

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное агентство
по образованию**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

физический факультет

**Квалификационная работа на соискание
степени бакалавра
Кафедра физики плазмы**

Сковородин Дмитрий Иванович

**ИСТЕЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ ИЗ ГОФРИРОВАННОЙ ЛОВУШКИ В
КИНЕТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ**

**Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук,
с.н.с. ИЯФ СО РАН
А.Д. Беклемишев**

Новосибирск — 2008 год

Содержание

1	Введение	3
2	Обзор квази-гидродинамической теории. Постановка задачи	4
3	Уточнение коэффициентов переноса	6
4	Решение	6
4.1	Решение локальной задачи	6
4.2	Решение глобальной задачи	10
5	Результаты	11
6	Выводы	14
7	Благодарности	14
A	Приложение	15

1 Введение

Гофрированная ловушка [1] является открытой аксиально-симметричной ловушкой для удержания плотной плазмы ($\lambda \ll L$). Плазма, истекая вдоль гофрированного магнитного поля (рис. 1), проходит через цепь связанных последовательно пробкотронов. Пролетные частицы за счет столкновений захватываются в них. Если длина свободного пробега больше, чем длина гофрировки (режим мелкомасштабной гофрировки), то частицы, многократно отражаясь от пробок, передают импульс магнитному полю. Таким образом, истечение плазмы приобретает диффузионный характер, а время жизни частиц возрастает по сравнению со случаем однородного магнитного поля. На основе гофрированной ловушки были предложены [2] схемы импульсного и квази-стационарного термоядерных реакторов.

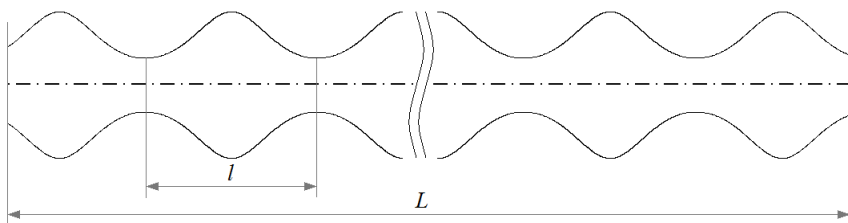


Рис. 1: Силовые линии магнитного поля в гофрированной ловушке.

Существующая теория основана на квази-гидродинамическом подходе. Хотя движение плазмы не подчиняется уравнениям двухжидкостной гидродинамики [3], условие $\lambda \ll L$ позволяет во многих случаях считать функцию распределения близкой к максвелловской. Поэтому течение плазмы может быть описано макроскопическими уравнениями. В работе [4] были получены уравнения на концентрацию и температуру плазмы, а так же вычислены коэффициенты переноса, позволяющие замкнуть эту систему уравнений.

Эксперименты на установке ГОЛ-3 [5] требуют изучения режимов с редкими столкновениями и сильно развитой турбулентностью. Поэтому необходимо развивать кинетические методы описания плазмы в гофрированной ловушке. Переход к кинетическому описанию также связан с рассмотрением стационарного истечения. В отличие от задачи о растекании компактного плазмоида, в этом случае существенную роль играют граничные условия на торцах ловушки. При

этом течение плазмы вблизи торцов не подчиняется квази-гидродинамической модели.

В данной работе будет исследована функция распределения в случае мелкомасштабной гофрировки, когда длина свободного пробега много больше, чем длина гофрировки магнитного поля.

Во второй главе сделан обзор существующей теории и конкретизирована постановка задачи для данной работы. Третья глава посвящена уточнению коэффициентов переноса в квази-гидродинамической теории. В четвертой главе описано решение задачи в кинетическом режиме. В пятой главе представлены результаты решения. В шестой главе сделаны выводы из проделанной работы.

2 Обзор квази-гидродинамической теории. Постановка задачи

Квази-гидродинамическая теория [4] основана на уравнениях, которые представляют собой законы сохранения вещества и энергии. Они получены интегрированием кинетического уравнения по пространству скоростей и усреднением вдоль длины ячейки гофрировки с весом $1/B(s)$.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{I} \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial nT}{\partial t} + \frac{2}{3I} \frac{\partial Q}{\partial s} \mp \frac{2eB_{max}}{3Il} \int_{s_1}^{s_2} \frac{E_{\parallel}(s')q(s')}{B(s')} ds' = 0, \quad (2)$$

где n — концентрация, T — температура, q — поток частиц, Q — поток энергии, а $I = \frac{B_{max}}{l} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{B(s')}$

Для того, чтобы замкнуть систему уравнений (1, 2), были вычислены потоки вещества и энергии. Они определяются поправкой к максвелловской функции распределения, которая найдена при помощи линеаризованного кинетического уравнения. При этом сделаны следующие предположения:

- Функция распределения близка к стационарной, т.е. $\frac{\partial F}{\partial t} \approx 0$.
- При рассмотрении одной ячейки гофрировки на поправку к функции распределения налагаются периодические граничные условия.

