

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра Физики Плазмы

---

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

Аюпова Дмитрия Александровича

---

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Динамика ионов в винтовой многопробочной системе

---

---

**«К защите допущена»**

Заведующий кафедрой

ученая степень, звание

должность, место работы

...../  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2020 г.

**Научный руководитель**

ученая степень, звание

должность, место работы

...../  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2020 г.

Дата защиты: «.....».....2020 г.

Новосибирск, 2020

*Содержание* 2

## **Содержание**

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Структура магнитного и электрического полей</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Гамильтониан</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>14</b>

# 1 Введение

Спиральная магнитная открытая ловушка (СМОЛа) является собой реализацию перспективного метода удержания плазмы, предложенного в работе [1]. В настоящее время существуют МГД-модели, предсказывающие экспоненциальное подавление (с увеличением длины системы) продольного потока плазмы, текущего через винтовую пробку. Результаты экспериментов [2, 3, 4] подтверждают подавление потока плазмы. Одновременно с простотой основной своей идеи, формальное описание метода приводит к полям сложной конфигурации и сложности поиска оптимальных режимов работы установки. Ввиду новизны концепции, в настоящее время нет понимания многих аспектов теории, в частности, динамики частиц в электромагнитном поле ловушки.

СМОЛа представляет собой открытую ловушку, в рабочее пространство которой дополнительно к сильному продольному магнитному полю введено слабое спиральное магнитное поле (рис. 1). В плазмоприёмнике ловушки стоят концентрические поверхности, находящиеся под разными потенциалами (рис. 2). Ввиду того, что в сильном магнитном поле продольная проводимость плазмы много больше поперечной, таким образом можно добиться установления в установке радиального электрического поля. Предполагается, что скрещенные электрическое и магнитные поля приведут к установлению электрического дрейфа (с направлением одинаковым для частиц любого знака). На каждой из силовых линий магнитного поля будут максимумы и минимумы величин магнитного поля. В существующей теории предполагается, что магнитный момент  $\mu \approx \text{const}$ , из чего полагается наличие запертых частиц. Частицы с малой продольной скоростью, и, значит, запертые между максимумами поля, из-за электрического дрейфа будут заперты между максимумами магнитного поля и будут относиться от плазмоприёмника.

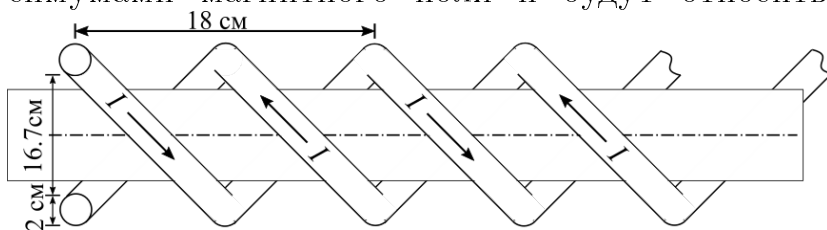


Рис. 1. Схематическое изображение спиральной обмотки с текущими по ней токами.

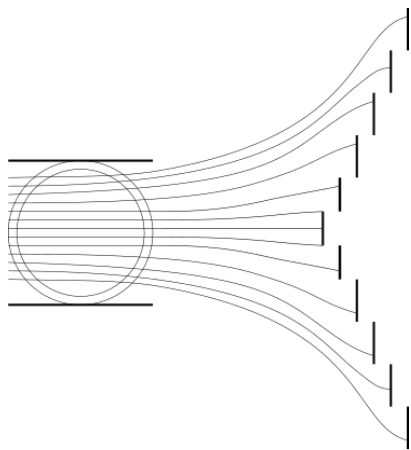


Рис. 2. Справа —секционированные пластины плазмopриёмника, слева схематически обозначен участок винтовой пробки. Схематически показаны силовые магнитные линии, выходящие из установки в расширитель

Для развития теории важно найти условия, когда запертые частицы существуют и найти условия, когда они существуют.

Настоящая работа посвящена изучению структуры полей в установке и динамики частиц в винтовой ловушке методами гамильтоновой механики, что позволяет явно учесть спиральную симметрию задачи, без учёта коллективных явлений, кулоновских столкновений и диамагнетизма плазмы.

## 2 Структура магнитного и электрического полей

В установке СМОЛа спиральное магнитное поле создаётся двузаходной спиралью, с различным направлением тока, с шагом  $\frac{2\pi}{k} = 18$  см, радиусом (удалённостью от оси спирали)  $R = 8.35$  см и толщиной 2 см.

