

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра Физики плазмы

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Каргаполов Иван Юрьевич

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Методы борьбы с численными шумами в трёхмерном коде для моделирования плазменного кильватерного ускорения LCODE3D

«К защите допущен»

Заведующий кафедрой

ученая степень, звание

должность, место работы

...../.....

(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Научный руководитель

Туев Пётр Викторович

ученая степень, звание

должность, место работы

ст. л. ИЯФ СО РАН

...../.....

(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....».....20...г.

Оглавление

1	Введение	3
2	Основы численного алгоритма кода LCODE 3D	6
2.1	Квазистатическое приближение	6
2.2	Уравнения на электромагнитное поле	7
2.3	Раскладка частиц на сетку и интерполяция полей	9
3	Численные шумы и методы борьбы с ними	10
3.1	Тестовая задача и сравнение кодов	10
3.2	Виртуальная плазма	13
3.3	Цифровая фильтрация	15
3.4	Дальнейшее тестирование и обсуждение результатов	18
4	Заключение	20
	Список литературы	21

1 Введение

Современную науку нельзя представить без одного из её главных инструментов исследования окружающего мира – ускорителя заряженных частиц. Из списка актуальных проблем физики ускорителей следует отметить ограничение электрического поля в классических резонаторах величиной порядка 100 МВ/м. Главной причиной данного ограничения является разрушение металлической стенки ускоряющей камеры из-за электрического пробоя, который возникает при больших значениях напряженности электрического поля. Данное ограничение подтолкнуло научное сообщество к поиску новых методов ускорения заряженных частиц. В частности, активно изучается концепция кильватерного ускорения в плазме. Плазма – это квазинейтральный газ заряженных частиц, то есть полностью разрушенное вещество. Её использование в качестве ускоряющей структуры позволяет достигать огромной напряженности электрического поля порядка 100 ГВ/м и выше.

Принципиальная схема кильватерного ускорителя состоит в следующем (рис. 1): драйвер (интенсивный лазерный импульс или высокоэнергетический пучок заряженных частиц), проходя через плазму, возбуждает плазменную волну с большой напряженностью электрического поля. Если в подходящую фазу инжектировать витнесс (пучок заряженных частиц), то он будет интенсивно набирать энергию. Уже получены важные экспериментальные результаты [1—3], которые показали возможность использования плазмы в качестве эффективных высокоградиентных ускоряющих структур. Вместе с тем, многообразные перспективные схемы кильватерного ускорения требуют существенного дальнейшего развития и подробного исследования своих возможностей для реализации имеющегося потенциала.

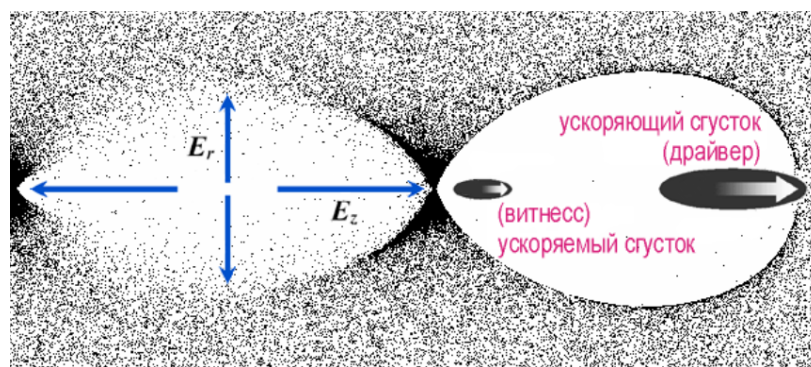


Рисунок 1: Принципиальная схема кильватерного ускорителя.

Опыт многочисленных исследований показал, что в настоящее время качественное проектирование новых и совершенствование старых экспериментальных установок не может быть осуществлено без проведения численных экспериментов. Методы компьютерного моделирования предоставляют обширные возможности по изучению плазменной динамики в условиях, приближенных к экспериментальным. По этой причине крупномасштабные моделирования будут ещё долго оставаться ключевым инструментом исследования взаимосвязанных физических явлений в данной области.

Бурное развитие этой области привело к значительному увеличению как энергии ускоряемых сгустков, так и размеров экспериментальных установок. В результате значительно повысилась сложность численных расчётов, в том числе возросли размеры счётной области. В данных условиях одним из главных требований к вычислительным алгоритмам является обеспечение стабильности по отношению к численным ошибкам при сохранении разумного потребления компьютерных ресурсов.

В настоящий момент разработано большое количество кодов, в которых реализованы различные численные схемы для удовлетворения приведённых выше условий [4]. Одним из таких кодов является код LCODE [5, 6]. Основой численного алгоритма данного кода является метод частиц в ячейках (PIC). Следуя ему, в моделировании частицам плазмы сопоставляется набор макрочастиц, а самосогласованное электромагнитное поле, плотности заряда и ток вычисляются на сетке. Особенностью данного кода является применение квазистатического приближения, значительно уменьшающее время моделирования определённого круга экспериментальных задач.

На данный момент разрабатывается код LCODE 3D, являющийся следующим этапом развития двумерного кода с цилиндрической симметрией LCODE. По сравнению с предшественником, трёхмерный код точнее соответствует экспериментальным условиям и, таким образом, позволяет исследовать больший спектр физических явлений. Однако, смена геометрии приводит к возникновению дополнительных численных шумов, борьба с которыми является одной из самых сложных задач при разработке нового кода.

Первая глава данной работы посвящена некоторым ключевым элементам кода LCODE 3D. Описана идея квазистатического приближения и как оно позволяет свести трёхмерную задачу к упрощённой 2d3v. Изложен ме-

тод раскладки параметров макрочастиц на сетку и способ интерполяции электрического и магнитного поля с сетки на положения макрочастиц.

Вторая часть данной работы посвящена методам борьбы с численными шумами. Сформулирован метод двойного плазменного представления (метод виртуальной плазмы). Описан метод цифровой фильтрации сеточных величин. На примере тестовой задачи рассмотрены достоинства и недостатки предложенных методов. Определена возможная главная причина возникновения шумов в моделировании кодом LCODE 3D.

Целью данной работы является определение метода борьбы с численными шумами, который существенно улучшает стабильность моделирования без искажения физической картины явления. Это позволит использовать LCODE 3D в исследованиях важных задач кильватерного ускорения, для которых приближение цилиндрической симметрии не выполняется.

