

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет: **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра: **ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ**

Направление подготовки: **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Куршакова Владислава Андреевича

Тема работы: Исследование процесса обращения магнитного поля в  
плазме с помощью полностью кинетического численного 2D  
моделирования

«К защите допущена»

И.О. заведующего кафедрой

к.ф.-м.н.

с.н.с., ИЯФ СО РАН

Научный руководитель

к.ф.-м.н.

с.н.с., ИЯФ СО РАН

Сковородин Д.И./\_\_\_\_\_

(подпись, МП)

Анненков В.В./\_\_\_\_\_

(подпись, МП)

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Дата защиты: «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

Новосибирск — 2022 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Моделирование обращения поля с использованием явной схемы</b>	<b>7</b>
1.1 Описание явной схемы . . . . .	7
1.2 Упрощённые модели тока . . . . .	9
1.2.1 Модель с сеточно заданным током . . . . .	9
1.2.2 Модель макрочастиц с нарастающей плотностью . . . . .	11
1.2.3 Модель ион-электронных пар . . . . .	12
1.3 Моделирование обращения поля . . . . .	13
1.3.1 Рождение пар внутри кольца . . . . .	14
1.3.2 Рождение пар внутри сегмента окружности . . . . .	15
<b>2 Исследование неявной схемы</b>	<b>20</b>
2.1 Описание неявной схемы . . . . .	20
2.2 Циклотронное вращение электрона . . . . .	23
2.3 Определение области устойчивости неявной схемы . . . . .	25
<b>Заключение</b>	<b>29</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>30</b>

# Введение

Формирование в плазме конфигурации с обращённым полем (field-reversed configuration, FRC) более шестидесяти лет рассматривается как альтернативное решение при создании термоядерного реактора [1]. В термоядерных реакторах более высокое давление плазмы  $P$  означает большее количество термоядерных столкновений и, следовательно, большую мощность синтеза. При этом формирование области с уменьшенным или даже обращённым магнитным полем  $B$  способствует удержанию термоядерной плазмы при высоком давлении. Интерес к созданию в плазме такой конфигурации вызван конструктивной простотой открытых линейных магнитных ловушек, наличием естественного аналога дивертору в токамаках, а также чрезвычайно высоким плазменным  $\beta = 8\pi P / B^2$ .

Исследуются разные способы формирования конфигурации с обращённым полем. На установке NUCTE-III (Nihon University Compact Torus Experiment-III) в Токио, Япония [2], сформированный  $\theta$ -пинчем компактный тороид транспортируется в секцию удержания, где захватывается магнитной ловушкой. Коллектив установки C-2 (TAE Technologies) [3], США, исследует создание FRC посредством слияния двух заранее сформированных плазмоедов, с возможностью последующего поддержания конфигурации с помощью атомарной инжекции. Актуальной схемой создания FRC является схема с вращающимся магнитным полем. Такая схема реализована в Принстоне, США, на установках PFRC (Princeton field-reversed configuration) и PFRC-2 [4]. Сейчас в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН запущена новая установка КОТ [5] (Компактный Осесимметричный Тороид) для того, чтобы исследовать возможность обращения поля с помощью внеосевой атомарной инжекции в аксиально-симметричную открытую магнитную ловушку. Перезарядка атомов пучка в предварительно созданной мишенной плазме приводит к созданию высокоэнергичных

ионов и электронов. Электроны при этом оказываются замагничены и остаются вблизи места рождения, а ионы, обладают значительно большим ларморовским радиусом. Можно подобрать энергию атомарного пучка так, что ларморовский радиус образующихся ионов сопоставим с радиусом плазмы. Таким образом становится возможным накопление азимутального тока. При достаточно большой мощности инжекции этот ток может ослабить и даже обернуть внешнее магнитное поле.

Последние эксперименты по созданию конфигурации с обращённым полем с помощью внеосевой атомарной инжекции проводились на открытой ловушке 2ХИВ [6], однако в этих экспериментах не удалось обратить поле, хотя плазменное бета достигло большого значения,  $\beta = 0,9$ . Такой результат мог быть обусловлен недостаточной мощностью инжекции нейтральных пучков или же развитием плазменных неустойчивостей, приводящих к разрушению FRC. Чтобы решить первую проблему, на установке КОТ используются атомарные инжекторы, способные обеспечить в два раза более высокую плотность ионного тока, чем на установке 2ХИВ, а для изучения неустойчивостей потребуется не только создать локальные диагностики, но и развить численные методы, позволяющие анализировать основные процессы во время формирования FRC. Изучение плазмы в такой конфигурации привлекательно не только уникальной физикой явлений, но и масштабируемостью результатов на более крупные установки с термоядерными параметрам вроде ГДМЛ (ГазоДинамическа Многопробочная Ловушка) [7].

Для изучения FRC с помощью численных методов существует ряд препятствий. При формировании конфигурации с обращённым полем в плазме происходит образование резких градиентов магнитного поля, которые необходимо разрешать с помощью пространственной сетки. Также в этом процессе участвуют сразу несколько временных масштабов: быстрые электронные и медленные ионные, – поэтому нужно либо разрешать электронную динамику, увеличивая время моделирования, либо рассматривать



упрощённые модели описания электронов.

Кинетические методы на основе частиц в ячейках (particle-in-cell, PIC) являются одними из наиболее подробных инструментов для численного моделирования плазмы. Тем не менее они крайне ресурсоёмки из-за чего их использование ограничено. Поэтому, при изучении FRC, обычно используются упрощённые модели. Наиболее простой моделью является двухкомпонентная плазма, где ионы моделируются с помощью кинетического PIC-подхода, а электроны рассматриваются как проводящая жидкость [8,9], что позволяет выбрать большие шаги вычислительной сетки, разрешая только ионную динамику. При этом оказывается упущена электронная динамика и некорректно описывается центральная область, где магнитное поле почти нулевое. Более детальными являются гирокинетические модели, однако они также требуют наличия магнитного поля, а в области околонулевого поля используют обычный PIC-метод [10]. Отдельно стоят работы, рассматривающие ослабление ограничений на временной и пространственный шаг PIC-схем, путём создания неявных схем [11]. Решение неявных разностных уравнений позволяет увеличить шаг сетки и повысить устойчивость вычислительной схемы, сохраняя преимущества кинетического подхода.

Для полномасштабного моделирования процесса обращения магнитного поля на установке КОТ необходим трёхмерный PIC-код с реализованным алгоритмом ионизации атомарного пучка, позволяющий моделировать миллисекундную длительность эксперимента. При этом накопление азимутального тока, необходимого для формирования FRC, также должно занимать миллисекундные времена. Поэтому представляет интерес возможность отделить изучение процесса накопления азимутального тока от исследования процессов обращения поля. В данной работе мы попробовали сделать это, рассмотрев различные упрощённые модели формирования азимутального тока с использованием полностью кинетической двумерной модели на основе метода частиц в ячейках (см. главу 1). Были рассмотрены

модели на основе: сеточно заданной величины ионного тока, макрочастиц с нарастающей плотностью и рождения ион-электронных пар. В главе 2 рассмотрена неявная схема и проведены тесты необходимые для определения её численной устойчивости.

# 1 Моделирование обращения поля с использованием явной схемы

В данной главе рассматривается моделирование процесса формирования FRC в двумерной геометрии с помощью явной вычислительной схемы, а также исследуются возможные способы упрощения процесса накопления азимутального тока. Обсуждается возможность задания тока ионов непосредственно в узлах вычислительной сетки, использование частиц с плавно нарастающей плотностью и модель ион-электронных пар. Сначала приведём описание используемой вычислительной схемы.

## 1.1 Описание явной схемы

В методе частиц в ячейках для описания движения плазмы необходимо одновременно решать уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

и динамические уравнения для каждой  $i$ -ой макрочастицы

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}(t, \mathbf{x}_i(t)) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}_i(t))] \right). \quad (1.3)$$

Вводя дискретную сетку в пространстве для описания непрерывных величин (сеточные индексы в общем виде обозначены как  $g$ ) и записывая разностные аналоги уравнений при помощи схемы с перешагиванием, получим

$$\mathbf{B}_g^{n+1/2} = \mathbf{B}_g^{n-1/2} - c\Delta t \operatorname{rot}_g \mathbf{E}_g^n, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{E}_g^{n+1} = \mathbf{E}_g^n - 4\pi\Delta t \mathbf{J}_g^{n+1/2} + c\Delta t \operatorname{rot}_g \mathbf{B}_g^{n+1/2}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \mathbf{v}_i^{n+1/2} \Delta t, \quad (1.6)$$

$$\frac{\mathbf{p}_i^{n+1/2} - \mathbf{p}_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_g^n(\mathbf{x}_i^n) + \frac{\mathbf{p}_i^{n+1/2} + \mathbf{p}_i^{n-1/2}}{\gamma_i^n m c} \times \mathbf{B}_g^n(\mathbf{x}_i^n) \right), \quad (1.7)$$

где  $e$ ,  $m$  – заряд и масса частицы соответственно, которые зависят от сорта частиц (индекс опущен), поля  $\mathbf{E}_g^n(\mathbf{x}_i^n)$  и  $\mathbf{B}_g^n(\mathbf{x}_i^n)$  интерполируются на частицу с сетки. Для решения уравнений Максвелла 1.4, 1.5 используется сетка предложенная Yee [12], что позволяет достичь второго порядка точности. Дивергентные уравнения при этом используются как начальные условия. Вычисление токов для уравнения 1.5 происходит с помощью метода Езиркепова [13], который позволяет соблюдать уравнения на дивергенцию электрического поля. В описанной схеме только последнее уравнение является неявным так как содержит в правой части  $\mathbf{p}_i^{n+1/2}$ , однако алгоритм Бориса [14], также обеспечивающий второй порядок точности, позволяет разрешить это уравнение относительно нового импульса и свести всю схему к явной.