Введём цилиндрические координаты: радиус  $r$ , угол  $\theta$ , и проекцию на ось установки  $z$ . Определим геликальную переменную  $\chi = \theta - kz$ .

В рамках нашей модели мы будем считать, что спиральное магнитное поле создаётся парой бесконечных тонких проводников в форме винтовой линии, все точки которых равноудалены от оси  $OZ$  на расстояние  $R$ .

Пусть векторный потенциал двузаходной спирали — вектор в цилиндрических координатах  $(A_r \mathbf{e}_r + A'_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z)$ , а полный векторный потенциал в рабочем пространстве установки, учитывающий ещё и сильное магнитное поле  $B$ , направленное вдоль оси  $OZ$ , есть вектор  $(A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z)$ , где  $A_\theta = A'_\theta + \frac{rB}{2}$ . При этом все указанные компоненты векторов, как и установка, ими описываемая, имеют винтовую симметрию, т.е.  $\mathbf{A}(r, \theta, z) = \mathbf{A}(r, \chi)$ .

Обратим внимание, что все магнитные силовые линии лежат на поверхности  $\psi(krA_\theta + A_z) = \text{const}$ , т.к.  $\nabla(krA_\theta + A_z) \cdot [\nabla \times \mathbf{A}] = 0$ . Для краткости введём функцию  $h(r, \chi) = krA_\theta + A_z$ . Следует отметить, что при  $B \gg \frac{Ik}{c}$ , где  $I$  — ток, текущий по спиральной обмотке,  $h = \frac{r^2 \cdot kB}{2} + O\left(\frac{Ikr}{c}\right)$ , т.е. это условие описывает систему вложенных поверхностей, близких к цилиндрическим. Электрическое поле в рабочем пространстве, создаваемое концентрическими поверхностями в плазмоприёмнике; считаем, что электрический потенциал постоянен на каждой поверхности  $h = \text{const}$ , тогда  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(h)$ . Для моделирования динамики частиц из всего многообразия функций  $\varphi(h)$  выбираем простейшую:  $\varphi(h) = \frac{E_0 h}{B}$ , которая, при условии  $I = 0$ , описывает электрическое поле  $\mathbf{E} = E_0 kr \cdot \mathbf{e}_r$ ,  $E_0 = \text{const}$ . Обратим внимание, что данное электрическое поле в случае  $I = 0$  является дивергентным:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 2E_0 k$  и совпадает с полем однородного заряженного столба плазмы.

Рассмотрим скалярный потенциал этого магнитного поля. Пусть  $\nabla \times \mathbf{A}(r, \chi) = \nabla\Psi(r, \chi, z)$ . В отсутствие токов в области  $r < R$  и при условии

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  будет  $\Delta \Psi = 0$ . Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах будем искать в виде  $\Psi(r, \chi, z) = R(r)Z(\theta - kz) + Bz$ .

$$Z(\chi) \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + \frac{Z(\chi)}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} R(r) + \left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right) R(r) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} Z(\chi) = 0.$$

Разделив переменные и потребовав соблюдения периодичности  $\nabla \Psi(r, \chi) = \nabla \Psi(r, \chi + 2\pi)$  получим  $Z(\chi) = \exp(i\nu\chi)$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}$ , а потребовав конечности градиента потенциала, а значит и конечности магнитного поля, получим, что

$$\Psi_{int}(r, \chi, z) = Bz + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} C_\nu I_\nu(|\nu|kr) e^{i\nu\chi} + C_0 \ln r, \quad C_\nu \in \mathbb{C}, \quad r < R, \quad (1)$$

$$\Psi_{out}(r, \chi, z) = Bz + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} D_\nu K_\nu(|\nu|kr) e^{i\nu\chi} + D_0 \ln r, \quad D_\nu \in \mathbb{C}, \quad r > R. \quad (2)$$

Члены, содержащие логарифм радиуса соответствуют потенциалу тока, текущему вдоль оси  $z$ . По нашему предположению, ток по системе не течёт, потому  $C_0 = D_0 = 0$ .

Следует отметить, что разложение в ряд Фурье скалярного и векторного потенциалов в системе с винтовыми обмотками, рассматривалось также в [8, §5]. Векторный потенциал приведённый в той форме, что даётся в этой книге, не удобен для нашего анализа динамики частиц.