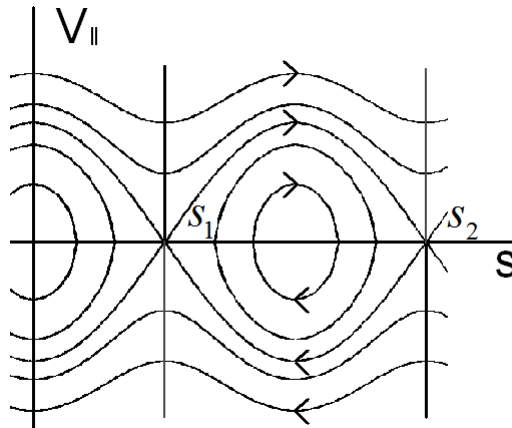


Рис. 2: Фазовый портрет для частиц с определенным μ .

В то же время физически осмысленной постановкой граничных условий для стационарной задачи является следующая: необходимо задать распределение частиц, влетающих в ячейку. В отсутствие столкновений значение функции распределения переносится вдоль траекторий частиц на фазовой плоскости (рис. 2). Поэтому можно выделить в функции распределения часть, появляющуюся в меру столкновений, следующим образом:

$$F^+(s, \epsilon, \mu) = F^+(s_1, \epsilon, \mu) + f^+(s, \epsilon, \mu),$$

где s – координата вдоль силовой линии магнитного поля, ϵ – кинетическая энергия, $\mu = \frac{mv^2}{2B}$ – магнитный момент частицы, а "+" указывает на знак продольной скорости.

Используя тот факт, что значение поправки на выходе из ячейки равно изменению функции F на длине ячейки, и переходя к пределу $L/l \rightarrow \infty$ (количество ячеек стремится к бесконечности), получаем «глобальное» уравнение, описывающее изменение F вдоль всей ловушки:

$$\frac{f(s_2)}{l} = \frac{\Delta F}{l} \rightarrow \frac{1}{L} \frac{dF}{dz}, \quad (3)$$

где $z = s/L$ – безразмерная координата. Если поправка вычислена в линейном приближении по l/λ , то параметр l выпадает из уравнения (3), поэтому в этой модели нельзя исследовать режим $l \sim \lambda$.

Таким образом, здесь и далее речь идет о вычислении стационарной функции распределения в случае мелкомасштабной гофрировки $\lambda \gg l$. Решение задачи можно разделить на две части:

- Локальная задача о нахождении функции распределения в одной ячейке. Ее решение позволит конкретизировать вид уравнения (3).
- Решение глобального уравнения.

3 Уточнение коэффициентов переноса

В квази-гидродинамической теории поток частиц, входящий в уравнение непрерывности (1), связывается при помощи коэффициентов переноса с градиентами концентрации, температуры и продольным электрическим полем. Рассмотрим случай, в котором поток определяется градиентом концентрации:

$$q = R(T) \cdot \beta \frac{\partial}{\partial z} \ln(n), \quad (4)$$

где q — поток частиц, $R(T)$ — некоторый размерный коэффициент, а β — безразмерный коэффициент диффузии. Следуя рассуждениям, изложенным в работе [4] можно получить коэффициент β :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^\infty dx \cdot x^9 e^{-x^2} \cdot \left(x e^{-x^2} + (2x^2 - 1) \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^{-1} \quad (5)$$

Этот интеграл может быть оценен численно: $\beta \approx 0,26$.

В то же время в работе [4] на странице 631 приведена формула, которая отличается от формулы (5) в $\sqrt{\pi}$ раз: $\beta_{Mirnov} = \beta/\sqrt{\pi}$. Там же приведено численное значение коэффициента, которое отличается от даваемого обеими формулами: $0,455 \approx \sqrt{\pi} \cdot 0,26$.