Графически последовательность вычислений внутри одного цикла по времени можно описать с помощью рисунка 1.1. Замкнутость схемы означает, что в ней нет выделенной точки для начала вычислений: как только частицы сдвинулись с начальных позиций за счёт теплового движения и создали электрический ток, их движение происходит согласно 1.4 – 1.7.

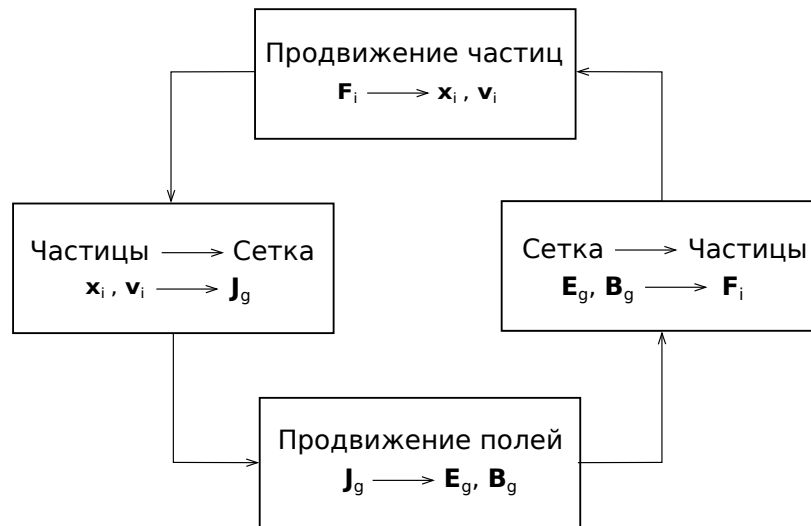


Рисунок 1.1: Вычислительный цикл явной схемы.

## 1.2 Упрощённые модели тока

Для упрощения описания атомарной инжекции, ионизации и релаксации пучка, а также отделения этих процессов от процесса обращения магнитного поля мы будем рассматривать упрощённые модели ионизации. Нами рассматривались три подхода. Первая модель основана на задании ионного тока напрямую в узлах сетки, вторая на использовании ионов с плавно нарастающей плотностью, третья, наиболее приближенная к реальности, основана на рождении ионов и электронов парами.

### 1.2.1 Модель с сеточно заданным током

Самая простая модель ионизации состоит в задании величины тока прямо на сетке, моделирование накопления азимутального тока при этом достигается за счёт плавного увеличения этой величины от нуля до заранее заданного значения. Мы выбрали профиль плотности, удовлетворяющий условиям гладкости, чтобы не возникало особенностей при решении уравнений Максвелла и установили его на сетку (см. рисунок 1.2).

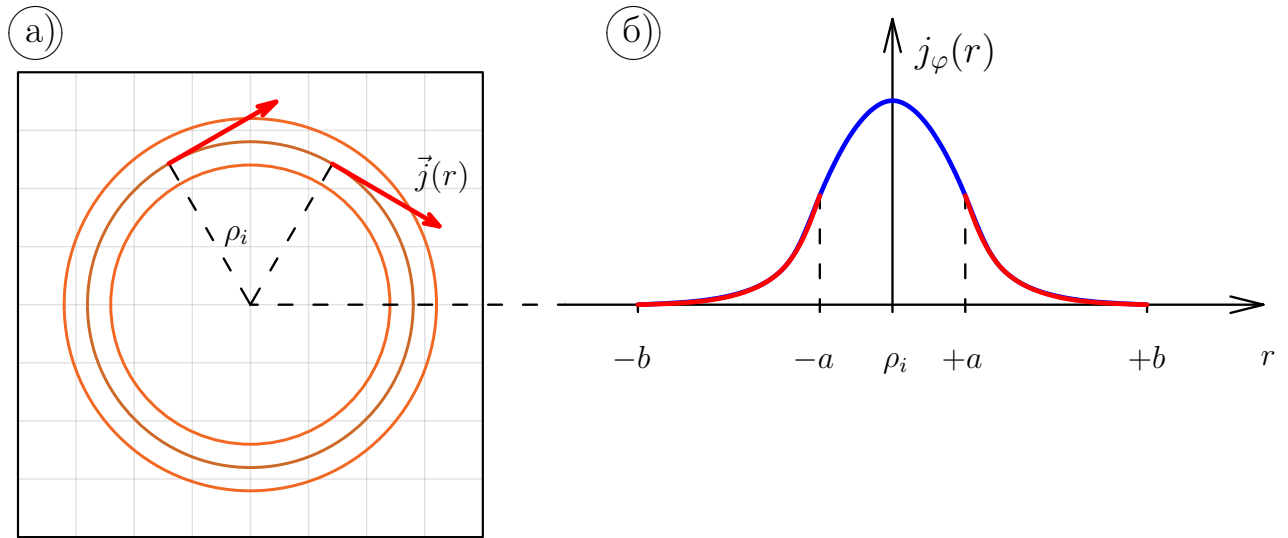


Рисунок 1.2: а) — вид расчётной области с модельным током, б) — профиль модельного тока  $j_\varphi(r)$ .  $\rho_i$  — ларморовский радиус ионов.

Расчёты проводились в два этапа: без плазмы, чтобы увидеть насколько магнитное поле ослабляется за счёт только ионного пучка, затем с плазмой. При выборе такой модели ионизации, на обоих этапах видно образование нефизичной аксиальной структуры. На рисунке 1.3 приведено электрическое поле, созданное пучком, при расчётах без плазмы.

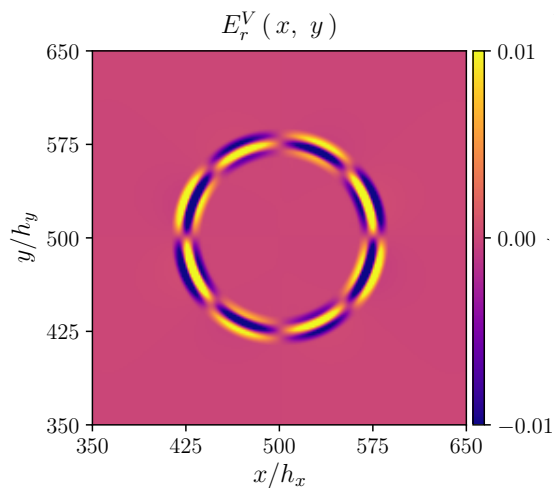


Рисунок 1.3: Электрическое поле от ионного пучка в вакууме.

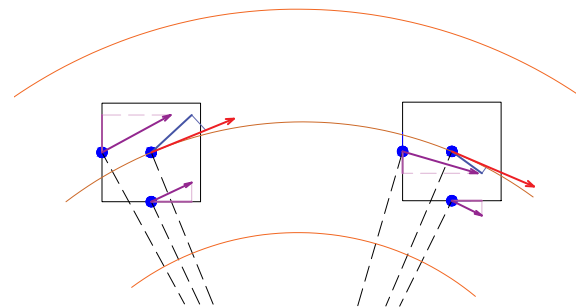


Рисунок 1.4: О возникновении азимутальной структуры.

Проблема оказалась связана с тем, что в декартовой геометрии, из-за выбора сетки  $Y_{ee}$ , происходит пространственное разделение компонент то-

ка и электромагнитных полей. На рисунке 1.4 точками обозначены узлы компонент тока, стрелками вдоль угла величина  $j_\varphi(r)$  в соответствующих узлах, а отрезком в центре ячейки — вычисленный по расставленным компонентам вектор тока. Так как восстановленный ток в центральном узле не совпадает с азимутальным, возникает радиальная компонента, вместе с тем при переходе от одной ячейки к другой, меняется величина азимутального тока, приходящегося на узлы ячейки, отчего возникает такая структура.