Разложим поверхностный ток, текущий по спиральной обмотке в ряд Фурье. В приведённой ниже формуле  $G_{2n+1} \in \mathbb{R}$  суть коэффициенты ряда Фурье. Для нашей системы проводников чётные гармоники в разложении отсутствуют.

$$\mathbf{j}(\chi) = (kR\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z) \cdot \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} G_{2n+1} \cos((2n+1)\chi) \quad (3)$$

Сошьём (1), (2) и (3) на цилиндрической поверхности  $r = R$ :

$$\begin{cases} \nabla(\Psi_{in} - \Psi_{out}) \times \mathbf{e}_r \Big|_{r=R} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla(\Psi_{in} - \Psi_{out}) \cdot \mathbf{e}_r \Big|_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Распишем  $\nabla(\Psi_{in} - \Psi_{out})\Big|_{r=R}$  по выражениям из (1), (2):

$$\begin{aligned} \nabla(\Psi_{in} - \Psi_{out})\Big|_{r=R} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{i\nu\chi} \left( \mathbf{e}_r k |\nu| \left( C_\nu I'_\nu(|\nu| kR) - D_\nu K'_\nu(|\nu| kR) \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{e}_\theta - kR\mathbf{e}_z) \frac{i\nu}{R} \left( C_\nu I_\nu(|\nu| kR) - D_\nu K_\nu(|\nu| kR) \right) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\nu| \left( C_\nu I'_\nu(|\nu| kR) - D_\nu K'_\nu(|\nu| kR) \right) e^{i\nu\chi} = 0, \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{c} \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} G_{2n+1} \left( e^{-i(2n+1)\chi} + e^{i(2n+1)\chi} \right) &= \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \frac{\nu}{R} e^{i\nu\chi} \left( C_\nu I_\nu(|\nu| kR) - D_\nu K_\nu(|\nu| kR) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) можно однозначно заключить, что

$$C_\nu = -C_{-\nu} = \frac{2\pi i R G_\nu}{\nu c} \cdot \frac{K'_\nu(\nu kR)}{I_\nu(\nu kR) K'_\nu(\nu kR) - I'_\nu(\nu kR) K_\nu(\nu kR)}, \quad (8)$$

$$D_\nu = -D_{-\nu} = \frac{2\pi i R G_\nu}{\nu c} \cdot \frac{I'_\nu(\nu kR)}{I_\nu(\nu kR) K'_\nu(\nu kR) - I'_\nu(\nu kR) K_\nu(\nu kR)}, \quad (9)$$

где  $\nu \in \mathbb{N}$ .

Вернёмся к модели нашей задачи. Пусть по каждому из двух тонких проводников течёт ток  $I_0$ , Поверхностный ток по спиральной обмотке будет описываться выражением

$$\mathbf{j}(\chi) = (kR\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z) \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\delta(\chi - 2m\pi) - \delta(\chi - (2m+1)\pi)) \cdot \frac{I_0}{2R} \quad (10)$$

Эту разность дельта-функций можно разложить в ряд Фурье:

$$\mathbf{j}(\chi) = (kR\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z) \cdot \frac{\pi I_0}{R} \sum_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \cos((2m+1)\chi) \quad (11)$$

Теперь, введём ещё одно упрощение: будем рассматривать магнитное поле вблизи оси системы ( $kr \ll 1$ ) и исключим из рассмотрения все гармоники из (11) кроме первой.

Действительно, покажем стремительное убывание коэффициентов  $C_\nu$  с ростом  $\nu$ . Для любого  $n$ ,  $G_{2n+1} = \pi I_0/R$ . Тогда  $C_\nu$  будут иметь следующий вид:

$$C_\nu = -C_{-\nu} = \frac{2\pi^2 i I_0}{\nu c} \cdot \frac{K'_\nu(\nu k R)}{I'_\nu(\nu k R) K'_\nu(\nu k R) - I_\nu(\nu k R) K_\nu(\nu k R)}, \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим случай  $kR \approx 2.91$ , что соответствует условиям установки СМОЛА. Пользуясь асимптотическими разложениями модифицированных функций Бесселя [6], можно получить асимптотический вид  $C_\nu$  при больших  $\nu$ :

$$C_\nu \approx \frac{\pi^2 i I_0 \sqrt{2kR}}{\sqrt{\nu} c} \exp(-\nu k R). \quad (13)$$

То есть при больших  $\nu$ , каждый коэффициент  $C_\nu$  меньше предыдущего.  $C_{\nu-1}$  в, по меньшей мере  $e^{2.91} \approx 18.36$  раза.