2 Основы численного алгоритма кода LCODE 3D

В работе будем использовать следующие обозначения: n_0 – невозмущенная плотность плазмы, m – масса электрона, c – скорость света, e – элементарный заряд, $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$ – плазменная частота, пучок заряженных частиц распространяется вдоль оси z . Будем измерять величины в следующих единицах: время в ω_p^{-1} , длину в $k_p^{-1} = c / \omega_p$, скорость в c , поле в $E_0 = m_e c \omega_p / e$, плотность заряда в en_0 , ток в $en_0 c$. Все последующие уравнения и формулы написаны в безразмерном виде.

2.1 Квазистатическое приближение

Квазистатическое приближение основывается на существовании большой разницы характерных времен эволюции между плазмой и драйвером: для плазмы эта величина $\tau_p \sim \omega_p^{-1}$, для драйвера $\tau_b \sim \sqrt{2\gamma_b m_b} \omega_p^{-1}$, где γ_b и m_b – лоренц-фактор и масса частицы драйвера соответственно. Таким образом, квазистатическое приближение наиболее эффективно для задач, в которых драйвер движется с близкой к световой скоростью и состоит из тяжёлых частиц, то есть когда $\gamma_b m_b \gg 1$.

Расчёты производятся в бегущем со скоростью света окне, драйвер движется сквозь плазму с околосветовой скоростью. Макрочастицы драйвера и плазмы рассматриваются отдельно. Квазистатическое приближение позволяет построить численный алгоритм в два шага.

Сначала вычисляется отклик плазмы. На данном этапе в заданный момент времени драйвер считается неэволюционирующим, а все величины в плазме зависящими от z и t только в комбинации $\xi = z - t$. Отклик плазмы вычисляется послойно, от головы драйвера к его хвосту. Благодаря выбранному окну, информация в моделировании может распространяться только в сторону уменьшения координаты ξ , и поэтому состояние плазмы на текущем слое зависит только от предыдущих. Принципиальная схема расчёта отклика плазмы на слое выглядит следующим образом (рис. 2). На новый слой попадают макрочастицы с предыдущего, их параметры раскладываются на двумерную сетку токов и плотностей. После решаются уравнения на электромагнитное поле, а затем обновляются положения и импульсы макрочастиц. После того, как электромагнитное поле было вычислено на первом

шаге, моделируется эволюция макрочастиц драйвера. Итерационный процесс повторяется по порядку для всех слоёв и для всех временных шагов. Передний край пучка и начало счётного окна находятся в точке $\xi = 0$, система координат выбрана как на рис. 2. Шаг моделирования равен $\Delta\xi$, и эта величина кардинальным образом влияет на точность и продолжительность моделирования.

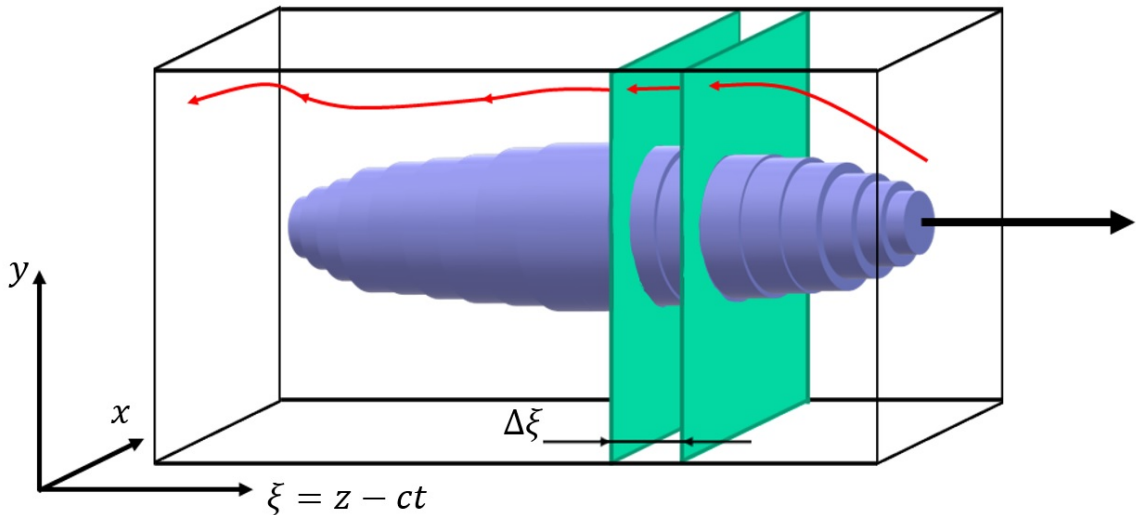


Рисунок 2: Схема работы расчёта отклика плазмы в квазистатическом приближении.

2.2 Уравнения на электромагнитное поле

Плотность заряда вычисляется как сумма плотностей заряда драйвера ρ_b , электронов ρ_e и ионов ρ_i : $\rho = \rho_b + \rho_e + \rho_i$. Поскольку драйвер быстро распространяется вдоль оси z , то можно пренебречь поперечными составляющими его тока, то есть $\mathbf{j}_b = \rho_b \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z – направленный вдоль оси z единичный вектор. Таким образом, итоговый ток, вычисляемый как сумма токов драйвера, электронов \mathbf{j}_e и ионов \mathbf{j}_i , имеет вид $\mathbf{j} = \rho_b \mathbf{e}_z + \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i$.

Электрические и магнитные поля получаются путём решения уравнений Максвелла, которые в безразмерных переменных записываются как

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрическое и магнитное поле. В квазистатическом приближе-

нии

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi},$$

уравнения Максвелла (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} E_x &= \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial \xi}, & \Delta_{\perp} E_y &= \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial \xi}, & \Delta_{\perp} E_z &= \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y}, \\ \Delta_{\perp} B_x &= \frac{\partial j_y}{\partial \xi} - \frac{\partial j_z}{\partial y}, & \Delta_{\perp} B_y &= \frac{\partial j_z}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial \xi}, & \Delta_{\perp} B_z &= \frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x}, \\ \Delta_{\perp} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Граничными условиями являются условия для идеально проводящей трубы, имеющей в сечении прямоугольник со сторонами $2 \cdot x_{\max}$ на $2 \cdot y_{\max}$ и площадью S :

$$\begin{aligned} x = \pm x_{\max} : B_x = E_y = E_z = 0; & \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \rho, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = -j_z, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = j_y; \\ y = \pm y_{\max} : B_y = E_x = E_z = 0; & \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \rho, \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} = j_z, \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = -j_x; \\ \frac{1}{S} \int_S B_z dx dy &= B_0, \end{aligned}$$

где B_0 – внешнее продольное магнитное поле, если таковое имеется.