Тем не менее, такой подход оказалось возможным использовать при моделировании осевого сечения в двумерной декартовой геометрии. Ионный ток тогда представляет собой столб конечной ширины, и в этом случае отсутствуют особенности при расстановке токов. Результаты моделирования осевого сечения приведены на рисунках 1.5, 1.6.

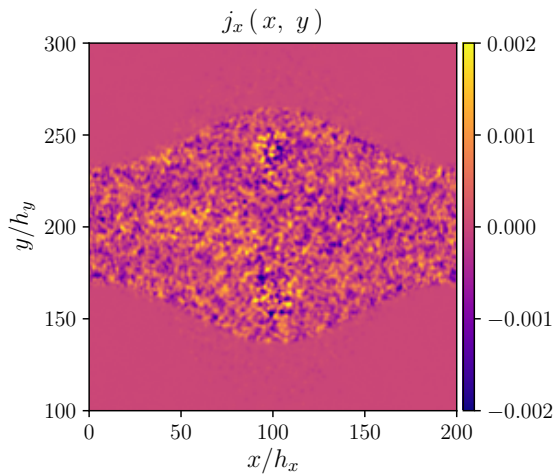


Рисунок 1.5: Моделирование осевого сечения с плазмой.

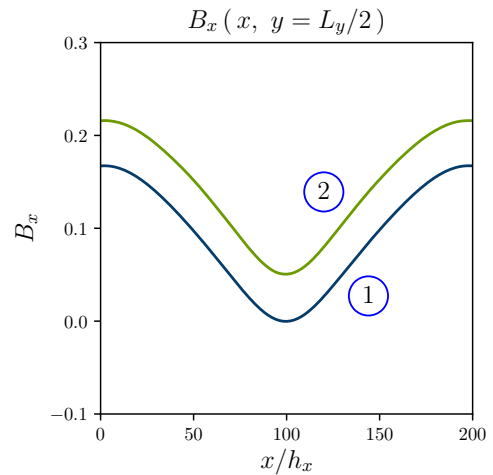


Рисунок 1.6: Магнитное поле на оси симметрии: 1) — без плазмы, 2) — с плазмой.

## 1.2.2 Модель макрочастиц с нарастающей плотностью

Для того чтобы избежать формирования нефизичной аксиальной структуры при моделировании поперечного сечения была рассмотрена модель,

использующая макрочастицы. Накопление тока при этом можно моделировать двумя способами: либо увеличением плотности, приходящейся на частицу, либо ростом числа модельных частиц.

В данной модели, для экономии числа макрочастиц, был рассмотрен первый способ. Нами использовались ионы, плотность которых нарастала со временем по тому же закону, что и в случае с жёстким током. Эти ионы расставлялись внутри кольца с направленной вдоль угла скоростью и температурной добавкой.

Использование частиц действительно позволило избежать формирования нефизичной структуры связанной с сеткой (см. рисунки 1.7, 1.8). Однако в такой модели отсутствуют электроны пучка, которые должны оказывать существенное влияние на эволюцию системы.

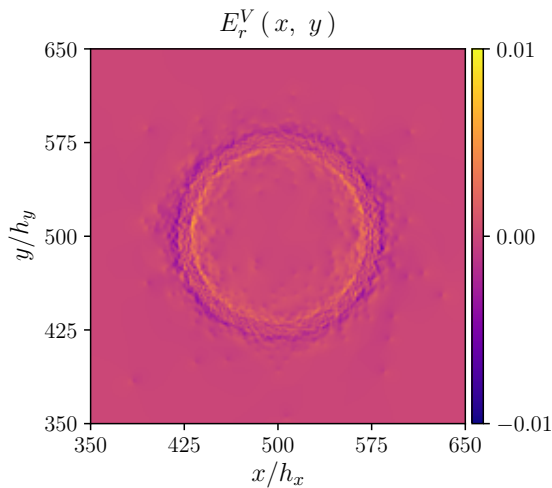


Рисунок 1.7: Электрическое поле от ионного пучка в вакууме.

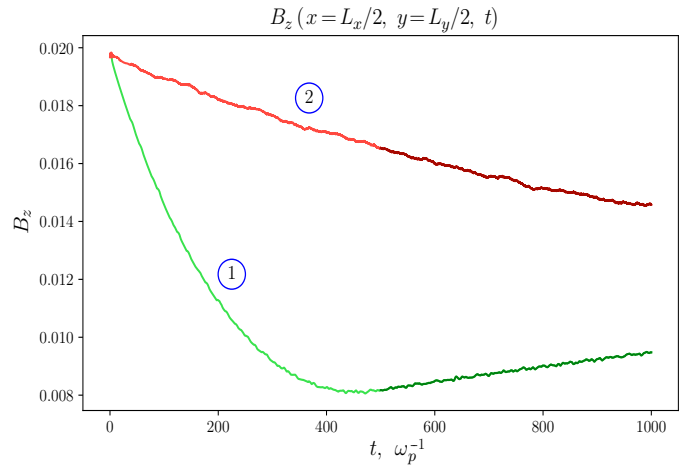


Рисунок 1.8: Магнитное поле в центре вычислительной области: 1) — без плазмы, 2) — с плазмой.

### 1.2.3 Модель ион-электронных пар

Наиболее реалистичной моделью ионизации является рождение ион-электронных пар. Накопление азимутального тока при таком подходе обес-



печивается увеличением числа модельных частиц до тех пор, пока плотность не будет равна заранее заданной.

Мы помещали ион и электрон на некоторый радиус  $\rho$ , после чего задавали им азимутальные скорости исходя из равенства

$$v_i = \Omega_i \rho, \text{ где } \Omega_i = \frac{e_i B}{m_i c},$$

а скорости электронов имели тепловую добавку.

Такую модель можно упростить сильнее, если после рождения ионы будут вращаться, строго по окружности с радиусом равным  $\rho$  в течение всего времени моделирования, чувствуя только невозмущённое магнитное поле.

### 1.3 Моделирование обращения поля

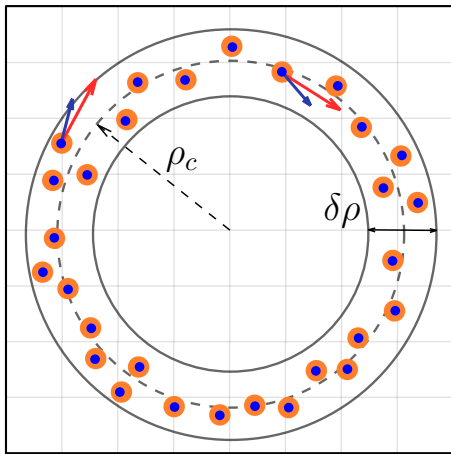


Рисунок 1.9: Появление пар внутри кольца.

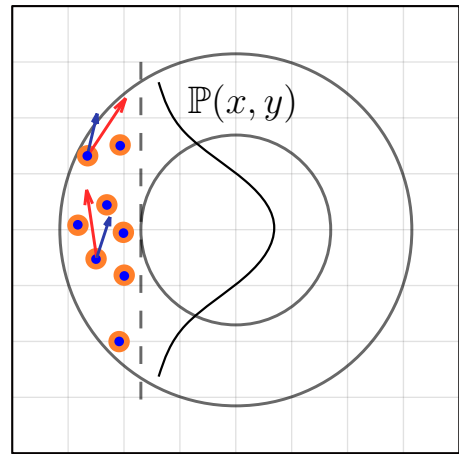


Рисунок 1.10: Рождение пар внутри сегмента окружности.

В этой части рассматриваются результаты моделирования с использованием упрощённой модели ионизации, описанной в пункте 1.2.3. Исследовано два способа рождения ион-электронных пар: равномерное появление внутри кольца и внутри сегмента окружности с неравномерной вероятностью.

стью рождения. Схемы вычислительной области для первого и второго случая иллюстративно отображены на рисунках 1.9, 1.10.

### 1.3.1 Рождение пар внутри кольца

Добавив новую модель ионизации в реализованную явную схему, были проведены расчёты для поперечного сечения FRC ориентируясь на параметры установки КОТ. Ширина вычислительной области 1 м, отражающие граничные условия, вакуумное магнитное поле  $B_0 = 0,2$  Тл. Радиус мишенной плазмы 9,3 см, её плотность  $n_0 = 10^{13}$  см $^{-3}$ , центральный радиус кольца инжектируемых ионов  $\rho_c = 6,7$  см, ширина кольца  $\delta\rho = 5,0$  см, а скорость ионов на центральном радиусе  $v_i(\rho_c) = 1,8 \cdot 10^8$  см/с. При этом скорость изменяется линейно внутри кольца, для удерживания ионов на окружности с радиусом равным расстоянию от места рождения до центра. Плотность ионного тока  $n_b \approx 9 n_0$  выбиралась такой, чтобы за заданное время инжекции  $\tau = 1,4 \cdot 10^{-9}$  с магнитное поле в вакууме заведомо обращалось. Шаг пространственной сетки  $\Delta x = 0,1 c/\omega_p \equiv 1,7 \cdot 10^{-2}$  см, шаг временной сетки  $\Delta t = 0,05 \omega_p^{-1} \equiv 2,8 \cdot 10^{-13}$  с, а суммарное время моделирования  $T = 62500 \cdot \Delta t = 1,8 \cdot 10^{-8}$  с.