Численно можно найти первые 8 коэффициентов  $C_\nu$ , интерполировать их экспоненциальной кривой и удостовериться (см. рис. 3) в том, что  $C_\nu$  быстро убывают и при небольших  $\nu$ . Так, уже  $C_2$  меньше  $C_1$  в 23 раза. Следует заметить, что при меньших значениях  $kR$ , члены ряда  $C_\nu$  убывают медленнее. А, например, при  $kR = 0.45$ ,  $C_2 > C_1$ .

Отбросив все гармоники магнитного поля, кроме первой, мы получим следующий скалярный потенциал при  $r < R$ :

$$\Psi_{in}(r, \chi, z) = Bz + 2iC_1 I_1(kr) \sin(\chi) \quad (14)$$

Обозначим  $F = 2iC_1$ . Отметим, что  $F \in \mathbb{R}$ .

Найдём по скалярному потенциалу магнитного поля соответствующий ему векторный потенциал:

$$\nabla (Bz + F I_1(kr) \sin \chi) = \nabla \times \left( \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta \left( A'_\theta + \frac{rB}{2} \right) + \mathbf{e}_z A_z \right), \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} Fk I'_1(kr) \sin \chi \\ \frac{F}{r} I_1(kr) \cos \chi \\ B - Fk I_1(kr) \cos \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \chi} + kr \frac{\partial A'_\theta}{\partial \chi} \right) \\ -k \frac{\partial A_r}{\partial \chi} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B + \frac{A'_\theta}{r} + \frac{\partial A'_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \chi} \end{pmatrix}. \quad (16)$$



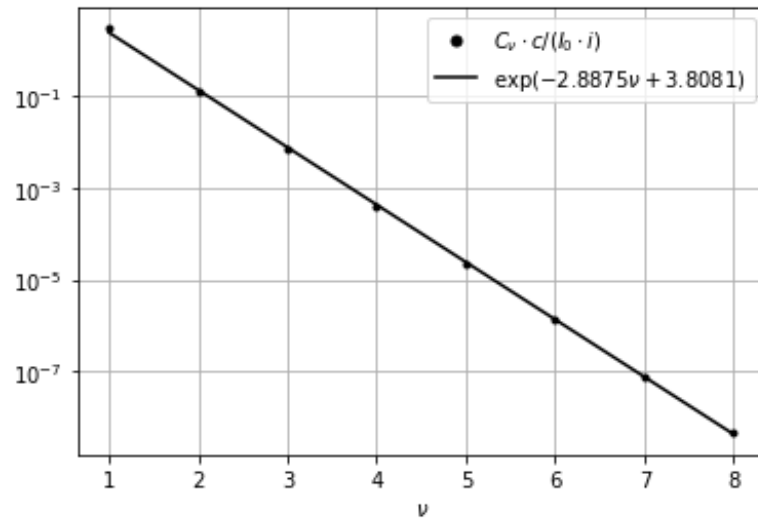


Рис. 3: Пример зависимости коэффициентов  $C_\nu$  от  $\nu$

Мы будем пользоваться следующим решением этой системы:

$$\mathbf{A}(r, \chi) = \mathbf{e}_r F k r I_1(kr) \sin \chi + \mathbf{e}_\theta \frac{r B}{2} - \mathbf{e}_z F k r I_1'(kr) \cos \chi \quad (17)$$

### 3 Гамильтониан

Запишем гамильтониан заряженной частицы с зарядом  $e$ ,

$$H(p_r, p_\theta, p_z, r, \theta, z) = \frac{\left(p_r - \frac{eF}{c}kr I_1(kr)\sin\chi\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_\theta - \frac{eBr^2}{2c}\right)^2}{2mr^2} + \\ + \frac{\left(p_z + \frac{eF}{c}kr I_1'(kr)\cos\chi\right)^2}{2m} + e\varphi\left(\frac{kr^2B}{2} - krF I_1'(kr)\cos\chi\right). \quad (18)$$

Как было нами уже предложено на странице 5, выберем функцию  $\phi$  максимально простой:  $\varphi(\psi) = \varphi_0\psi$ .