Чтобы решить задачу для электромагнитного поля на двумерной сетке, необходимо определить величины $\partial j_x / \partial \xi$ и $\partial j_y / \partial \xi$. Данные производные вычисляются по схеме предиктор-корректор, реализующей один шаг по ξ . Её идея состоит в следующем: параметры плазмы на новом слое сначала оцениваются, а после уточняются. Технически, на первом этапе рассчитываются положения частиц с использованием полей с предыдущего слоя. На втором этапе из полученного распределения оценивается плотность заряда и ток и вычисляется электромагнитное поле. На третьем этапе вычисленное поле позволяет уточнить состояние частиц плазмы на полушаге. На четвертом этапе ещё раз уточняется поле и, после, распределение частиц. После этого, вычисления продолжают на следующем шаге по ξ .

Стандартные начальные условия при $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B_0), \\ \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i &= (0, 0, 0), \quad n_e = n_i = n_0. \end{aligned}$$

2.3 Раскладка частиц на сетку и интерполяция полей

Плотности заряда и ток в узлах двумерной сетки вычисляются с помощью суммирования по всем макрочастицам:

$$\begin{aligned}\rho_{i,j} &= \sum_n \frac{q_{i,j}}{1 - v_{z,n}} \tilde{R}_{i,j}(r_n), \\ \mathbf{j}_{i,j} &= \sum_n \frac{v_{i,j} q_{i,j}}{1 - v_{z,n}} \tilde{R}_{i,j}(r_n),\end{aligned}$$

где $\tilde{R}_{i,j}(r_n) = \tilde{R}_i(x_n) \cdot \tilde{R}_j(y_n)$ – сеточное ядро, которое в методе частиц описывает геометрическую форму, размер и распределение заряда частицы. Выбранное двумерное ядро является произведением двух одномерных.

Одномерным ядром может являться произвольная непрерывная функция, нормированная на единицу. Для обоих направлений выбрано параболическое сеточное ядро [7], которое в одномерном случае раскладывает частицу на три ячейки, а в двумерном на 9 ячеек:

$$\tilde{R}_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2} \left(x + \frac{1}{2}h\right)^2, & -\frac{3}{2}h \leq x < -\frac{1}{2}h, \\ \frac{3}{4} - \frac{x^2}{h^2}, & -\frac{1}{2}h \leq x < \frac{1}{2}h, \\ \frac{1}{2h^2} \left(x - \frac{1}{2}h\right)^2, & \frac{1}{2}h \leq x < \frac{3}{2}h, \\ 0, & |x| > \frac{3}{2}h, \end{cases}$$

где h – шаг сетки. Параболическое сеточное ядро выбрано по той причине, что оно имеет непрерывную первую производную. Это значит, что величина заряда и её производная, присвоенная каждому узлу сетки, при движении частицы изменяется непрерывно.

Электрическое и магнитное поле интерполируется с сетки на положения частиц с использованием того же параболического сеточного ядра:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_n &= \sum_{i,j} \mathbf{E}_{i,j} \tilde{R}_{i,j}(r_n), \\ \mathbf{B}_n &= \sum_{i,j} \mathbf{B}_{i,j} \tilde{R}_{i,j}(r_n).\end{aligned}$$

3 Численные шумы и методы борьбы с ними

В кодах, основанных на методе частиц в ячейках, возникающие нежелательные шумы могут иметь разную природу, связанную с численным решением уравнений Максвелла [8], или с явлением «саморазогрева» плазмы [9]. Данные шумы известны достаточно давно и подробно исследованы, но в настоящий момент не существует универсального решения по полному их устранению или ослаблению. Как правило, для каждого кода необходимо подбирать свой метод борьбы с определённым типом шумов. В ходе моделирования нефизические шумы начинают доминировать над физическими процессами, поэтому при достаточно большом числе шагов расчёта уже нельзя доверять результатам работы кода.

Основная сложность разработки и реализации методов борьбы с численными шумами в коде LCODE 3D изначально заключалась в том, что источники возникновения и развития численных ошибок не могут быть определены с исчерпывающей точностью. Вследствие этого разработанные методы, как правило, ослабляют предполагаемые последствия шумов, но не нейтрализуют причину их возникновения.

Один из основных источников шумов возникает из-за введения пространственной сетки и возникающей при этом так называемой "самосилы". При раскладке макрочастицы на ток и плотность заряда в соседних узлах сетки "оседает" некоторая часть её заряда, которая после взаимодействует с изначальной макрочастицей. Это значит, что макрочастица начинает воздействовать на себя саму, что влияет на её движение и, в следствии этого, вносит в моделирование шумы. Одним из способов ослабления данного эффекта является выбор сеточного ядра с пониженным самодействием. По этой причине в коде LCODE 3D реализовано параболическое сеточное ядро, показавшее свою эффективность в двумерном коде LCODE.

3.1 Тестовая задача и сравнение кодов

Для исследования влияния численных шумов на моделирование была выбрана следующая тестовая задача. Изучается длительная эволюция плазменной волны, генерируемая коротким пучком протонов. На этой задаче выполняется проверка правильности работы частей кода, отвечающих за плаз-

менную динамику и за решение уравнений на электромагнитное поле. Кроме того, данная задача помогает определить наилучший шаг сетки и оптимальное количество макрочастиц плазмы в одной ячейке.

В тестовой задаче протонный драйвер предполагается абсолютно жёстким в сопутствующих координатах, что позволяет избежать численных шумов, связанных с представлением его набором макрочастиц, и задать плотность заряда аналитически:

$$\rho_b(r, \xi) = \begin{cases} 0.5\rho_{b0} \cdot e^{-r^2/2\sigma_r^2} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi}{\sigma_z}\right) \right], & -2\sigma_z\sqrt{2\pi} < \xi < 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где ρ_{b0} – максимальная плотность заряда пучка, σ_r и σ_z – характерная ширина и длина пучка, соответственно. Плазменные ионы полагаются неподвижными. Ось пучка выбрана так, чтобы она совпадала с центром расчётной области. Границы окна моделирования должны быть достаточно велики, чтобы считать пучок распространяющимся в неограниченной однородной плазме плотности n_0 . Выбраны следующие основные параметры задачи:

$$\sigma_r = 1, \quad \sigma_z = 1, \quad \rho_{b0} = 0.5, \quad (2)$$

и параметры счётной области:

$$\Delta\xi = h = 0.02, \quad N_h = 769, \quad N = 4,$$

где $\Delta\xi$ – шаг моделирования, h – шаг сетки, N_h – число шагов сетки, N – число макрочастиц в одной ячейке. Шаг моделирования и шаг сетки взяты в соответствии с условием Куранта. Кроме того, $B_0 = 0$.