Результаты расчётов приведены на рисунке 1.11, величины отмеченные чертой усреднены по углу. На рисунке также приведены траектории нескольких пробных частиц, пройденные за 2,8 нс, на фоне электрического поля. Как видно из рисунка, магнитное поле в центре при расчётах с плазмой почти не уменьшается. Это происходит из-за того, что электроны плазмы и пучка значительно компенсируют ток ионов в области пучка за счёт дрейфа в возникающем радиальном электрическом и магнитном поле. Кроме того, в данной модели электроны возникают сразу по всей окружности, что противоречит предположению об их замагниченности в области взаимодействия атомарного пучка с плазмой.

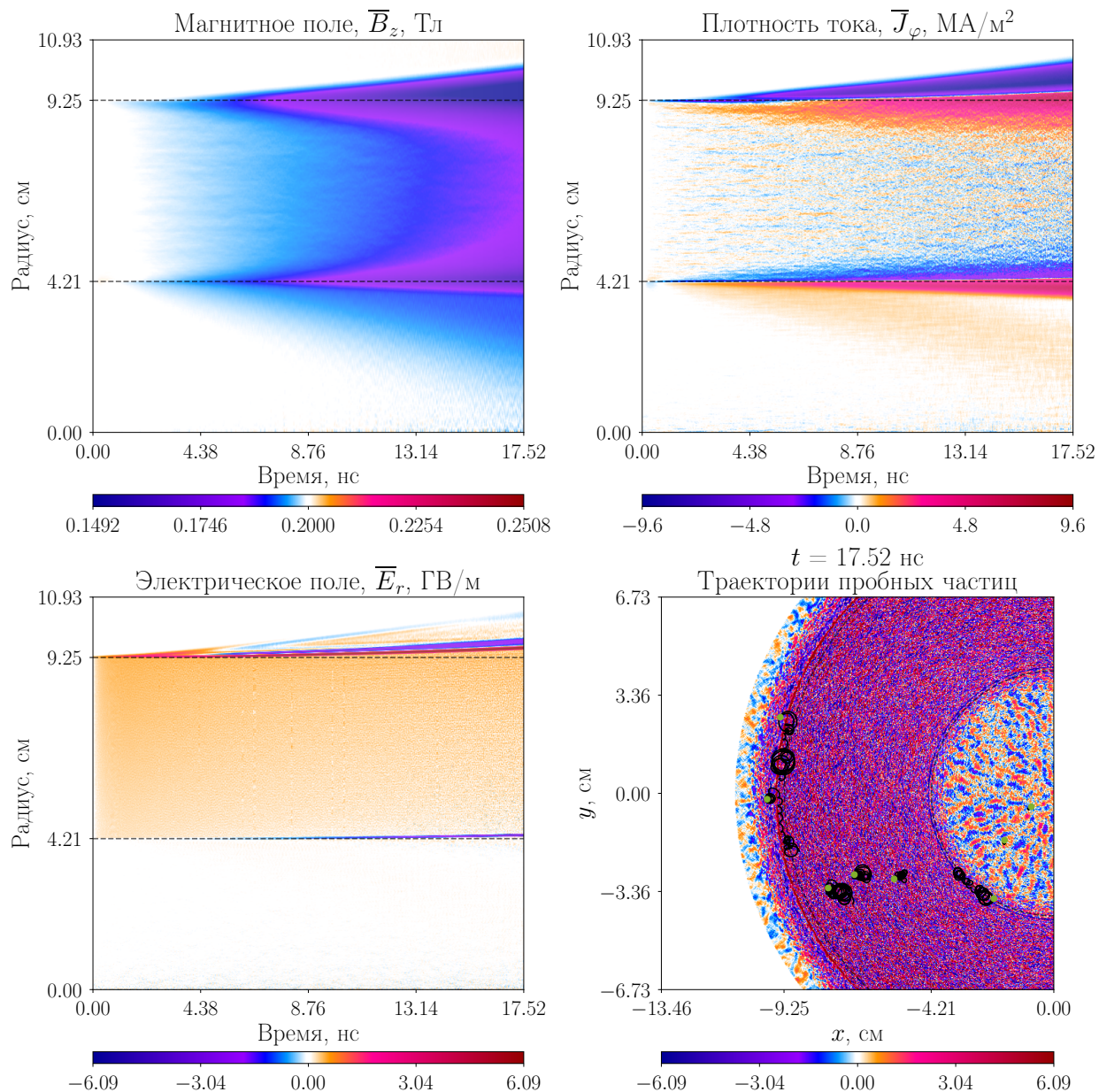


Рисунок 1.11: Результаты моделирования при рождении пар на кольце.

### 1.3.2 Рождение пар внутри сегмента окружности

Как было отмечено, проблема слабого обращения поля связана с рождением ион-электронных пар равномерно по всей окружности, однако электроны должны оставаться вблизи места рождения, замагниченными, поэтому более реалистично рассматривать рождение пар только в участке мишенной плазмы. На установке КОТ инжекторы будут стоять так, что прицельный параметр инжектируемых частиц 10 см [7]. В связи с этим мы рассматриваем рождение пар в сегменте окружности, а вероятность рож-

дения  $\mathbb{P}(x, y)$  (см. рисунок 1.10) равна нулю на периферии плазмы и изменяется по косинусу внутри сегмента, суммарная вероятность рождения в сегменте окружности равна единице.

Проблема при использовании такой модели состоит в том, что период циклотронного вращения инжектируемых ионов слишком велик,  $T_i = 3,3 \cdot 10^{-7}$  с. Так, на один полный оборот ионов необходимо  $T_i / \Delta t \approx 1,2 \cdot 10^6$  шагов по времени при использовании  $\Delta t = 0,05 \omega_p^{-1} \equiv 2,8 \cdot 10^{-13}$  с. Если же увеличивать шаг по времени, вычислительная схема станет неустойчивой. Поэтому, мы рассмотрели синтетические параметры, приведённые далее в плазменных единицах: фиксировав значение магнитного поля  $B = 0,8 m_e c \omega_p / e$ , диаметр плазмы  $10 c / \omega_p$  и период ларморовского вращения модельных ионов  $1000 \omega_p^{-1}$ , – мы подобрали их  $v_i \approx 0,03 c$  и  $m_i \approx 127 m_e$ . Задание скорости частиц проводилось также, как и в разделе 1.3.1, но с учётом меньшей массы  $m_i$ . Ширина нейтрального пучка  $\delta\rho = 5 c / \omega_p$ . С такими параметрами явная схема позволяет моделировать более десяти периодов вращения модельных ионов.

На рисунке 1.14 приведён набор из нескольких моментов времени для итоговой плотности пучка  $3 n_0$  и времени инжекции  $6000 \omega_p^{-1}$ , где шляпками обозначены безразмерные величины. Как и в случае рождения пар на кольце, в плазме возникает радиальное электрическое поле, в котором дрейфуют электроны плазмы и пучка, компенсируя ток ионов. Тем не менее, в этих расчётах электроны действительно в первые моменты времени остаются в области рождения, до тех пор пока не происходит нарастание радиального электрического поля. На рисунке 1.12 приведена эволюция усреднённых по углу величин радиальной компоненты электрического тока, азимутальной компоненты плотности тока и  $z$ -компоненты магнитного поля. К моменту конца расчётов формируется равновесная конфигурация, которая вращается как целое, магнитное поле в центре уменьшается на 40% (до  $\widehat{B}_z \approx 0,5$ ).

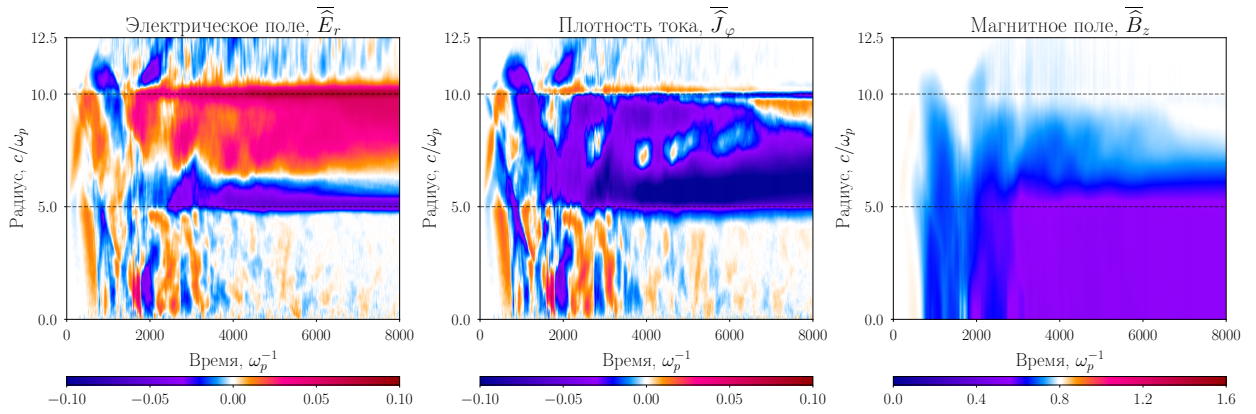


Рисунок 1.12: Эволюция величин усреднённых по углу для случая  $3 n_0$ .

