерить только разность зарядов пылевой частицы и захваченных ионов.

Обнаружено, что плотность захваченных ионов имеет два максимума: на расстоянии порядка радиуса пылевой частицы и на расстоянии порядка радиуса Дебая. Подобные результаты ранее не публиковались. Этот результат позволяет сделать вывод о том, что представленная численная модель является более общей по сравнению с более ранними [12] и [8].

Методом итераций рассчитан самосогласованный потенциал заряда пылевой частицы в плазме. Этот потенциал близок к потенциалу Дебая-Хюкеля. Сделан вывод о том, что асимптотика потенциала на больших расстояниях r^{-1} , является погрешностью вычислений. Эту ошибку можно уменьшать различными способами, однако устранить полностью, по-видимому, невозможно.

Разработанные численные методы могут быть использованы в будущем для решения более сложных задач.

Поскольку в экспериментах плазма чаще всего находится во внешнем электрическом поле, учет этого поля в расчетах представляется важной задачей. При наложении внешнего поля пропадет сферическая симметрия, вследствие чего возрастет размерность уравнений.

Также разработанные численные методы могут быть применены при решении задачи с конечной частотой столкновений. Интегральные уравнения, к которым сводится уравнение БГК, имеют такие же особенности, что и уравнения, решенные в данной работе.

В будущем можно будет улучшить модель, если учесть неравновесные функции распределения. Учет неравновесных функций распределений может послужить темой для отдельной работы.

6. Список литературы

1. В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. Пылевая плазма. //УФН **174**, 495 (2004)
2. Osamu Ishihara. Complex plasma: dusts in plasma. //Journal of Physics **40** (2007)
3. Robert L. Merlino. Experimental investigations of dusty plasmas. //4th International Conference of the Physics of Dusty Plasmas – Orleans, 17 June 2005.
4. Robert L. Merlino and John A. Goree. Dusty plasmas in the laboratory, industry , and space. //Physics today. July 2004.
5. P.K. Shukla A survey of dusty plasma physics. //Physics of Plasmas **8**, (2001)
6. I. Langmuir, C.G. Found, A.F. Dittmer. A new type of electric discharge: the streamer discharge //Science **60** 392 (1924)
7. J. Goree. Ion trapping by a charged dust grain in a plasma //Physical Review Letters **69**, (1992)
8. Martin Lampe, Rajiv Goswami, Zoltan Sternovsky, Scott Robertson, Valeriy Gavrishchaka, Gurudas Ganguli, Glenn Joyce. Trapped ion effect on shielding, current flow, and charging of a small object in a plasma. //Physics of Plasmas **10**, 1500 (2003)
9. I.H. Hutchinson and L. Patacchini. Computation of the effect of neutral collisions on ion current to floating sphere in a stationary plasma. // Physics of Plasmas **14**, 013505 (2007)
10. A.V. Zobnin, A.D Usachev, O.F. Petrov, V.E. Fortov. Ion current on a small spherical attractive probe in a weakly ionized plasma with ion-neutral collisions (kinetic approach) //Physics of Plasmas **15**, 043705 (2008)
11. J.E. Allen. Probe theory – the orbit motion approach. //Physics Scripts **45** 497 (1992)
12. G.I. Sukhinin, A.V. Fedoseev, S.N. Antipov, O.F. Petrov, V.E. Forotv. The effect of trapped ions and non-equilibrium electron energy distribution function on dust particle charging in gas discharges...
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том I: механика //Главная редакция физико-математической литературы. «Наука» М. 1988.
14. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров //Главная редакция физико-математической литературы. «Наука» М. 1984.