Сравнение производится с результатами работы двумерного кода LCODE. Выбранные основные параметры (2) не позволяют сопоставить результаты моделирования с аналитическим решением в линейном приближении, так как приводят к возникновению нелинейных эффектов. Но при таких параметрах различия появляются раньше, что значительно уменьшают время работы программы и позволяют быстрее тестировать различные методы борьбы с численными шумами.

Изначальной величиной, использовавшейся для сравнения, являлось продольное электрическое поле в центре расчётной области E_z как наиболее интересный параметр для ускорения частиц. Второй величиной для диагностики являлось периодически сохраняемое распределение плотности заряда

в плазменном слое. Позже выяснилась необходимость отслеживания и других величин. Конечной целью являлось совпадения результатов с работой проверенного двумерного кода до $\xi = -600$.

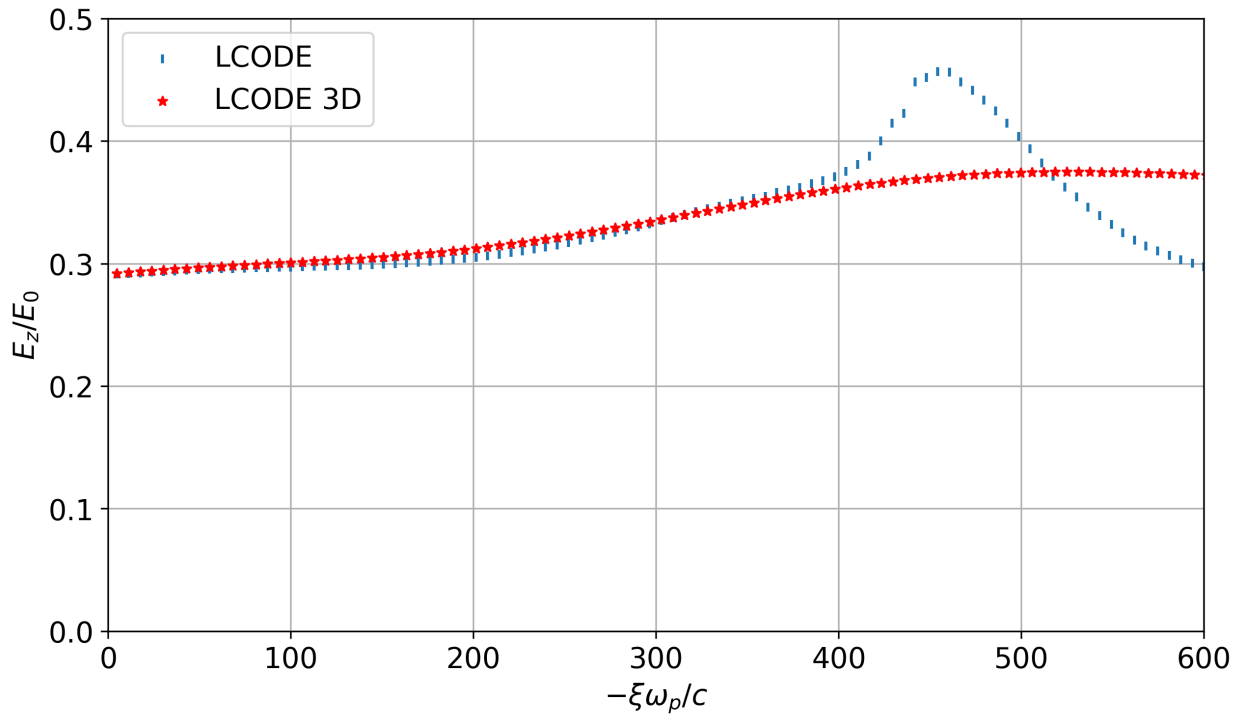
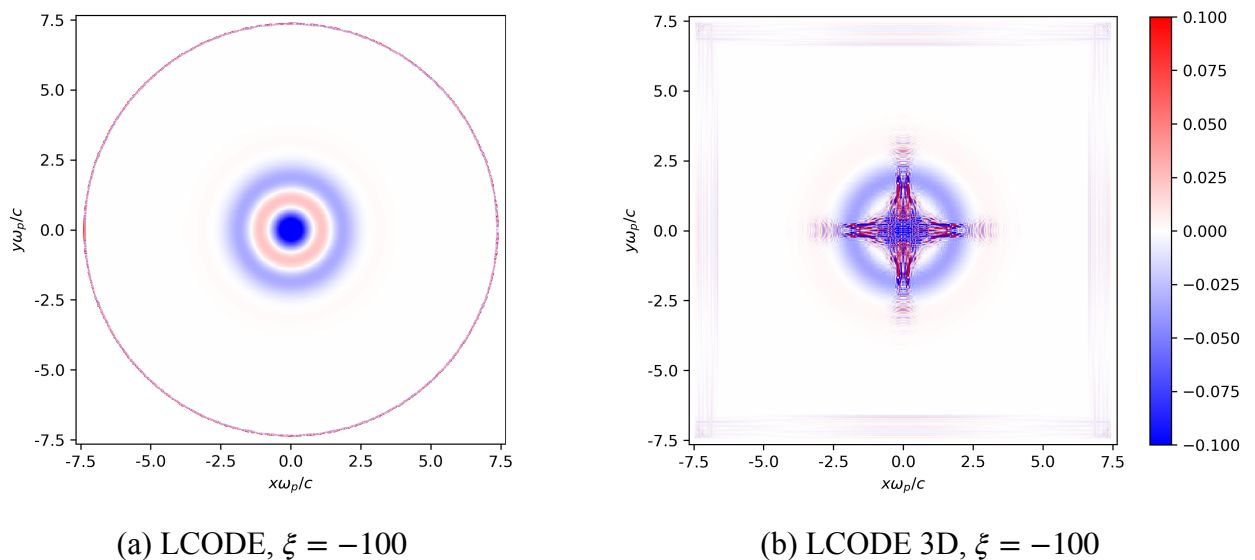


Рисунок 3: Огибающая продольного электрического поля в центре расчётной области.