Чтобы исследовать возможность большего ослабления магнитного поля, мы взяли такие же геометрические параметры и время инжекции и провели сравнение нескольких пучков с разной итоговой плотностью внутри кольца:  $1 n_0$ ,  $3 n_0$ ,  $6 n_0$  и  $10 n_0$ . На рисунке 1.13 показана зависимость от времени величины магнитного поля усреднённой по кругу с радиусом  $5 c/\omega_p$ , и радиальной компоненты электрического поля, усредненной по кольцу с внутренним и внешним радиусом  $5 c/\omega_p$  и  $10 c/\omega_p$  соответственно. Голубым цветом на рисунке отмечена плотность  $1 n_0$ , оранжевым –  $3 n_0$ , зелёным –  $6 n_0$  и красным –  $10 n_0$ , пунктирной линией обозначена величина магнитного поля при инжекции в вакуум только ионной компоненты пучка. Из этого сравнения видно, что с увеличением плотности увеличивается и электрическое поле внутри кольца, кроме того наблюдается насыщение: между кривыми с  $6$  и  $10 n_0$  почти нет разницы. Рост радиальной компоненты электрического поля приводит к увеличению дрейфовой скорости электронов и бóльшей компенсации тока ионов. Это приводит к не такому сильному уменьшению магнитного поля как при моделировании азимутального тока в вакууме. При уменьшении плотности до  $1 n_0$ , однако, не наблюдается столь значительный рост электрического поля и удаётся понизить магнитное поле до спрогнозированной величины.

Остаётся открытым вопрос образования радиального электрического

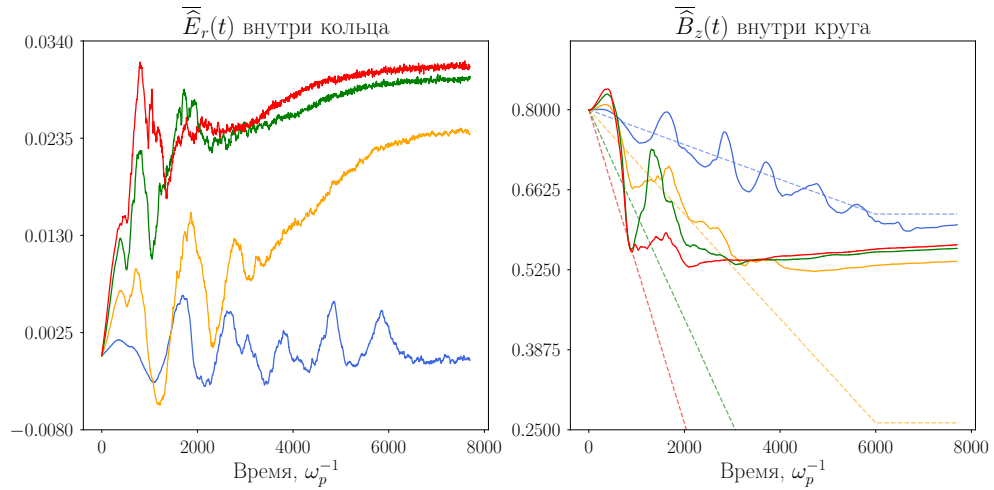


Рисунок 1.13: Сравнение расчётов с разной плотностью. Голубая кривая –  $1 n_0$ , оранжевая –  $3 n_0$ , зелёная –  $6 n_0$ , красная –  $10 n_0$ .

поля. С одной стороны в данной модели ионный пучок инжектируется очень быстро, с другой стороны в формирующемся радиальном электрическом поле ионы пучка также должны испытывать дрейф в скрещенных полях. Для проверки этих предположений необходимо иметь возможность моделировать значительно большие времена инъекции.



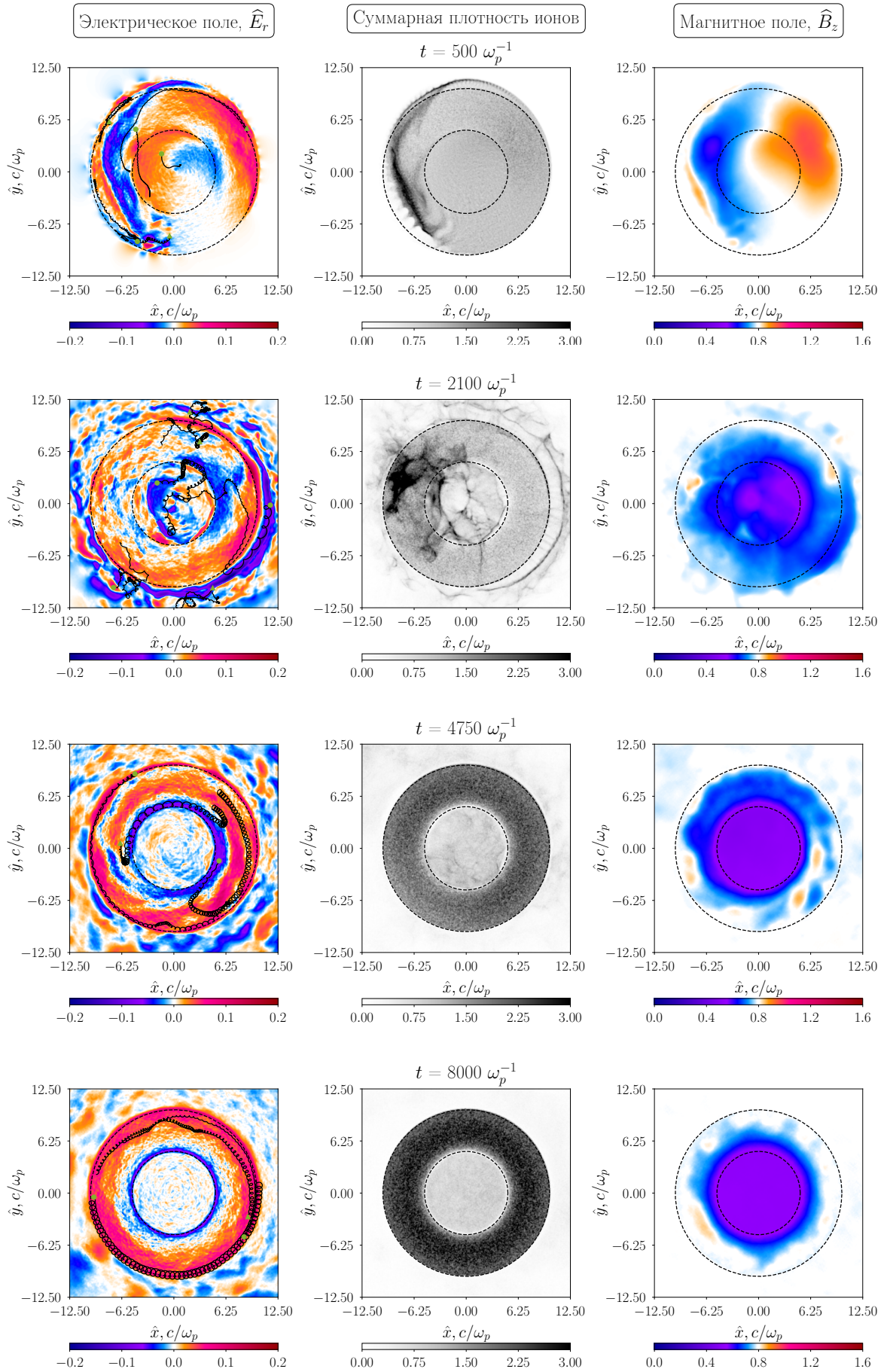


Рисунок 1.14: Набор нескольких последовательных моментов времени  $t$  для случая  $3 n_0$ .

## 2 Исследование неявной схемы

В данной главе обсуждается другой подход к численному моделированию плазменных систем с широким диапазоном временных масштабов. Рассматривается релятивистская неявная PIC-схема, использующая моменты функции распределения, для продвижения электромагнитных полей на новый временной шаг. Нами проведён тест вычислительной схемы на основе циклотронного вращения для определения её точности, а также рассматривается область устойчивости схемы в зависимости от временного и пространственного шага.