Раскроем скобки в гамильтониане. Вспомнив, что мы считаем добавку магнитного поля от спиральной обмотки малой по сравнению с величиной однородного магнитного поля, опустим из рассмотрения все квадратичные по квадратичные по этой добавке слагаемые, т.е. всё, что будет содержать параметр  $F$  в степени больше первой.

$$H(p_r, p_\theta, p_z, r, \theta, z) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{p_\theta\Omega}{2} - \frac{eF}{cm}p_rkr I_1(kr)\sin\chi + \\ + \frac{eF}{cm}p_zkr I_1'(kr)\cos\chi + \frac{mr^2\Omega^2}{8} + \frac{\varphi_0ekBr^2}{2} - \varphi_0eFkr I_1'(kr)\cos\chi \quad (19)$$

Обозначим  $\varepsilon_h = \varphi_0eF$ ,  $v_h = \frac{eF}{mc}$ ,  $m\omega_h^2 = \varphi_0ekB$ , тогда

$$H(p_r, p_\theta, p_z, r, \theta, z) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{p_\theta\Omega}{2} - v_hp_rkr I_1(kr)\sin\chi + \\ + (v_hp_z - \varepsilon_h)kr I_1'(kr)\cos\chi + \frac{mr^2}{2}\left(\omega_h^2 + \frac{\Omega^2}{4}\right) \quad (20)$$

Определим  $\tilde{\omega}^2 = \omega_h^2 + \Omega^2/4$ . Приведём невозмущённую часть гамильтониана (20) (т.е. все слагаемые не содержащие  $\varepsilon_h$  и  $v_h$ ) к переменным действие-угол. Обозначим сумму слагаемых содержащих  $v_h$  и  $\varepsilon_h$  как  $O(\varepsilon_h, v_h)$ . Можно переписать невозмущённую часть гамильтониана в декартовых координатах, вспомнив, что  $p_\theta = xp_y - yp_x$ , и не заботясь о виде, который будут иметь в декартовых координатах те члены гамильтониана, что обозначены как  $O(\varepsilon_h, v_h)$ .

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}^2(x^2 + y^2)}{2} + \frac{\Omega(y p_x - x p_y)}{2} + \\ + O(\varepsilon_h, v_h) \quad (21)$$

Переход к переменным действие-угол можно выполнить, воспользовавшись двумя каноническими преобразованиями со следующими производящими функциями:

$$F_1(x, y, z; x_1, y_1, z_1) = m\tilde{\omega}(xy + x_1y_1 + z_1z - \sqrt{2}y_1x - \sqrt{2}x_1y), \quad (22)$$

$$F_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) = m\tilde{\omega}\left(\frac{x_1^2}{2} \operatorname{ctg} x_2 + \frac{y_1^2}{2} \operatorname{ctg} y_2 - z_2z_1\right). \quad (23)$$

Функцией  $F_1$  обобщённые координаты и импульсы преобразуются от старых к новым следующим образом:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p_{x1} - m\tilde{\omega}y_1}{\sqrt{2}}, & p_y &= \frac{p_{y1} - m\tilde{\omega}x_1}{\sqrt{2}}, & p_z &= m\tilde{\omega}z_1, \\ x &= \frac{p_{y1} + m\tilde{\omega}x_1}{\sqrt{2}m\tilde{\omega}}, & y &= \frac{p_{x1} + m\tilde{\omega}y_1}{\sqrt{2}m\tilde{\omega}}, & z &= -\frac{p_{z1}}{m\tilde{\omega}}. \end{aligned}$$

Невозмущённая часть гамильтониана запишется так:

$$\begin{aligned} H(p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}; x_1, y_1, z_1) &= \left(\frac{p_{x1}^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}^2x_1^2}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Omega}{2\tilde{\omega}}\right) + \\ &+ \left(\frac{p_{y1}^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}^2y_1^2}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\Omega}{2\tilde{\omega}}\right) + \frac{m\tilde{\omega}^2z_1^2}{2} + O(\varepsilon_h, v_h). \end{aligned} \quad (24)$$

Функцией  $F_2$  обобщённые координаты и импульсы преобразуются от старых к новым следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{x1} &= \sqrt{2m\tilde{\omega}p_{x2}} \cos x_2, & p_{y1} &= \sqrt{2m\tilde{\omega}p_{y2}} \cos y_2, & p_{z1} &= -m\tilde{\omega}z_2, \\ x_1 &= \sqrt{\frac{2p_{x2}}{m\tilde{\omega}}} \sin x_2, & y_1 &= \sqrt{\frac{2p_{y2}}{m\tilde{\omega}}} \sin y_2, & z_1 &= \frac{p_{z2}}{m\tilde{\omega}}. \end{aligned}$$