(a) LCODE, $\xi = -100$

(b) LCODE 3D, $\xi = -100$

Рисунок 4: Распределение плотности заряда ρ на плазменном слое.

Первоначальные сравнения тестового моделирования показали, что на первых шагах величины продольного электрического поля на оси пучка E_z

ведут себя похожим образом (рис. 3). Но при этом уже при $\xi = -100$ на картине плотности заряда видны большие численные возмущения (рис. 4), что говорит о невозможности использования данной реализации разрабатываемого кода для моделирования длинных счётных областей. Кроме того, на данном этапе было определено, что стабильность кода не улучшается при разумном изменении размера шага моделирования и количества частиц.

3.2 Виртуальная плазма

В тестировании кода LCODE 3D было замечено, что если в одной ячейке находится несколько частиц, то они имеют тенденцию к "слипанию" друг с другом. Возможная причина данного нефизического явления заключается в том, что расчёт взаимодействия близкорасположенных частиц производится некорректно.

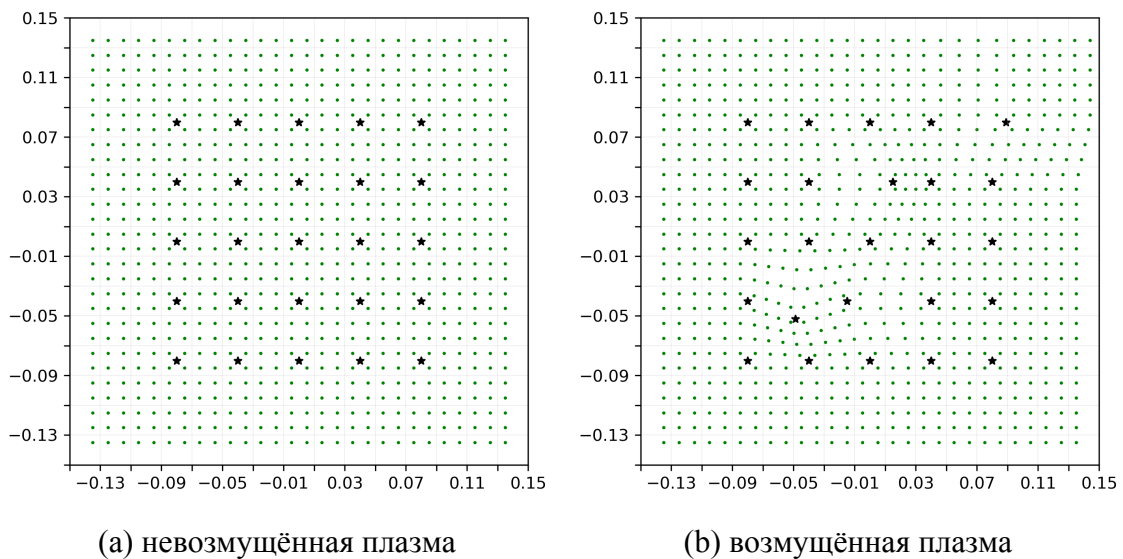


Рисунок 5: Двойное плазменное представление: звёздами обозначены реальные макрочастицы, точками виртуальные.

Для решение последней проблемы предложен метод двойного плазменного представления. Его идея заключается в представлении плазмы двумя наборами частиц (рис. 5). Первый набор состоит из редко расставленных реальных частиц, то есть, одна частица на 4 или 9 ячеек. Эволюция данных частиц вычисляется как и раньше. Вторым набором является виртуальным, с 4 или 9 частицами на одну ячейку, и существует только на этапе вычисления тока и плотности заряда. Параметры данных частиц получаются из первого

набора с помощью билинейной интерполяции параметров исторически соседних реальных частиц для каждой виртуальной частицы. При этом количество исторических соседей может варьироваться от 1 до 4 в зависимости от положения виртуальной частицы на первоначальном этапе инициализации реальных частиц. Кроме этапа раскладки, виртуальные частицы не существуют где-либо в программе.

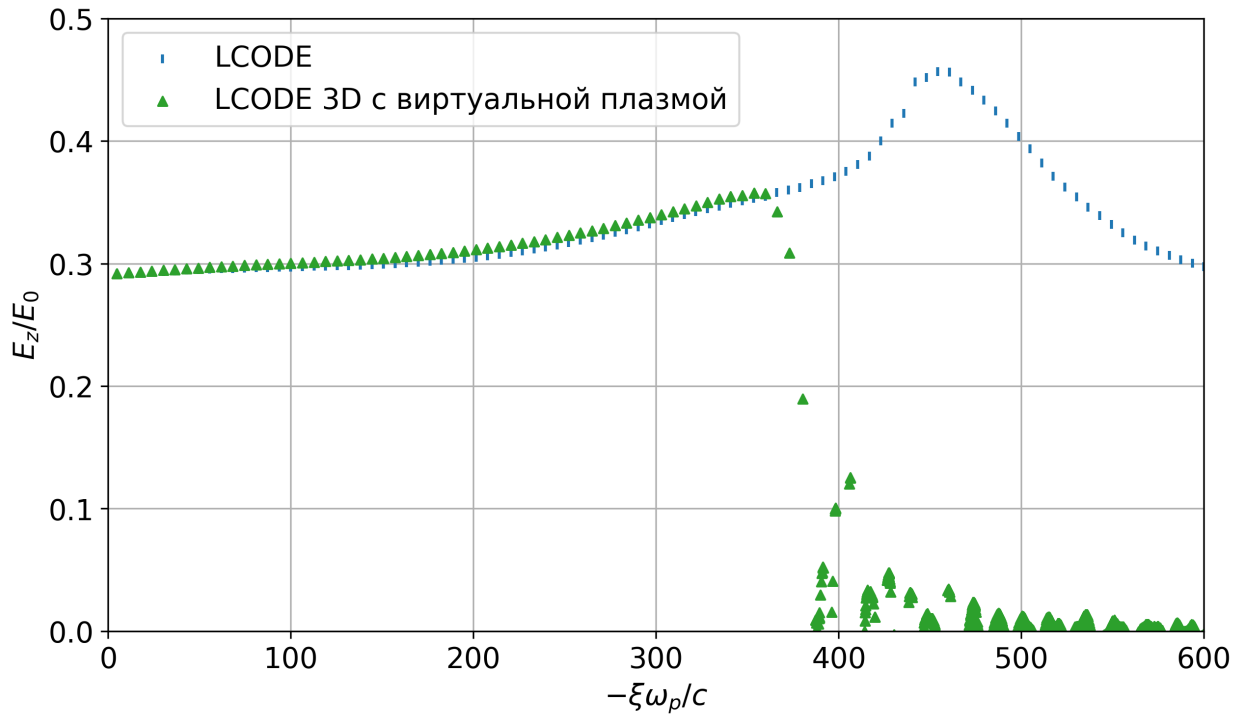
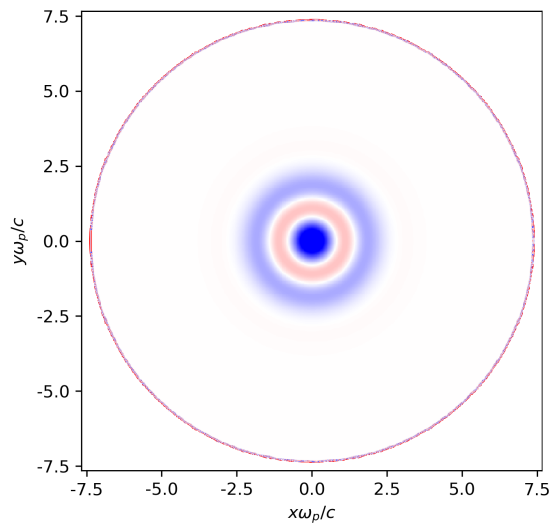
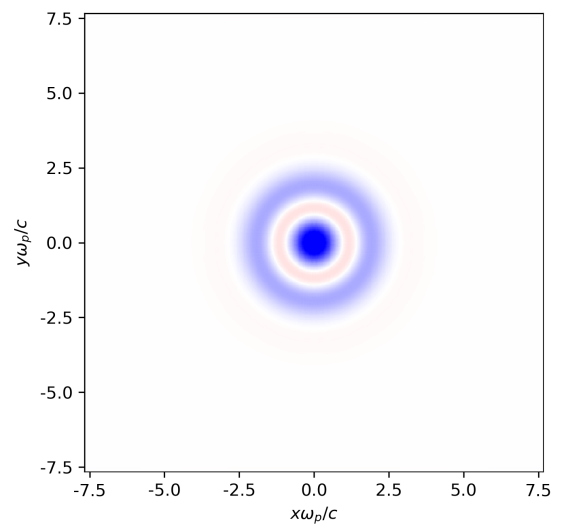