### 2.1 Описание неявной схемы

Неявные PIC-схемы используют те же уравнения 1.1 – 1.3, но после их дискретизации справа остаются величины, зависящие от нового временного шага, в связи с этим уравнения решаются итеративно. Проблему составляет и то, что уравнения нужно решать совместно, при этом возникает необходимость ресурсоёмких итераций между продвижением частиц и решением уравнений на поля. В этой работе мы рассматривали неявную релятивистскую схему, которая использует предсказанные моменты функции распределения, чтобы избежать этих итераций [15].

Прежде чем рассматривать схему подробнее, кратко опишем действия внутри вычислительного цикла. На первом этапе по известному распределению частиц с  $\mathbf{x}_i^n, \mathbf{v}_i^n$  вычисляются вспомогательные моменты  $\hat{\rho}(\mathbf{x}_g), \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_g), \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_g), \hat{\mu}(\mathbf{x}_g)$ . Шляпкой здесь и далее отмечено то, что величина вычисля-



ется по известному на  $n$ -м шаге распределению частиц. Далее вычисляется электрическое поле на промежуточном шаге  $n+\theta$  и магнитное поле на шаге  $n+1$ , после чего частицы продвигаются на шаг  $n+1$  с учётом найденных полей. На последнем этапе с помощью линейной интерполяции электрическое поле продвигается на шаг  $n+1$ . Теперь, в отличие от явной схемы, в вычислительном цикле существует определённая последовательность действий, это отражено на рисунке 2.1.

Параметр фильтрации  $\theta \in [1/2, 1]$  определяет распространение электромагнитных волн. При  $\theta = 1/2$ , схема будет второго порядка точности по времени; если же  $\theta \in (1/2, 1]$ , то схема становится диссипативной и понижает порядок точности.

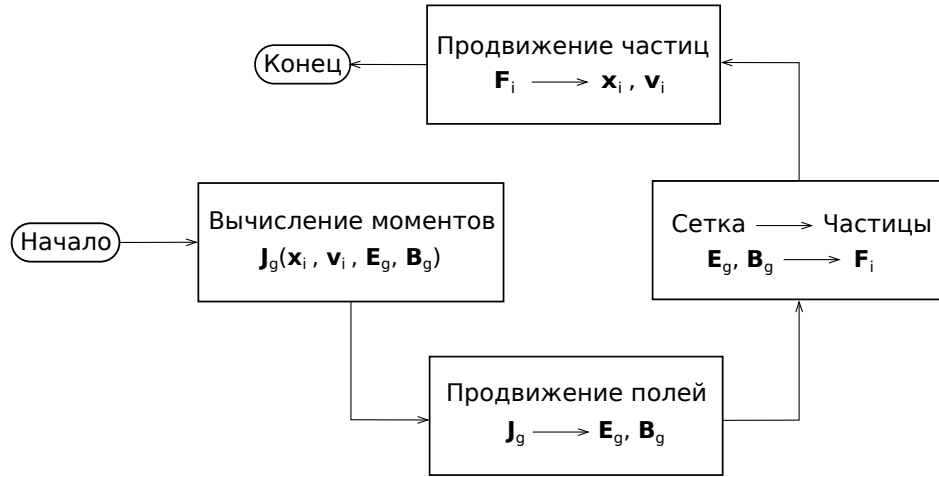


Рисунок 2.1: Последовательность вычислений в описанной неявной схеме.

Теперь приведём описание каждого этапа вычислений. Необходимые для вычисления электрического поля моменты находятся по формулам

$$\rho(\mathbf{x}_g) = \sum_{s,i} e_s W(\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_i^n), \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_g) = \sum_{s,i} e_s \hat{\mathbf{v}}_i W(\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_i^n), \quad (2.2)$$

$$\hat{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{x}_g) = \sum_{s,i} e_s \hat{\mathbf{v}}_p \hat{\mathbf{v}}_p W(\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_i^n), \quad (2.3)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}_g) = - \sum_{s,i} \frac{e_s \theta \Delta t^2}{2\varepsilon_0 m_s} \alpha_p W(\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_i^n), \quad (2.4)$$

где  $W(\mathbf{x})$  — это форма частиц, а также использовались обозначения

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{v}}_i &= \alpha_i \cdot \mathbf{p}_i^n / m_i, \quad \alpha_i = \left( \mathbf{I} + \beta'_s \mathbf{I} \times \mathbf{B}_i^n + \beta_s'^2 \mathbf{B}_i^n \mathbf{B}_i^n \right) / D_i, \\ \beta_s' &= \beta_s / \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \frac{\beta_s}{c^2} \mathbf{E}_i^n \cdot \mathbf{v}_i^n + \gamma_i^n, \quad D_i = \Gamma_i (1 + (\beta_s' \mathbf{B}_i^n)^2), \end{aligned}$$

здесь  $\beta_s = e_s \Delta t / 2m_s$ . Момент  $\widehat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}_g)$  вычисляется отдельно, по формуле

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = \rho - \theta \Delta t \nabla \cdot \left( \widehat{\mathbf{J}} - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}} \right). \quad (2.5)$$

Как только моменты вычислены, находится электрическое поле  $\mathbf{E}^{n+\theta}$  на промежуточном шаге. Для этого нужно решить уравнение, полученное из системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} (c\theta\Delta t)^2 &\left[ -\Delta \mathbf{E}^{n+\theta} + \nabla \nabla \cdot \left( \widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{E}^{n+\theta} \right) \right] + (\mathbf{I} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}) \mathbf{E}^{n+\theta} \\ &= \mathbf{E}^n + c^2 \theta \Delta t \left( \nabla \times \mathbf{B}^n - \mu_0 \widehat{\mathbf{J}} + \frac{\mu_0 \Delta t}{2} \nabla \cdot \widehat{\mathbf{\Pi}} \right) \\ &\quad - (c\theta\Delta t)^2 \nabla \widehat{\boldsymbol{\rho}} / \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как получившееся уравнение — линейная система, можно найти решение с заранее заданной точностью с помощью метода GMRES [16]. После того как найдено электрическое поле, находятся скорости из дискретизированного уравнения **1.3**

$$\frac{\mathbf{p}_i^{n+1} - \mathbf{p}_i^n}{\Delta t} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_i^{n+\theta}(\mathbf{x}_i^{n+1/2}) + \frac{1}{mc} \frac{\mathbf{p}_i^{n+1} + \mathbf{p}_i^n}{\gamma_i^{n+1} + \gamma_i^n} \times \mathbf{B}_i^n(\mathbf{x}_i^{n+1/2}) \right) \quad (2.7)$$

(индексы сорта частиц опущены). В отличие от классической схемы с перешагиванием, это уравнение нельзя разрешить относительно  $\mathbf{p}_i^{n+1}$  так как присутствует нелинейность в виде  $\gamma_i^{n+1}$ , а также в виде зависимости ин-

терполированных на частицу электрического и магнитного поля от координаты на новом шаге  $\mathbf{x}_i^{n+1/2}$ . В связи с этим 2.7 решается итеративно, с помощью метода Ньютона-Крылова [17]. Координаты частицы во время решения уравнения и после, для их перемещения, вычисляются согласно уравнению

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \frac{\Delta t}{m} \frac{\mathbf{p}_i^{n+1} + \mathbf{p}_i^n}{\gamma_i^{n+1} + \gamma_i^n}. \quad (2.8)$$

Однако заметим, что использование релятивистских уравнений движения избыточно при моделировании установки КОТ.

Последним шагом вычислительной схемы является линейная интерполяция электрического поля на шаг  $n + 1$

$$\mathbf{E}^{n+1} = (\mathbf{E}^n + (\theta - 1)\mathbf{E}^{n+\theta})/\theta. \quad (2.9)$$

Описанная схема была реализована и проверена в статье [18]. Ниже мы рассматриваем необходимые для наших вычислений тесты данной схемы, чтобы оценить её работоспособность. Рассмотрено ларморовское вращение электрона в магнитном поле с различным временным шагом относительно периода вращения электрона:  $T_e/\Delta t = 270$  и  $T_e/\Delta t = 0.26$ , а также моделирование плазмы в вакууме при различных пространственных и временных сетках:  $\Delta x \otimes \Delta t = [1,65 \cdot 10^{-5} \div 6,59 \cdot 10^{-4} \text{ м}] \otimes [2,78 \cdot 10^{-13} \div 7,11 \cdot 10^{-11} \text{ с}]$

## 2.2 Циклотронное вращение электрона

В процессе формирования конфигурации с обращённым полем участвуют сразу несколько временных масштабов: от самого короткого, отвечающего циклотронному вращению электронов, до длительных, описывающих динамику ионов. Выбор временного шага при этом состоит между подробностью описания движения электронов и длительностью самих расчётов. Так как основной интерес представляет ионная динамика, важно рассмот-

реть насколько правильно будет описываться быстрое циклотронное вращение электронов при относительно крупном шаге по времени.