Далее при сравнении результатов кинетической и квази-гидродинамической моделей будет использоваться значение $0,26$.

4 Решение

4.1 Решение локальной задачи

Будем считать, что магнитное поле достаточно велико, чтобы движение частиц можно было описывать в дрейфовом приближении. Так же предположим аксиальную симметрию плазмы, которая позволяет не учитывать азимутальные

дрейфы. Кроме того, будем считать, что можно пренебречь амбиполярным потенциалом. Это можно делать при вычислении функции распределения ионов в случае «холодных» электронов $T_e \ll T_i$, что соответствует ситуации в ГОЛ-3 на стадии распада плазмы. Тогда функция распределения подчиняется стационарному кинетическому уравнению в дрейфовом приближении:

$$v_{\parallel} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)_{\epsilon, \mu} = St(F), \quad (6)$$

где s – координата вдоль силовой линии магнитного поля, ϵ – кинетическая энергия, $\mu = \frac{mv^2}{2B}$ – магнитный момент частицы, а $St(F)$ – интеграл столкновений.

Считая, что заданы значения функции распределения на границах «вход 1» и «вход 2» (рис. 3), найдем ее значения на границах «выход 1» и «выход 2».

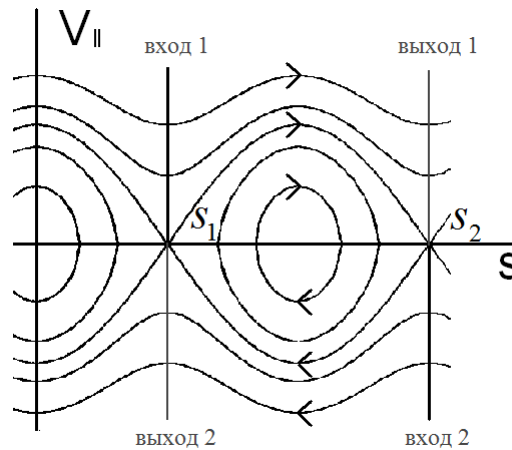


Рис. 3: Фазовый портрет для частиц с определенным μ .

Кинетическое уравнение (6) можно линеаризовать по малости параметра l/λ (в других терминах: по малости частоты столкновений). Как было отмечено выше, разложение функции распределения по этому параметру выглядит следующим образом: переносимое без изменений вдоль траекторий частиц граничное условие (нулевой порядок) и малая поправка, появляющаяся в силу столкновений (первый порядок). Так как интеграл столкновений пропорционален частоте столкновений, в нем нужно удерживать только функцию нулевого приближения. Поэтому линеаризованное кинетическое уравнение выглядит следующим образом:

$$v_{\parallel} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\epsilon, \mu} = St(F_0) \quad (7)$$

Так как функция нулевого приближения сохраняется вдоль траекторий частиц $(\frac{\partial F_0}{\partial s})_{\epsilon, \mu}$, уравнение (7) содержит в левой части только производную поправки f . Поэтому оно решается интегрированием по s при постоянных ϵ, μ :

$$f = \int_{s_1}^s \frac{ds}{v_{\parallel}} \cdot St(F_0) \quad (8)$$

Будем считать, что пробочное отношение велико $k \gg 1$. Это позволяет использовать существенно упрощенный [4, 6] интеграл столкновений. Суть упрощений состоит в следующем:

- В интеграле столкновений можно пренебречь диффузией по энергии, так как при $k \gg 1$ член описывающий диффузию по питч-углу содержит большой параметр $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \propto I$ ($I = k$ для точечных пробок).
- Условие $k \gg 1$ позволяет использовать простую гипотезу относительно функции распределения запертых частиц. Вне пробок преобладают запертые частицы, которые долго живут в отдельных пробкотронах ($\tau \sim \omega_b^{-1} \cdot \lambda/l$) и имеют, следовательно, функцию распределения близкую к максвелловской. Так как область запертых частиц преобладает в пространстве скоростей, именно они вносят наибольший вклад в потенциалы Розенблюта.

В этих предположениях интеграл столкновений выглядит следующим образом:

$$St(F) = C(\epsilon) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} F, \quad (9)$$

где коэффициент $C(\epsilon) \sim \nu_c$ определен по максвелловской функции распределения (запертых частиц). Ее параметры могут быть найдены при помощи сшивки с функцией распределения пролетных частиц на границе «пролетные-запертые».