Рисунок 6: Огибающая продольного электрического поля в центре расчётной области.

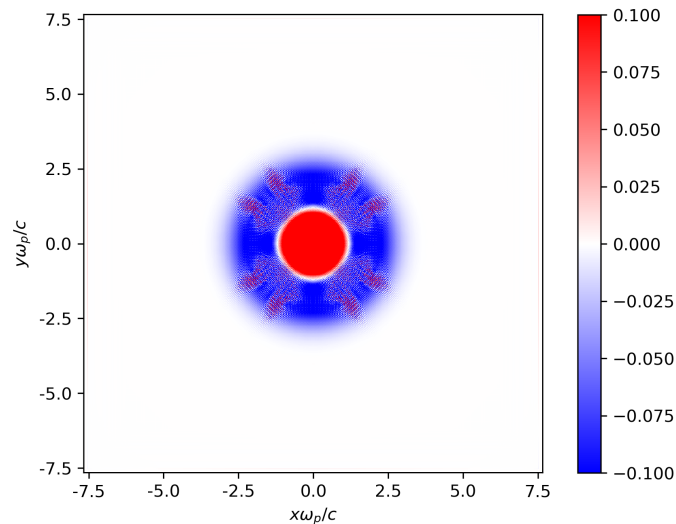
Реализация и применение данного метода существенно уменьшило нефизические возмущения на первых шагах моделирования, что видно на рис. 6 и 7, но при этом не довело стабильность кода до приемлемого уровня. Причиной этого можно назвать то, что при моделировании кодом LCODE 3D численные шумы возникают не только из-за ”слипания” частиц, но и из-за других эффектов.



(a) LCODE,
 $\xi = -100$



(b) LCODE 3D с виртуальной плазмой,
 $\xi = -100$



(c) LCODE 3D с виртуальной плазмой,
 $\xi = -300$

Рисунок 7: Распределение плотности заряда ρ на слое.

3.3 Цифровая фильтрация

При проведении моделирования из предыдущего пункта, на картине плотности заряда в представлении Фурье было обнаружено, что численный шум изначально появляется на половине частоты расстановки реальных макрочастиц (частота Найквиста). В кодах для моделирования плазменного кильватерного ускорения широко распространена практика применения цифровой фильтрации к току и/или плотности заряда для сглаживания [4]. Как было показано в работе [8], некоторые алгоритмы позволяют осуществить

широкополосную фильтрацию от частоты Найквиста и выше, поскольку исследуемая физика процессов расположена, как правило, на низких частотах. Данная техника может быть применена и к численному алгоритму кода LCODE 3D.

В кодах для моделирования плазменного кильватерного ускорения обычно используется трёхточечный фильтр [10]. Пусть величина $\phi_j = \phi(X_j)$, подвергаемая фильтрации, изначально определена в узлах одномерной сетки $X_j = j\Delta x$. Тогда фильтрация проводится следующим образом:

$$\phi_j^f = \alpha\phi_j + (1 - \alpha) \frac{\phi_{j-1} + \phi_{j+1}}{2}, \quad (3)$$

где ϕ_j^f – отфильтрованная величина, α – коэффициент фильтрации. Данный фильтр называется биномиальным в случае $\alpha = 0.5$. Предполагая $\phi = e^{ikx}$ и $\phi^f = g(\alpha, k) \cdot e^{ikx}$, где $g(\alpha, k)$ – сглаживающий множитель, зависящий от коэффициента фильтрации α и волнового числа k , мы можем найти из 3 следующее выражение:

$$\begin{aligned} g(\alpha, k) &= \alpha + (1 - \alpha) \cos(k\Delta x) \approx \\ &\approx 1 - (1 - \alpha) \frac{(k\Delta x)^2}{2} + O(k^4). \end{aligned}$$

Для последовательного использования n фильтров с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, итоговый сглаживающий множитель определяется как

$$\begin{aligned} G &= \prod_{i=1}^n g(\alpha_i, k) \approx \\ &\approx 1 - \left(n - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \frac{(k\Delta x)^2}{2} + O(k^4), \end{aligned}$$

откуда видно, что более резкая отсечка обеспечивается при $\alpha_n = n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$. Данный приём имеет название компенсирующий шаг. Фильтрация в двумерном пространстве состоит из применения фильтра сначала вдоль одного направления, а затем вдоль другого. В представлении Фурье данная последовательность переходит в два отдельных сглаживающих множителя для двух направлений.

