

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
« Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет » (Новосибирский государственный университет, НГУ)

Физический факультет

Квалификационная работа на соискание
степени бакалавра

Кафедра Физики Плазмы

Анненков Владимир Вадимович

Название работы:

*Вычисление инкремента неустойчивости
релятивистского пучка в горячей замагниченной
плазме в рамках точной кинетической теории.*

Научный руководитель:

Канд. физ.-мат. наук, Тимофеев Игорь Валериевич

Новосибирск – 2013

Содержание

Введение	2
1. Используемые методики	3
1.1 Новое представление тензора диэлектрической проницаемости	4
1.2 Решение дисперсионного уравнения во всём k -пространстве	5
1.3 Распределение частиц по импульсам	6
2. Полученные результаты и их анализ	7
2.1 Тензор диэлектрической проницаемости	7
2.2 Инкремент неустойчивости	8
Заключение	10
Литература	11

Введение

Система, состоящая из плазмы и движущегося в ней электронного пучка, подвержена развитию различного рода неустойчивостей. Линейная теория позволяет находить спектр неустойчивых колебаний, определять их поляризацию и скорость нарастания. Эта информация важна для построения различных моделей релаксации пучка, поскольку именно наиболее неустойчивые моды определяют дальнейшую нелинейную эволюцию системы.

В последнее время проблема вычисления инкремента неустойчивых колебаний в системе плазма-пучок является предметом активных исследований. Вопрос об эффективности релаксации электронных потоков в плазме весьма актуален как для схемы быстрого поджига мишени в инерциальном термоядерном синтезе, так и для различных астрофизических задач, таких как генерация высокоэнергетических космических лучей, гамма-вспышек, а также солнечных радио-всплесков III типа. С другой стороны, появление адекватных задаче вычислительных ресурсов позволило проводить точные вычисления, выходящие за рамки распространённых аналитических моделей, основанных на различных приближениях.

Данная проблема актуальна также и для лабораторных пучково-плазменных экспериментов. Наш интерес к проблеме связан с изучением особенностей коллективного пучково-плазменного взаимодействия в ловушке открытого типа ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН), где турбулентный нагрев плазмы осуществляется мощным релятивистским электронным пучком. Характерной особенностью этих экспериментов является наличие в плазме релятивистских надтепловых хвостов, содержащих большую часть кинетической энергии плазмы, и сильное магнитное поле. Формирование таких хвостов может существенно повлиять на скорость накачки неустойчивых колебаний и стать одной из возможных причин экспериментально наблюдаемых срывов нагрева плазмы при длительной инжекции пучка. С другой стороны, по мере прохождения пучка вглубь плазмы может существенно меняться его функция распределения, вызывая ослабление неустойчивости и влияя на профиль энерговыделения. Таким образом, для адекватного описания этих экспериментов необходимо обобщить линейный анализ пучковой неустойчивости на случай произвольных распределений частиц пучка и плазмы по импульсам.

Численные решения точного дисперсионного уравнения для неустойчивости горячего электронного пучка в горячей изотропной плазме без использования каких-либо упрощающих предположений были получены сравнительно недавно [1–3]. Анализ дисперсионного уравнения в замагниченной плазме с учетом кинетических эффектов представляет значительно более сложную задачу, требующую применения параллельных численных алгоритмов на мощных ЭВМ. В этом случае гидродинамический режим неустойчивости был изучен достаточно детально [4, 5], а кинетическое рассмотрение ограничивалось случаями строго продольного [6] или строго попереч-

ного [7] распространения колебаний относительно магнитного поля.

Анализ всего спектра неустойчивых колебаний в горячей замагниченной плазме с горячим пучком в рамках точной релятивистской кинетической теории упоминается в литературе как сложнейшая задача ("daunting task") Клеммоу-Догерти [8]. Первым шагом к её решению была работа [9], в которой рассматривалась модель холодной замагниченной плазмы с моноэнергетическим релятивистским пучком, имеющим угловой разброс. Однако моноэнергетическим пучком можно считать только лишь при входе в плазму. По мере распространения частицы пучка должны получать значительный разброс по импульсам.