Гамильтониан же выражается так:

$$\begin{aligned} H(p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}; x_2, y_2, z_2) &= \tilde{\omega}p_{x2} \cdot \left(1 + \frac{\Omega}{2\tilde{\omega}}\right) + \tilde{\omega}p_{y2} \cdot \left(1 - \frac{\Omega}{2\tilde{\omega}}\right) + \\ &+ \frac{p_{z2}^2}{2m} + O(\varepsilon_h, v_h). \end{aligned} \quad (25)$$

Запишем, как выражаются обобщённые координаты и импульсы

$(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  через  $(x_2, y_2, z_2, p_{x2}, p_{y2}, p_{z2})$ :

$$\begin{aligned} p_x &= \sqrt{2m\tilde{\omega}} \left( \sqrt{p_{x2}} \cos x_2 - \sqrt{p_{y2}} \sin y_2 \right), & x &= \frac{\sqrt{p_{x2}} \sin x_2 + \sqrt{p_{y2}} \cos y_2}{\sqrt{2m\tilde{\omega}}}, \\ p_y &= \sqrt{2m\tilde{\omega}} \left( \sqrt{p_{y2}} \cos y_2 - \sqrt{p_{x2}} \sin x_2 \right), & y &= \frac{\sqrt{p_{x2}} \cos x_2 + \sqrt{p_{y2}} \sin y_2}{\sqrt{2m\tilde{\omega}}}, \\ p_z &= p_{z2}, & z &= z_2, \end{aligned}$$

Причём радиальный и азимутальные моменты выражаются через обобщённые координаты и импульсы  $(x_2, y_2, z_2, p_{x2}, p_{y2}, p_{z2})$  следующим образом:

$$r p_r = x p_x + y p_y = 2\sqrt{p_{x2} p_{y2}} \cos(x_2 + y_2), \quad p_\theta = x p_y - y p_x = p_{y2} - p_{x2}.$$

Обобщённый импульс  $p_{x2}$  пропорционален магнитному моменту частицы, а  $p_{y2}$  пропорционален расстоянию от оси до центра ларморовской орбиты частицы. Обобщённые координаты  $x_2$  и  $y_2$  суть фаза ларморовского вращения и азимутальный угол частицы соответственно.

Возмущающую добавку к гамильтониану можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon_h, v_h) &= (v_h p_z - \varepsilon_h) k r I_1'(kr) \cos \chi - v_h p_r k r I_1(kr) \sin \chi = (v_h p_z - \varepsilon_h) \times \\ &\times k I_1'(kr) (x \cos kz + y \sin kz) - v_h r p_r k \frac{I_1(kr)}{r} (y \cos kz - x \sin kz) \quad (26) \end{aligned}$$

Обозначив  $\omega_1 = \tilde{\omega} + \Omega/2$  и  $\omega_2 = \tilde{\omega} - \Omega/2$ , запишем гамильтониан (25) как

$$H(p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}; x_2, y_2, z_2) = \omega_1 p_{x2} + \omega_2 p_{y2} + \frac{p_{z2}^2}{2m} + O(\varepsilon_h, v_h). \quad (27)$$

Вблизи оси системы, где  $kr \ll 1$ , модифицированные функции Бесселя можно заменить на первый член в их разложении в ряд Тейлора. Тогда возмущение гамильтониана можно записать так:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon_h, v_h) &= \frac{1}{4m\tilde{\omega}} \left( \sqrt{p_{y2}} (v_h p_{z2} - \varepsilon_h) \cos(y_2 - kz_2) - 2v_h k^2 \sqrt{p_{x2} p_{y2}} \times \right. \\ &\cos(x_2 + y_2) \cdot (\sqrt{p_{x2}} \cos(x_2 + kz_2) + \sqrt{p_{y2}} \sin(y_2 - kz_2)) + \\ &\left. + \sqrt{p_{x2}} (v_h p_{z2} - \varepsilon_h) \sin(x_2 + kz_2) \right) \quad (28) \end{aligned}$$

Первое слагаемое имеет смысл резонанса между продольным движением и азимутальным вращением, вызванным  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфом. Последнее слага-

емое имеет смысл резонанса между продольным движением и циклотронным вращением. Остальные слагаемые связаны со взаимодействием всех трёх движений.