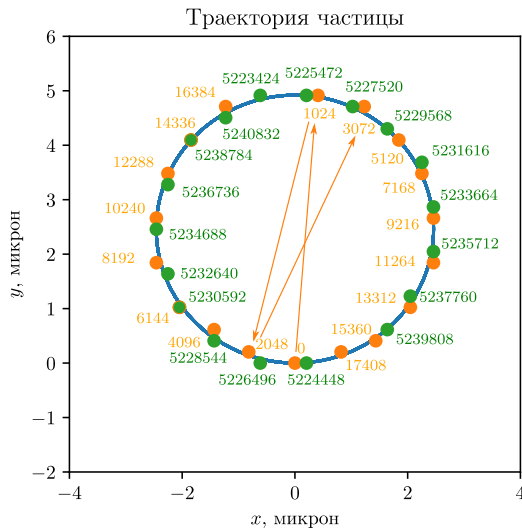


Рисунок 2.2: Траектория частицы при ларморовском вращении.

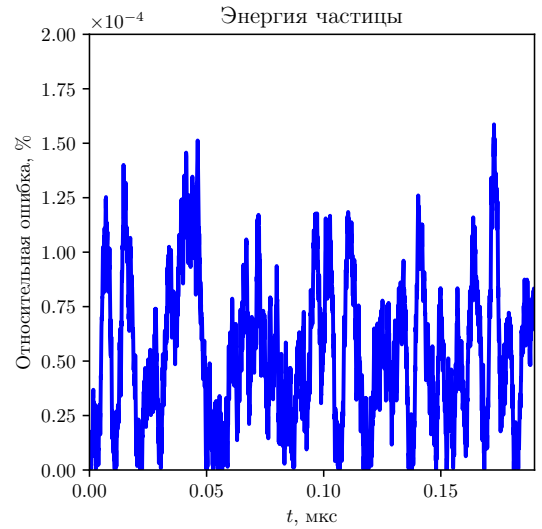


Рисунок 2.3: Относительная ошибка сохранения энергии.

Мы взяли электрон с начальной скоростью  $v_x = 0,5c$  и координатами  $(x, y) = (0, 0)$  и поместили его в магнитное поле  $B_z = 4$  Тл. После чего запустили расчёты с временным шагом  $\Delta t = 3,85 \cdot 10^{-14}$  с. В таких расчётах частица не создавала ток, так как рассматривалось её кинетическое движение, поля в связи с этим не изменялись. Выбор такого шага подробно описывает период циклотронного вращения  $T_e$ :  $T_e/\Delta t = 270$ . Синей линией на рисунке 2.2 показано примерно 20 вращений электрона, которые почти не выходят за пределы одной траектории. Далее мы взяли шаг  $1024\Delta t$ , когда циклотронный период неразличим:  $T_e/\Delta t = 0,26$ . Оранжевыми и зелёными точками показаны первые и последние 18 шагов моделирования, числами для каждой точки подписано время в единицах  $\Delta t$ . Стрелки указывают на последовательное положение частицы. Видно, что, даже при относительно большом шаге моделирования, положение частицы вычисляется корректно причём не только на первых шагах моделирования, но и

на значительно более поздних. На рисунке 2.3 изображена относительная ошибка сохранения кинетической энергии частицы в случае шага  $1024\Delta t$ , усреднённая по 100 точкам. Наблюдаемая ошибка не превышает уровня  $1,5 \cdot 10^{-4} \%$  и не имеет тенденции к росту.

## 2.3 Определение области устойчивости неявной схемы

Корректность вычислений существенно зависит от пространственного и временного шага, так как вводя дискретную сетку мы добавляем нефизические эффекты. Рассматривая сохранение энергии в тестовой задаче при различных  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ , можно установить область, где решение устойчиво.

Существует несколько ограничений при моделировании методом частиц в ячейках [19, 20]. Первое ограничение возникает естественно для явных схем и заключается в необходимости разрешать плазменные частоты:  $\max_s \omega_{ps} \Delta t < 2$ , но рассмотренная неявная схема ослабляет это ограничение [21], теперь  $v_{th,e} \Delta t < \Delta x$ . Второе ограничение возникает при введении пространственной сетки и связано с нефизическим взаимодействием мод. Так, если  $\Delta x \gg \lambda_D$ , то численная плазма начинает разогреваться, уменьшая это взаимодействие, до тех пор, пока дебаевская длина не станет порядка шага сетки. Однако, в неявной схеме можно частично подавить эту неустойчивость либо выбором  $\theta \approx 1$ , что обеспечит диссипацию энергии, либо увеличением шага по времени. Эмпирически авторами статьи [21] была получена область, где решение одновременно стабильно и точно

$$0,1 \Delta x \lesssim v_{th,e} \Delta t < \Delta x. \quad (2.10)$$

Чтобы проверить область сходимости реализованной схемы, мы рассматривали плазму с плотностью  $n_0 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и температурой 50 эВ

( $v_{th,e} \approx 10^{-2} c$ ) в периодических граничных условиях. Сохраняя число модельных частиц постоянным и выбрав  $\theta = 1$ , мы перебирали шаг временной и пространственной сетки согласно таблице 2.1. В ней красным цветом обозначена область, где нарушается условие применимости схемы, все расчёты в этой области останавливались на первом шаге из-за того, что частицы проходили более одной ячейки. Зелёным обозначена область 2.10, а жёлтым менее ограничительная, захватывающая нефизические эффекты. В этих областях расчёты останавливались по той же причине, не смотря на допустимость моделирования. Только в области, где выполняется соотношение Куранта ( $c \Delta t < \Delta x / \sqrt{3}$ ), отмеченной голубым в таблице, расчёты длятся более одного шага, но в них проявляется описанный эффект самонагрева плазмы (см. рисунок 2.4). Более того, увеличение временного шага в сторону интересующего нас для полномасштабного моделирования усиливает этот эффект.

Рост энергии в численной модели связан с тем, что уравнения для продвижения полей и частиц решаются отдельно, а связь между ними осуществляется за счёт интерполяции полей с сетки на частицу и взвешивания величин с частиц на сетку. Поэтому такого роста энергии не наблюдалось ранее, когда мы рассматривали вращение частицы в магнитном поле. Этот рост будет происходить и в явной схеме, при выборе достаточно крупной сетки, однако данная неявная схема должна подавлять эту неустойчивость. Частично решить проблему можно с помощью повышения порядка интерполяционной функции, но существенно расширить область допустимых значений  $\Delta x, \Delta t$  не удалось.

Такое значительное ограничение за счёт неустойчивости связанной с конечной сеткой на величину временного и пространственного шага, даже по сравнению с явной схемой, а также дополнительные вычислительные сложности, связанные с использованием релятивистских уравнений движения, отмеченные в конце пункта 2.1, делают эту реализацию схемы непри-

годной для моделирования полномасштабного эксперимента на установке КОТ. Дальнейшее развитие в этом направлении будет состоять в реализации другой нерелятивистской неявной схемы, которая сохраняет заряд и энергию точно [22], и внедрение этих разработок в имеющиеся коды.

Таблица 2.1: Выбор пространственного и временного шага для моделирования.

$\Delta x$ , м	$v_{th,e} \Delta t / \Delta x = (\lambda_{De} / \Delta x) \cdot (\omega_{pe} \Delta t)$										
1.65E-05	0.05	0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20	6.40	12.80	25.60	51.20
2.06E-05	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.28	2.56	5.12	10.24	20.48	40.96
4.12E-05	0.02	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.28	2.56	5.12	10.24	20.48
8.24E-05	0.01	0.02	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.28	2.56	5.12	10.24
1.65E-04	0.01	0.01	0.02	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.28	2.56	5.12
3.29E-04	0.00	0.01	0.01	0.02	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.28	2.56
6.59E-04	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.28
$\Delta t$ , с	2.78E-13	5.56E-13	1.11E-12	2.22E-12	4.44E-12	8.89E-12	1.78E-11	3.56E-11	7.11E-11	1.42E-10	2.84E-10