Функции распределения пролетных частиц, летящих в разные стороны (F^+ и F^-), не совпадают и на границах 1 и 2 (рис. 4) имеют различные значения. Скачок между максвелловской функцией и функциями F^+ и F^- сглаживается поправками следующего порядка по l/λ .

Однако следует учесть, что граничные условия для частиц, летящих «слева» и «справа», не являются независимыми. На самом деле, граничные условия ставятся не для каждого пробкотрона в отдельности, а для всей ловушки на ее

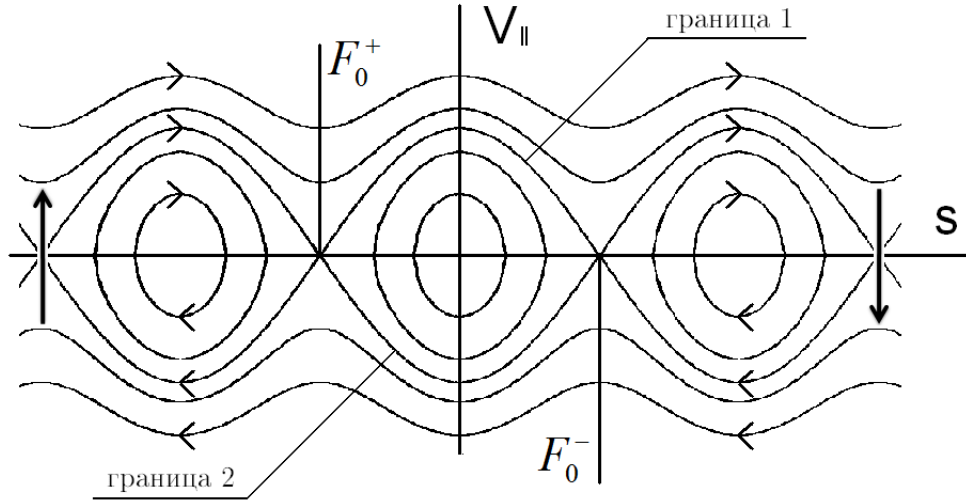


Рис. 4: Фазовый портрет для частиц с определенным μ . Граничные условия F_0^+ и F_0^- не являются независимыми, так как взаимодействие происходит во всех ячейках гофрировки.

торцах. Граничные условия для локальной задачи определяются в рамках самосогласованной глобальной задачи, так как взаимодействие происходит во всех ячейках гофрировки одновременно (рис. 4). В наших предположениях $L \gg \lambda \gg l$ скачок является малой величиной, следовательно, при сшивке можно не учитывать поправки к функциям нулевого приближения. Таким образом, параметры n, T максвелловской функции определяются при помощи сшивки со сглаженной функцией распределения пролетных частиц, т.е

$$n_{tr} = \int F_p d^3v$$

$$T_{tr} = \int F_p \frac{2\epsilon}{3} d^3v$$

Используя упрощенный интеграл столкновений (9), можно вычислить поправку (8). Для этого перейдем к переменным, являющимся интегралами движения: $\epsilon, y = \text{sign}(v_{||}) \cos^2 \theta_0$, где θ_0 — питч-угол частицы в максимуме магнитного поля, нумерующий ее траекторию:

$$f(s) = \frac{4l \cdot C(\epsilon)}{v} \frac{\partial}{\partial y} D(y) \frac{\partial}{\partial y} F_0, \quad (10)$$

где коэффициент $D(y)$:

$$D(y) = (1 - |y|) \int_{s_1}^s \frac{ds}{l} \cdot \sqrt{\frac{B_{max}}{B(s)}} \sqrt{\frac{B_{max}}{B(s)} - (1 - |y|)} \quad (11)$$

4.2 Решение глобальной задачи

Используя решение локальной задачи (10), конкретизируем правую часть глобального уравнения (3):

$$\pm \frac{\partial F}{\partial z} = A(\epsilon, z) \frac{\partial}{\partial y} D(y) \frac{\partial}{\partial y} F, \quad (12)$$

где $z = s/L$ — безразмерная координата, ϵ — кинетическая энергия, а $y = \text{sign}(v_{\parallel}) \cos^2 \theta_0$ — угловая переменная в пространстве скоростей.

Левая часть уравнения содержит производную по безразмерной координате, а правая — дифференциальный оператор второго порядка в пространстве скоростей. То есть, уравнение имеет структуру стационарного кинетического уравнения с нелинейным столкновительным членом в правой части.