Целью данной работы является решение задачи вычисления инкремента в системе плазма-пучок в наиболее общей постановке, то есть для произвольной релятивистской функции распределения, произвольной величины магнитного поля и без использования упрощающих предположений об относительной плотности пучка и характере поляризации неустойчивых колебаний. Для этого в работе предложен и реализован параллельный численный алгоритм, позволяющий анализировать влияние кинетических эффектов на весь спектр возможных неустойчивостей.

В первой главе описаны используемые обозначения, распределение частиц по импульсам и методики, а именно: новое представление для тензора диэлектрической проницаемости и метод решения дисперсионного уравнения во всём k -пространстве. Во второй главе приводятся результаты расчётов для линейного инкремента неустойчивости Γ в заданном диапазоне волновых чисел в зависимости от температуры пучка и плазмы. В заключении формулируются основные результаты работы.

1. Используемые методики

В работе все физические величины безразмерны:

- Скорость v – на скорость света c ;
- Импульс p – на $m_e c$, где m_e - масса электрона;
- Частоты ω и $\Omega = eB/m_e c$ – на плазменную частоту ω_p ;
- Волновой вектор k – на ω_p/c ;
- Плотность частиц n – на плотность плазмы n_p .

Исследуемая система представляет из себя плазму с магнитным полем, направленным по оси \mathbf{z} . Релятивистский пучок движется по той же оси.

1.1 Новое представление тензора диэлектрической проницаемости

Основной проблемой при вычислении тензора диэлектрической проницаемости горячей замагниченной плазмы с релятивистским пучком является наличие в подынтегральных выражениях бесконечной суммы произведений бесселевых функций J_n :

$$\int dp_{\parallel} \int dp_{\perp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(k_{\perp} p_{\perp} / \Omega)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega / \gamma}$$

Этот ряд сходится медленно и тем медленнее, чем больше аргумент бесселевых функций, что соответствует малым полям или большим поперечным волновым числам. Таким образом, необходимо удерживать большое число членов ряда, что означает значительное увеличение времени расчётов.

Несмотря на то, что функции Бесселя активно исследовались в течение трёх веков, только сравнительно недавно [10] было обнаружено, что данный ряд может быть просуммирован:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(z)}{a - n} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} J_{-a}(z) J_a(z),$$

где $a = (\gamma\omega - k_{\parallel} p_{\parallel}) / \Omega$, $z = k_{\perp} p_{\perp} / \Omega$, $J_n(z)$ - функция Бесселя целого порядка, $J_a(z)$ - функция Бесселя комплексного порядка. Такой подход позволяет получать значительно более простую форму для компонент тензора диэлектрической проницаемости, нежели с использованием в процедуре вывода разложений вида:

$$e^{iz \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{iz\phi}.$$

В работе [11] был предложен новый способ получения тензора диэлектрической проницаемости горячей замагниченной плазмы в нерелятивистском случае. Основой для него послужила симметрия орбит частиц в магнитном поле. В данной работе проведено обобщение на релятивистский случай подхода, развитого в [11].

Однако данное представление через произведение функций Бесселя $J_a(z)$ комплексного порядка не является идеальным в вычислительном плане. Причиной этого является ситуация, когда одновременно велики значения и порядка, и аргумента функций Бесселя. В этом случае невозможно эффективное использование степенных разложений и известных асимптотических формул для больших z .

В ходе работы было выяснено, что гораздо более универсальным является алгоритм, в котором используется интегральное представление произведения бесселевых функций комплексного порядка, позволяющее проводить вычисления с хорошей точ-

ностью в широком диапазоне параметров:

$$J_{-a}(z)J_a(z) = \frac{e^{ia\pi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ia\varphi} J_0\left(2z \sin \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi,$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка вещественного аргумента.

1.2 Решение дисперсионного уравнения во всём k -пространстве

Непосредственной математической задачей работы являлось нахождение неустойчивых решений дисперсионного уравнения

$$F(\omega) = |k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \omega^2 \varepsilon_{ij}| = 0,$$

где k_i – компоненты волнового вектора, δ_{ij} – дельта-символ Кронекера, ε_{ij} – тензор диэлектрической проницаемости системы.

Для решения дисперсионного уравнения во всём k -пространстве использовался метод Ньютона, принцип которого состоит в том, что, начиная с удачно выбранного начального приближения для корня функции $F(\omega) = 0$, можно получить его значение с любой заданной наперёд точностью, уточняя корень по рекуррентной формуле $\omega_{n+1} = \omega_n - \frac{F(\omega_n)}{F'(\omega_n)}$, где $F'(\omega_n)$ – производная функции. Сходимость метода обуславливается выбором начального приближения ω_0 .