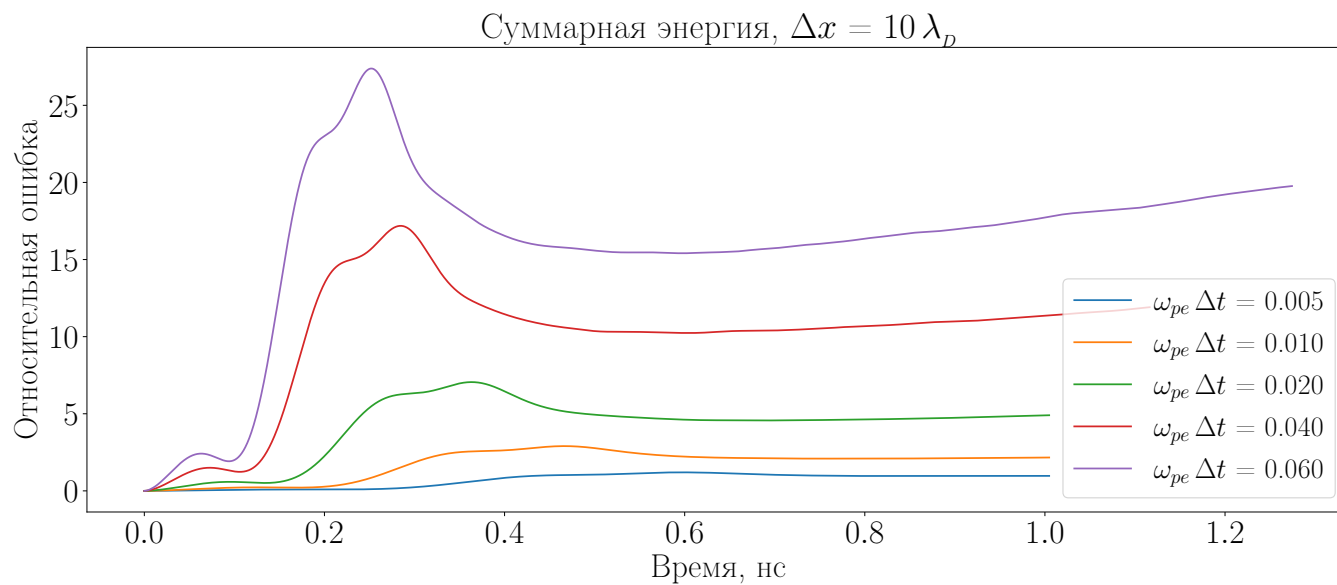


Рисунок 2.4: Проявление неустойчивости связанной с конечной сеткой.



## Заключение

Для моделирования процесса формирования конфигурации с обращённым полем отдельно от процесса ионизации и медленного накопления атомарного пучка были рассмотрены упрощённые способы описания накопления азимутального тока: сеточно заданный ионный ток, модель макрочастиц нарастающей плотности и рождение ион-электронных пар. Использование первой модели приводит к образованию нефизической аксиальной структуры; это оказалось связано с разделением в численной схеме компонент тока в пространстве. Подходы на основе частиц позволили избежать такой нереалистичной структуры, но более простой метод с плавным нарастанием плотности макрочастиц неверно описывает электронную компоненту пучка, поэтому наиболее реалистичной моделью ионизации атомарного пучка является рождение ион-электронных пар. С помощью неё промоделирован процесс формирования FRC с использованием полностью кинетического двумерного PIC-кода. Рассмотрено два возможных способа рождения пар: равномерно внутри кольца и внутри сегмента окружности с неравномерной вероятностью рождения. Рождение пар равномерно на кольце приводит значительной компенсации ионного тока за счёт дрейфа электронов плазмы и пучка в возникающем радиальном электрическом и продольном магнитном поле. При рождении ион-электронных пар на сегменте наблюдается эффект замагниченности электронов, также наблюдается рост электрического поля, приводящий к дрейфу электронов. При этом, до формирования компенсирующего тока электронов происходит видимое уменьшение магнитного поля в центре. Более того, при плотности пучка равной плотности мишенной плазмы значительный рост радиального электрического поля не наблюдался и магнитное поле изменялось до величины, аналогичной инъекции ионной компоненты пучка в вакуум.

Для преодоления трудности с разрешением быстрой электронной ди-

намики рассмотрена релятивистская неявная схема. Проведён тест циклотронного вращения электрона без создания токов и возмущения поля для определения её точности при плохом разрешении периода ларморовского вращения. Проведён так же поиск области устойчивости схемы в зависимости от пространственного и временного шага. Второй тест показал, что при значительном превышении шагом пространственной сетки дебаевской длины происходит развитие численной неустойчивости, которую тем не менее не удаётся подавить в данной реализации неявной схемы. Поэтому, наш дальнейший план — реализация другой неявной схемы, которая сохраняет заряд и энергию точно [22], и интеграция этих разработок с имеющимися кодами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Steinhauer Loren C. Review of field-reversed configurations // *Physics of Plasmas*. — 2011. — jul. — Vol. 18, no. 7. — P. 070501. — URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3613680>.
- [2] Flux amplification of a field-reversed configuration by double-sided plasmoid injection / H. Itagaki, T. Asai, M. Inomoto, Ts. Takahashi // *Physics of Plasmas*. — 2017. — aug. — Vol. 24, no. 8. — P. 082511. — URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.4996570>.
- [3] Overview of C-2W: high temperature, steady-state beam-driven field-reversed configuration plasmas / H Gota, MW Binderbauer, T Tajima et al. // *Nuclear Fusion*. — 2021. — Vol. 61, no. 10. — P. 106039.
- [4] Status and plans for the PFRC-2 device / Samuel Cohen, B Alessio, B Berlinger et al. // *APS Division of Plasma Physics Meeting Abstracts*. — Vol. 2019. — 2019. — P. UP10–099.
- [5] [Status of the experiment on magnetic field reversal at BINP](#) / P. A. Bagryansky, T. D. Akhmetov, I. S. Chernoshtanov et al. — Novosibirsk, Russia, 2016. — P. 030015. — URL: <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4964171> (online; accessed: 2021-05-28).
- [6] Field-reversal experiments in a neutral-beam-injected mirror machine / J.F. Clauser, F.H. Coensgen, D.L. Correll et al. // *Nuclear Fusion*. —

1979. — aug. — Vol. 19, no. 8. — P. 1011–1028. — URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0029-5515/19/8/002>.
- [7] Bagryansky PA, Beklemishev AD, Postupaev VV. Encouraging results and new ideas for fusion in linear traps // *Journal of Fusion Energy*. — 2019. — Vol. 38, no. 1. — P. 162–181.
- [8] Omelchenko Y. A. Formation, spin-up, and stability of field-reversed configurations // *Physical Review E*. — 2015. — aug. — Vol. 92, no. 2. — P. 023105. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.023105>.
- [9] Computer simulation of ion beam-plasma interaction / G I Dudnikova, M A Boronina, E A Genrikh, V A Vshivkov // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2019. — nov. — Vol. 1393, no. 1. — P. 012041. — URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1393/1/012041>.
- [10] Effects of equilibrium radial electric field on ion temperature gradient instability in the scrape-off layer of a field-reversed configuration / W H Wang, J Bao, X S Wei et al. // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2021. — jun. — Vol. 63, no. 6. — P. 065001. — URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6587/abf403>.
- [11] Formation of Field-Reversed-Configuration Plasma with Punctuated-Betatron-Orbit Electrons / D. R. Welch, S. A. Cohen, T. C. Genoni, A. H. Glasser // *Physical Review Letters*. — 2010. — jul. — Vol. 105, no. 1. — P. 015002. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.015002> (online; accessed: 2022-05-24).
- [12] Yee Kane. Numerical solution of initial boundary value problems in-

volving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on antennas and propagation. — 1966. — Vol. 14, no. 3. — P. 302–307.

- [13] Esirkepov T Zh. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor // Computer Physics Communications. — 2001. — Vol. 135, no. 2. — P. 144–153.
- [14] Why is Boris algorithm so good? / Hong Qin, Shuangxi Zhang, Jianyuan Xiao et al. // Physics of Plasmas. — 2013. — Vol. 20, no. 8. — P. 084503.
- [15] Formulation of the relativistic moment implicit particle-in-cell method / Koichi Noguchi, Cesare Tronci, Gianluca Zuccaro, Giovanni Lapenta // [Physics of Plasmas](#). — 2007. — apr. — Vol. 14, no. 4. — P. 042308. — URL: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.2721083>.
- [16] Saad Youcef, Schultz Martin H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and statistical computing. — 1986. — Vol. 7, no. 3. — P. 856–869.
- [17] Kelley Carl T. Solving nonlinear equations with Newton's method. — SIAM, 2003.
- [18] PICPANTHER: A simple, concise implementation of the relativistic moment implicit particle-in-cell method / Andreas Kempf, Patrick Kilian, Urs Ganse et al. // [Computer Physics Communications](#). — 2015. — mar. — Vol. 188. — P. 198–207. — URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0010465514003828>.
- [19] Hockney Roger W, Eastwood James W. Computer simulation using particles. — CRC Press, 2021.

- [20] Birdsall Charles K, Langdon A Bruce. Plasma physics via computer simulation. — CRC press, 2018.
- [21] Brackbill J.U, Forslund D.W. An implicit method for electromagnetic plasma simulation in two dimensions // [Journal of Computational Physics](#). — 1982. — may. — Vol. 46, no. 2. — P. 271–308. — URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/002199918290016X>.
- [22] Campos Pinto Martin, Pagès Valentin. A semi-implicit electromagnetic FEM-PIC scheme with exact energy and charge conservation // [Journal of Computational Physics](#). — 2022. — mar. — Vol. 453. — P. 110912. — URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002199912100807X>.