Использование данного метода борьбы с численными шумами вместе с методом виртуальной плазмы улучшает стабильность разрабатываемого ко-

да LCODE 3D, что видно на рис. 8. Кроме того, сглаживается картина плотности заряда на плазменном слое, что показано на рис. 9.

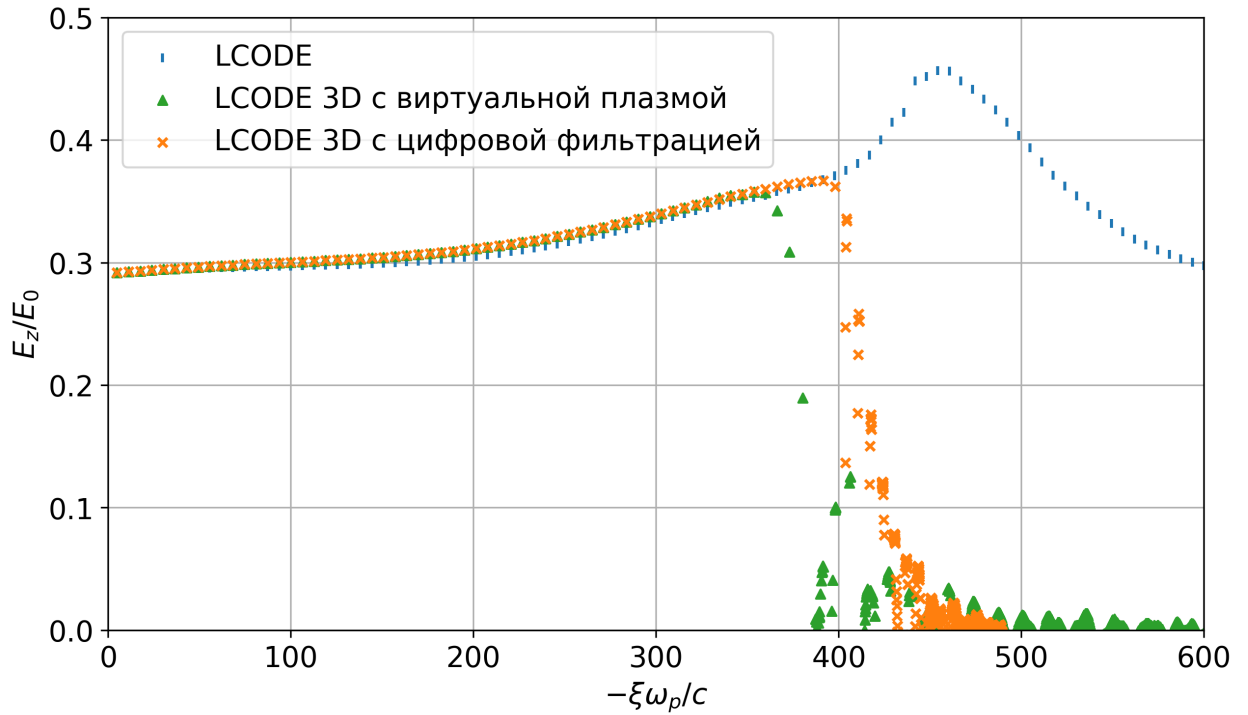
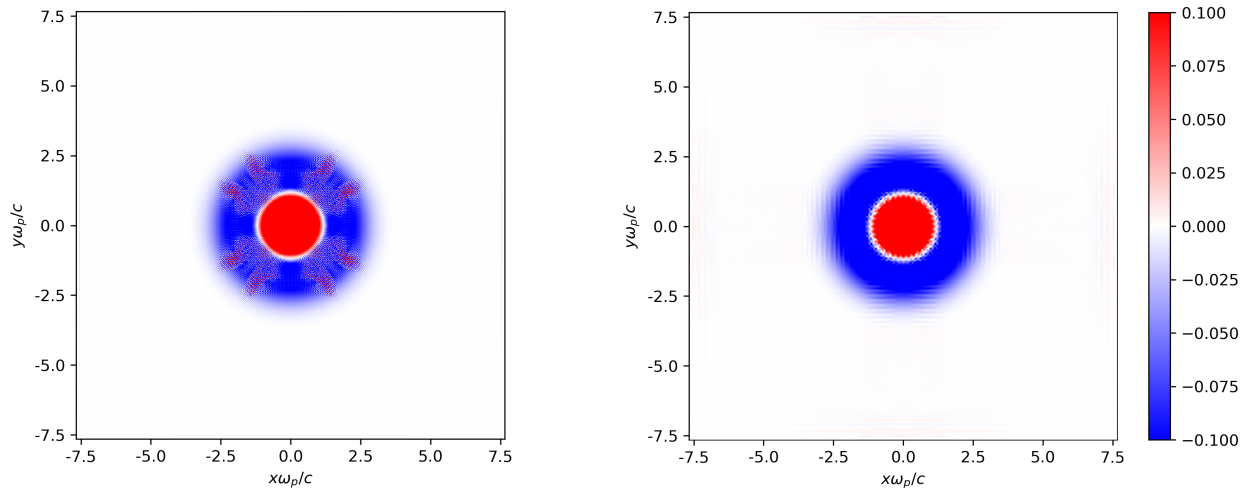


Рисунок 8: Огибающая продольного электрического поля в центре расчётной области.



(a) LCODE 3D с виртуальной плазмой,
 $\xi = -300$

(b) LCODE 3D с виртуальной плазмой и с
цифровым фильтром, $\xi = -300$

Рисунок 9: Распределение плотности заряда ρ на слое.

К проблемам данного метода следует отнести то, что он наиболее корректно применим к специфическому кругу задач и кодов. Необходимым

условием является концентрирование физического сигнала при малых частотах, а численных шумов при высоких. Численный алгоритм кода LCODE 3D и сама задача построены таким образом, что для основных фильтруемых величин (плотность заряда и ток) данное условие выполняется не в полной мере. Следовательно, в нашем случае вместе с ослаблением численных шумов, чрезмерно подавляются и физические сигналы, что само создаёт дополнительные шумы.