Коэффициент $A(\epsilon, z)$ с точностью до постоянного множителя равен $C(\epsilon)$ в интеграле столкновений (9). В его определение входят концентрация и температура плазмы, что и делает уравнение нелинейным. Фактически, коэффициент A пропорционален отношению длины ловушки к длине свободного пробега частиц L/λ . Его точный вид приведен в Приложении.

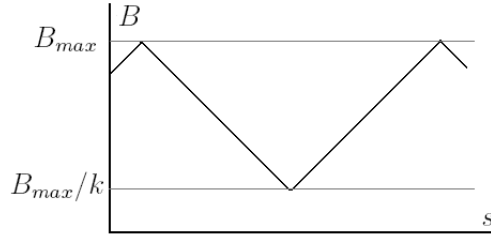


Рис. 5: Кусочно линейный профиль магнитного поля.

Вид коэффициента $D(y)$ зависит от профиля магнитного поля. При $k \gg 1$ он имеет простую асимптотику $D(y) \stackrel{k \rightarrow \infty}{\propto} (1 - |y|) \cdot I$, где $I = \frac{B_{max}}{l} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds'}{B(s')}$. Для кусочно-линейного профиля магнитного поля (рис. 5) $D(y)$ приведен в Приложении и показан на рисунке 6.

Решение нелинейного уравнения (12) можно найти при помощи релаксационной схемы. Для этого введем в него производную по фиктивному времени τ :

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} \pm \frac{\partial F}{\partial z} = A(\epsilon, z) \frac{\partial}{\partial y} D(y) \frac{\partial}{\partial y} F \quad (13)$$

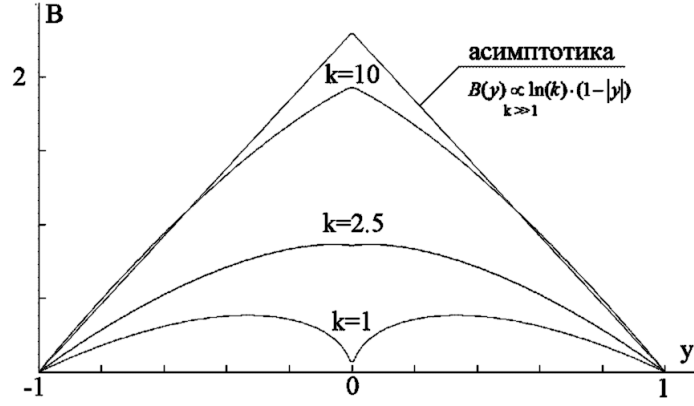


Рис. 6: Коэффициент $D(y)$ в случае кусочно линейного профиля магнитного поля для k равного 1, 2,5 и 10.

При условии сходимости схемы, решение уравнения (13) стремится при $\tau \rightarrow \infty$ к решению стационарного уравнения (12). Так как уравнение (13) имеет диффузионный член, его численное интегрирование по фиктивному времени может быть произведено при помощи неявной схемы [7]:

$$\frac{F(\tau_{n+1}) - F(\tau_n)}{\Delta\tau} \pm \frac{\delta F(\tau_n)}{\delta z} = A(\epsilon, z, \tau_n) \frac{\delta}{\delta y} D(y) \frac{\delta}{\delta y} F(\tau_{n+1}), \quad (14)$$

где $\frac{\delta}{\delta z}$ и $\frac{\delta}{\delta y}$ разностные производные. Схема (14) является условно устойчивой при $\Delta\tau < \Delta y^2$.

Численная схема (14) была реализована в среде MATLAB. Расчеты производились на сетке с 30-ю шагами по каждой переменной: z , ϵ и y . Выполнялось 250 шагов по фиктивному времени τ , при этом изменение функции распределения на первом шаге было равно $\Delta F(\tau_1) \sim F/3$, а на последнем — $\Delta F(\tau_{250}) \sim F \cdot 10^{-4}$. Измельчение сетки в 1,5 раза по каждой переменной приводило к изменению потоков в системе на величину порядка 5%. Все это позволяет сделать заключение о хорошей сходимости численной схемы.

5 Результаты

На рисунке 7 изображена функция распределения в левой, центральной и правой пробках (т.е. на рисунке нет области запертых частиц) для задачи с градиентом плотности. Слева в ловушку влетают (область с $v_{\parallel} > 0$ при $s = 0$) частицы с максвелловским распределением с концентрацией $2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и тем-

пературой 1000эВ, а справа (область с $v_{\parallel} < 0$ при $s = L$) – с в два раза меньшей концентрацией и такой же температурой.