Для нахождения ω_0 в произвольной точке k -пространства используется принцип аргумента Коши. Для этого мы предполагаем функцию $F(\omega)$ аналитической и вычисляем контурные интегралы вокруг области предполагаемого нахождения корня. Поскольку все полюса функции $F(\omega)$ лежат на вещественной оси, то по принципу аргумента Коши, применённому к верхней полуплоскости, можно найти число корней в области:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} d\omega.$$

При $N = 1$ начальным приближением будет:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint \omega \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} d\omega,$$

однако полученное значение не будет точным решением, поскольку контурные интегралы находятся численно с некоторыми ошибками. При $N = 2$ начальные приближения для двух корней находятся из системы:

$$\omega_{01} + \omega_{02} = \frac{1}{2\pi i} \oint \omega \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} d\omega,$$

$$\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint \omega^2 \frac{F'(\omega)}{F(\omega)} d\omega.$$

При $N > 2$ необходимо разделить область на подобласти, содержащие меньшее число корней, и применить метод к каждой из них.

Подобный метод нахождения решения дисперсионного уравнения является гораздо более трудоёмким, нежели дальнейшая итерационная процедура в методе Ньютона. Причиной этого является необходимость многократного нахождения функции $F(\omega)$ в процессе вычисления контурного интеграла в комплексной плоскости ω , тогда как в методе Ньютона, зачастую, требуется всего лишь несколько раз вычислить функцию $F(\omega)$ и её производную $F'(\omega)$. Таким образом, найдя решение дисперсионного уравнения в произвольной точке k -пространства (рис. 1, а) на интересующей нас ветви колебаний, можно использовать его в качестве начального приближения для метода Ньютона в соседних точках (рис. 1, б) и, в итоге, получить решение для всей ветви неустойчивых колебаний (рис. 1, в).

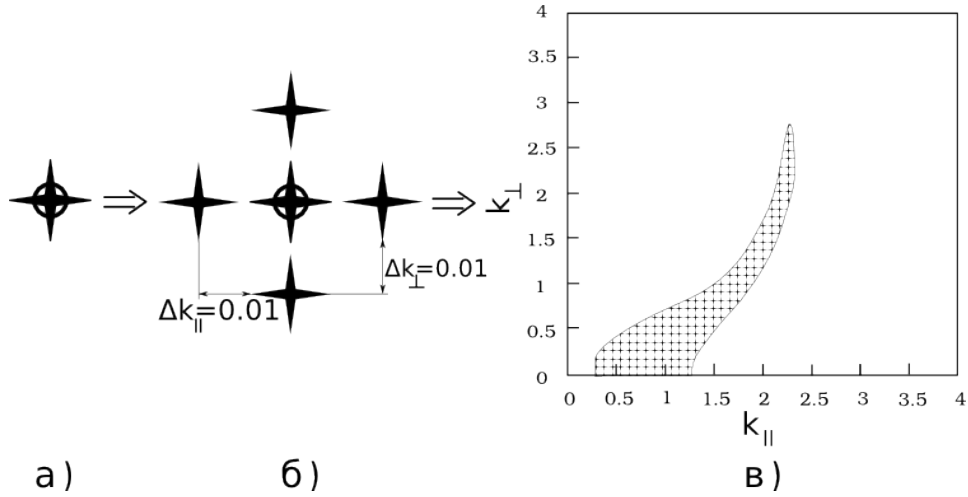


Рисунок 1: Выраживание решения всей ветви колебаний из одной точки k -пространства.

1.3 Распределение частиц по импульсам

Использовалось следующее релятивистское распределение частиц по импульсам, позволяющее учитывать конечность температуры и анизотропию в температурном разбросе по отношению к поперечному и продольному направлениям:

$$f^{(\sigma)}(p_{\perp}, p_{\parallel}) = \frac{n^{(\sigma)}}{\pi^{3/2} \Delta p_{\perp}^{(\sigma)2} \Delta p_{\parallel}^{(\sigma)}} \exp \left(-\frac{p_{\perp}^2}{\Delta p_{\perp}^{(\sigma)2}} - \frac{(p_{\parallel} - p_b^{(\sigma)})^2}{\Delta p_{\parallel}^{(\sigma)2}} \right).$$

В данной работе мы ограничивались теми параметрами плазмы, пучка и магнитного поля, которые характерны для экспериментов по нагреву плазмы электронными

пучками на установке ГОЛ-3, не претендуя на полное описание всех возможных режимов.