3.4 Дальнейшее тестирование и обсуждение результатов

Последующие тестирования с использованием различной диагностики позволили сделать выводы по поводу эффективности различных методов борьбы с численными шумами. Несмотря на то, что одновременное применение виртуальной плазмы и цифровой фильтрации улучшили стабильность моделирования кодом LCODE 3D, достигнутый результат всё ещё не является приемлемым. По этой причине была выбрана другая стратегия. Она заключается в поиске того момента времени и места, когда появились первые признаки численных шумов, и последующее определение главной причины и источника возникновения нефизических возмущений.

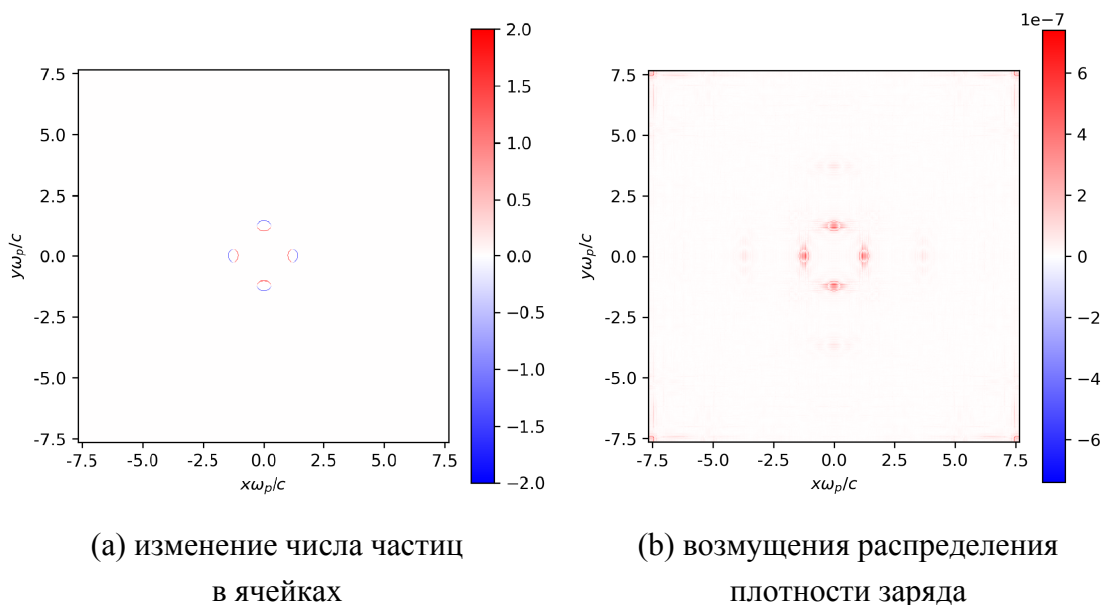


Рисунок 10: Наблюдение нефизических возмущений в момент перехода частиц в соседние ячейки.

Результатом данного поиска стало установление такого момента времени, когда появились первые признаки численных шумов на картине рас-

пределения плотности заряда в представлении Фурье. На данном этапе в коде был реализован метод виртуальной плазмы. Обнаружено, что в этот же первый момент виртуальные частицы начинают переходить в соседние ячейки. После того, как аналогичное тестирование было проведено для кода LCODE 3D без реализованного в нём метода виртуальной плазмы, на шаге возникновения первых признаков шумов наблюдалось схожее поведение макрочастиц. В дополнении к этому, нефизические возмущения наблюдались именно там, где частицы начали переходить в соседние ячейки (рис. 10). Исходя из этого был сделан вывод, что возможной причиной возникновения шумов является недостаточно гладкая раскладка макрочастиц на плотность заряда и ток в случае, когда некоторые макрочастицы находятся не в своих изначальных ячейках. Данная проблема кажется оригинальной и не имеющей в настоящий момент решения. Поиск возможных методов шумоподавления является предметом дальнейших исследований.

4 Заключение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

1. Предложены два метода по ослаблению численных шумов в моделировании кодом LCODE 3D: метод виртуальной плазмы и цифровая фильтрация.
2. Эффективность данных методов проверена на примере тестовой задачи с абсолютно жёстким пучком и в сравнении с результатами моделирования кодом LCODE. Определены достоинства и недостатки каждого метода.
3. Установлена возможная главная причина возникновения численных шумов в моделировании кодом LCODE 3D.

Следствием реализации предложенных методов шумоподавления стало заметное увеличение стабильности кода LCODE 3D. Это привело к возможности проведения численных экспериментов для гораздо больших счётных областей, чем позволяют многие другие коды по моделированию кильватерного ускорения. Тестирование данных методов способствовало более глубокому пониманию причин развития нефизических возмущений, в том числе явления "самосилы". План дальнейшей работы состоит в последующем развитии шумоподавляющих алгоритмов и в поиске возможного решения по ослаблению влияния "самосилы".

Список литературы

1. *Костюков И. Ю., Пухов А. М.* Плазменные методы ускорения электронов: современное состояние и перспективы // Успехи физических наук. — 2015. — Т. 185, № 1. — С. 89—96.
2. *Nakajima K.* Laser-Driven Plasma Electron Acceleration and Radiation // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016. — Т. 09. — С. 19—61.
3. Directions in plasma wakefield acceleration / B. Hidding [и др.] // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2019. — Т. 377. — С. 20190215.
4. *Vay J.-L., Lehe R.* Simulations for Plasma and Laser Acceleration // Reviews of Accelerator Science and Technology. — 2016. — Т. 09. — С. 165—186. — ISSN 1793-6268.
5. *Lotov K. V.* Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators // Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams. — 2003. — Т. 6, № 6. — С. 061301.
6. *Sosedkin A. P., Lotov K. V.* LCODE: A parallel quasistatic code for computationally heavy problems of plasma wakefield acceleration // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2016. — Т. 829. — С. 350—352.
7. *Вшивков В. А., Терехов А. В.* О самодействии в методе частиц в ячейках // Вычислительные Методы И Программирование: Новые Вычислительные Технологии. — 2008. — Т. 9, № 1. — С. 48—57.
8. Numerical methods for instability mitigation in the modeling of laser wakefield accelerators in a Lorentz-boosted frame / J. L. Vay [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2011. — Т. 230, № 15. — С. 5908—5929.
9. *Vshivkov V., Romanov D., Snytnikov V.* The problem of spontaneous heating of a model plasma in the method of particles // Computational technologies. — 1999. — Т. 4, № 3. — С. 62—72.

10. *Birdsall C. K., Langdon A. B., Langdon A. B.* Plasma Physics via Computer Simulation. — 1991.