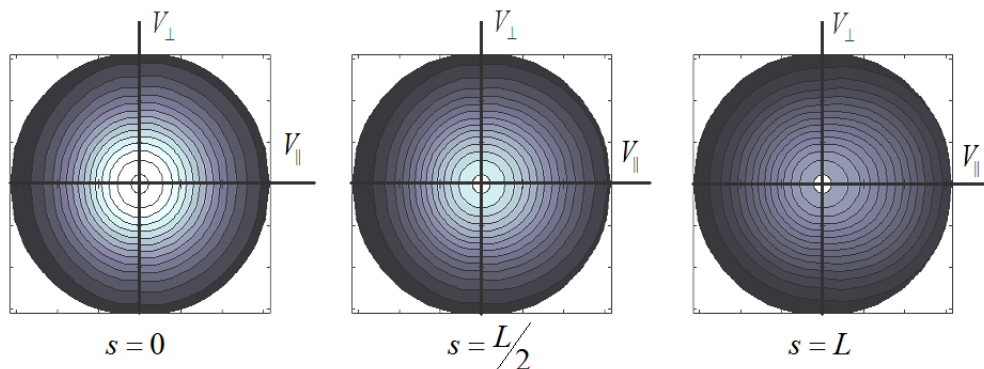


Рис. 7: Функция распределения в левой, центральной и правой пробках в задаче о градиенте плотности (переменные v_{\parallel} , v_{\perp} измеряются в условных единицах; $k = 10$).

Видно, что функция распределения близка к максвелловской, но имеет токнесущую составляющую. При этом она имеет различный характер в центральной части ловушки и на торцах. Т.е. истечение вблизи торцов носит не диффузионный характер.

На рисунке 8 изображено решение задачи об истечении в вакуум. Слева в ловушку влетают частицы с максвелловским распределением с концентрацией 10^{15}см^{-3} и температурой 1000эВ, а справа плазма истекает в вакуум, то есть частицы только вылетают из ловушки. Такая постановка задачи близка к схеме гипотетического термоядерного реактора. В нем плазма создается и нагревается в центральном пробкотроне, а участки гофрированного магнитного поля служат для подавления потока вдоль магнитного поля.

В приближении постоянной температуры квази-гидродинамическое уравнение (1) с потоком в виде (4) может быть решено точно. Используя в качестве граничных условий концентрации на торцах ловушки, полученные при решении самосогласованной глобальной задачи, найдем поток, который предсказывает квази-гидродинамическая теория:

$$q = R(T) \cdot \beta \cdot \ln(n_1/n_2)$$

На рисунке 9 представлено сравнение результатов кинетической и квази-гидродинамической

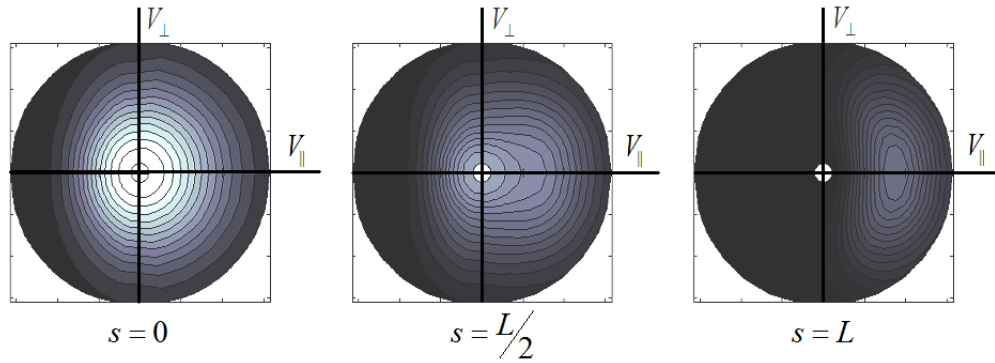


Рис. 8: Функция распределения в левой, центральной и правой пробках в задаче об истечении в вакуум (переменные v_{\parallel} , v_{\perp} измеряются в условных единицах; $k = 10$).