Оценим ширину первого резонанса[7]. Для этого учтём, что вблизи резонанса

$$\dot{y}_2 - kz_2 = \omega_2 - kp_{z2}/m \approx 0. \quad (29)$$

Введём новые переменные  $P_z = p_{z2} - m\omega_2/k$  и  $Z = z_2 - y_2/k$ ,  $p_{y2} = P_y - P_z/k$ . Введём производящую функцию

$$F_4(x_2, y_2, z_2, P_x, P_y, P_z) = x_2P_x + y_2P_y + z_2P_z + z_2\frac{m\omega_2}{k} - \frac{y_2P_z}{k}. \quad (30)$$

Этой функцией задаётся каноническое преобразование от обобщённых переменных  $(x_2, y_2, z_2, p_{x2}, p_{y2}, p_{z2})$  к  $(X, Y, Z, P_x, P_y, P_z)$ , такое что (27) с учётом основной части и первого слагаемого возмущающей части запишется как

$$H(X, Y, Z, P_x, P_y, P_z) = \omega_1P_x + \omega_2P_y + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2}{2k^2} + \sqrt{P_y - \frac{P_z}{k}} \cos(kZ) \cdot \frac{(v_h m \omega_2 + v_h k P_z - k \varepsilon_h)}{4mk\tilde{\omega}} \quad (31)$$

Во-первых в последнем слагаемом в числителе дроби можно пренебречь  $kP_z$  по сравнению с  $m\omega_2$ , так как из (29) следует  $P_z \approx 0$ . Во-вторых в подкоренном выражении можно пренебречь тем же  $P_z$ , т.к. в последнем слагаемом итак содержатся малые  $v_h$  и  $\varepsilon_h$  — учёт отклонения подкоренного выражения от  $P_y$  было бы превышением точности.

$$H(X, Y, Z, P_x, P_y, P_z) = \omega_1P_x + \omega_2P_y + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2}{2k^2} + \sqrt{P_y} \cos(kZ) \cdot \frac{(v_h m \omega_2 - k \varepsilon_h)}{4mk\tilde{\omega}} \quad (32)$$

Ширина резонанса растёт пропорционально  $P_y$ , то есть расстоянию от оси ловушки до ведущего центра частицы. Таким же образом можно рассмотреть остальные резонансы.

## 4 Заключение

В ходе работы получены следующие основные результаты:

Аналитически найдены векторный и скалярный потенциалы магнитного поля двузаходной спиральной обмоткой. Получено выражение для эквипотенциалей электрического поля, создаваемого в плазмоприёмниках концентрическими пластинами.

Гамильтониан, описывающий движение частицы в винтовой пробке преобразован к виду, в котором явно учтена винтовая симметрия.

В приближении, когда спиральная добавка является малой, произведён переход к переменным действие-угол для гамильтониана, описывающего движение в заряженной частицы электрическом поле, близком к тому, что создавалось бы в однородно заряженном столбе плазмы и однородном магнитном поле.

Выявлены основные резонансы между продольным движением частицы, азимутальным и циклотронном вращением. Указан метод для исследования их положения и ширины.

Полученные результаты и использованный подход могут быть применены к исследованию кинетических эффектов, возникающих при истечении плазмы через винтовую пробку.

## Список литературы

- [1] *Beklemishev A.D.* Helicoidal System for Axial Plasma Pumping in Linear Traps // Fusion Science and Technology. 2013. №1 (63). С. 355–357.
- [2] *Sudnikov A.V.* et al. First experimental campaign on SMOLA Helical Mirror // Plasma and Fusion Research. 2019. №1 (14). С. 2402023.
- [3] *Sudnikov A.V.* et al. First experiments on helical mirror device SMOLA // European Physical Society (EPS), 2018. 729–732 с.
- [4] *Sudnikov A., Soldatkina E.* Review of recent advances and new ideas in development of the open magnetic traps // AIP Conference Proceedings. 2019. №1 (2179). С. 020026.
- [5] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1, М.: Издательство иностранной литературы, 1949, 799 с.
- [6] *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228 с.
- [7] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир. 528 с.
- [8] *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Геометрия магнитного поля, в сб.: Вопросы теории плазмы, под ред. Леонтовича М.А., вып 2. М.: Атомиздат, 1963. 265 с.