теорий для задачи об истечении в вакуум в зависимости от отношения длины ловушки к эффективной длине свободного пробега. Очевидно, что при постоянном k поток зависит от отношения параметров L/λ , так как они входят в уравнение (12) именно в такой комбинации. Однако при больших k можно воспользоваться асимптотикой коэффициента $D(y) \propto (1-|y|) \cdot I$ и включить в этот параметр зависимость от k . В качестве меры потока выбрана безразмерная величина $q/(n \cdot V_T)$, где $V_T = \sqrt{2\pi T/m}$



Рис. 9: Зависимость средней направленной скорости течения, деленной на тепловую, от отношения длины ловушки к эффективной длине свободного пробега $(L/\lambda)I$ при истечении в вакуум. ($T = 1000\text{эВ}$, $k = 10$)

В случае редких столкновений (левая часть рисунка) результаты излагаемой в данной работе теории выходят на разумный предел: частицы пролетают

через ловушку с тепловой скоростью не рассеиваясь. При $(L/\lambda)I \sim 1$ происходит переход к режиму многопробочного удержания. В случае частых столкновений, когда $L \gg \lambda$, обе теории выходят на одну асимптотику. Отличие порядка 10% может быть связано с тем, что режим истечения на торце ловушки не является диффузионным.

6 Выводы

- Построена численная модель истечения плазмы из гофрированной ловушки в кинетическом режиме.
- Модель правильно описывает переход от бесстолкновительного вылета частиц к режиму мелкомасштабной гофрировки.
- Уточнен численный коэффициент в квази-гидродинамической теории.

Дальнейшее развитие работы предполагает вычисление следующих поправок по параметрам l/λ и $1/k$. Это позволит исследовать переход к режиму оптимального удержания $l \sim \lambda$, а также провести расчеты для реальных магнитных систем, в которых условие $k \gg 1$ не выполняется.

7 Благодарности

Автор выражает благодарность Котельникову И. А. за помощь в поиске информации, а также Цидулко Ю. А. за заданные им вопросы.

А Приложение

В приложении приведены формулы для коэффициентов А и В в уравнении (12).

Коэффициент $C(\epsilon)$ в интеграле столкновений равен $\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2 \nu \alpha(v)$. Функции $\nu(v)$ и $\alpha(v)$ приведены в работе [4] на странице 630. Умножив $C(\epsilon)$ на $4L/v$, получаем коэффициент $A(\epsilon)$. После элементарных преобразований выражаем его через табличные функции:

$$A(\epsilon, s) = \frac{2\pi L \Lambda e^4 n}{\epsilon^2} \left[\left(1 - \frac{T}{2\epsilon}\right) \text{Erf}(\sqrt{\epsilon/T}) + \sqrt{\frac{T}{\pi\epsilon}} e^{-\epsilon/T} \right]$$

Подставляя в формулу (11) кусочно линейный профиль магнитного поля $B(s)$ и интегрируя по s , получаем коэффициент $D(y)$:

$$D = \frac{2x \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x/k} \right) + x \ln \left(\frac{(1+\sqrt{1-x/k})(1-\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x/k})(1+\sqrt{1-x})} \right)}{1 - 1/k} \stackrel{k \rightarrow \infty}{\propto} x \ln(k),$$

где $x = 1 - |y|$

Список литературы

- [1] *Буджер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.* Влияние гофрировки магнитного поля на расширение и остывание плотной плазмы// Письма в ЖЭТФ. - 1971. - Т. 14. - С. 320.
- [2] *Рютов Д.Д.* Открытые ловушки// Успехи физ. наук. 1988 - Т. 154. - С. 565.
- [3] *Брагинский С.И.* Вопросы теории плазмы// М: Атомиздат, 1963, вып. 1, с. 183.
- [4] *Mirnov V.V., Rytov D.D.* Gas-Dynamic Description of a Plasma in a Corrugated Magnetic Field// Nuclear Fusion, 12, 1972.
- [5] *Burdakov A.V., Ivanov A.A., Kruglyakov E.P.* Axially Symmetric Magnetic Mirror Traps: Status and Prospects// The sixth International Conference "Open Magnetic Systems for Plasma Confinement". Transactions of Fusion Science and Technology, v. 51, n. 2T, p. 17.
- [6] *Mirnov V.V.* Skin Effect in a Corrugated Magnetic Field// Nuclear Fusion, 11, 1971.
- [7] *Killeen J. et. al.* Computational methods for Kinetic Models of Magnetically confined plasmas// Springer ser. in comp. phys. 1986.