2. Полученные результаты и их анализ

2.1 Тензор диэлектрической проницаемости

С учётом указанных упрощений, тензор диэлектрической проницаемости горячей замагниченной плазмы с горячим релятивистским пучком имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 1 - \frac{2\pi\Omega}{\omega^2 k_\perp^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp a U \left[1 + \frac{iaG_0}{e^{-i2\pi a} - 1} \right], \\ \varepsilon_{yy} &= 2 - \varepsilon_{xx} - \frac{2\pi i}{\omega^2 \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp \frac{p_\perp^2 U G_2}{e^{-i2\pi a} - 1}, \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = -\frac{\pi i}{\omega^2 \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp \frac{p_\perp^2 U G_1}{e^{-i2\pi a} - 1}, \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = -\frac{2\pi}{\omega^2 k_\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp p_\parallel U \left[1 + \frac{iaG_0}{e^{-i2\pi a} - 1} \right], \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = \frac{i\pi k_\perp}{\omega^2 \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp \left(\frac{v_\parallel}{w - k_\parallel v_\parallel} \right) \frac{p_\perp^2 U G_1}{e^{-i2\pi a} - 1}, \\ \varepsilon_{zz} &= 1 + \frac{2\pi}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp p_\parallel \left[v_\perp \frac{\partial f}{\partial p_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial f}{\partial p_\perp} - \frac{p_\parallel U}{\Omega} \frac{iG_0}{e^{-i2\pi a} - 1} \right],\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= (k_\perp, 0, k_\parallel), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad a = \frac{\gamma\omega - k_\parallel p_\parallel}{\Omega}, \quad z = \frac{k_\perp p_\perp}{\Omega}, \quad v_\parallel = \frac{p_\parallel}{\gamma}, \quad v_\perp = \frac{p_\perp}{\gamma}, \\ \gamma &= \sqrt{1 + p_\perp^2 + p_\parallel^2}, \quad U = (\omega - k_\parallel v_\parallel) \frac{\partial f}{\partial p_\perp} + k_\parallel v_\perp \frac{\partial f}{\partial p_\parallel}, \quad f(p_\perp, p_\parallel) = f^{(p)} + f^{(b)},\end{aligned}$$

$$G_0 = 2\pi e^{-ia\pi} J_{-a}(z) J_a(z) = \int_0^{2\pi} e^{-ia\varphi} J_0\left(2z \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$G_1 = i\pi e^{-ia\pi} (J_{-a+1}(z) J_{a-1}(z) - J_{-a-1}(z) J_{a+1}(z)) = \int_0^{2\pi} e^{-ia\varphi} \sin(\varphi) J_0\left(2z \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$G_2 = -\pi e^{-ia\pi} (J_{-a+1}(z) J_{a-1}(z) + J_{-a-1}(z) J_{a+1}(z)) = \int_0^{2\pi} e^{-ia\varphi} \cos(\varphi) J_0\left(2z \sin \frac{\varphi}{2}\right).$$

2.2 Инкремент неустойчивости

Инкремент пучковой неустойчивости вычислялся для пучка с относительной плотностью $n^{(b)} = 0.002$, скоростью $v^{(b)} = 0.9$ в магнитном поле $\Omega = 2$. Для исследования влияния температуры электронов плазмы были выбраны температурные параметры пучка ($\Delta p_{\parallel}^{(b)} = 0.05$ и $\Delta p_{\perp}^{(b)} = 0.5$) примерно соответствующие тем, которые использовались в работе [9] для моноэнергетического пучка с угловым разбросом. Оказалось, что более плавное распределение пучка приводит к подавлению слабых неустойчивостей, раскачиваемых на циклотронных резонансах, которые наблюдались в работе [9]. В связи с этим на полученных картах инкремента видна неустойчивость только верхнегибридной моды, попадающей в черенковский резонанс с частицами пучка.

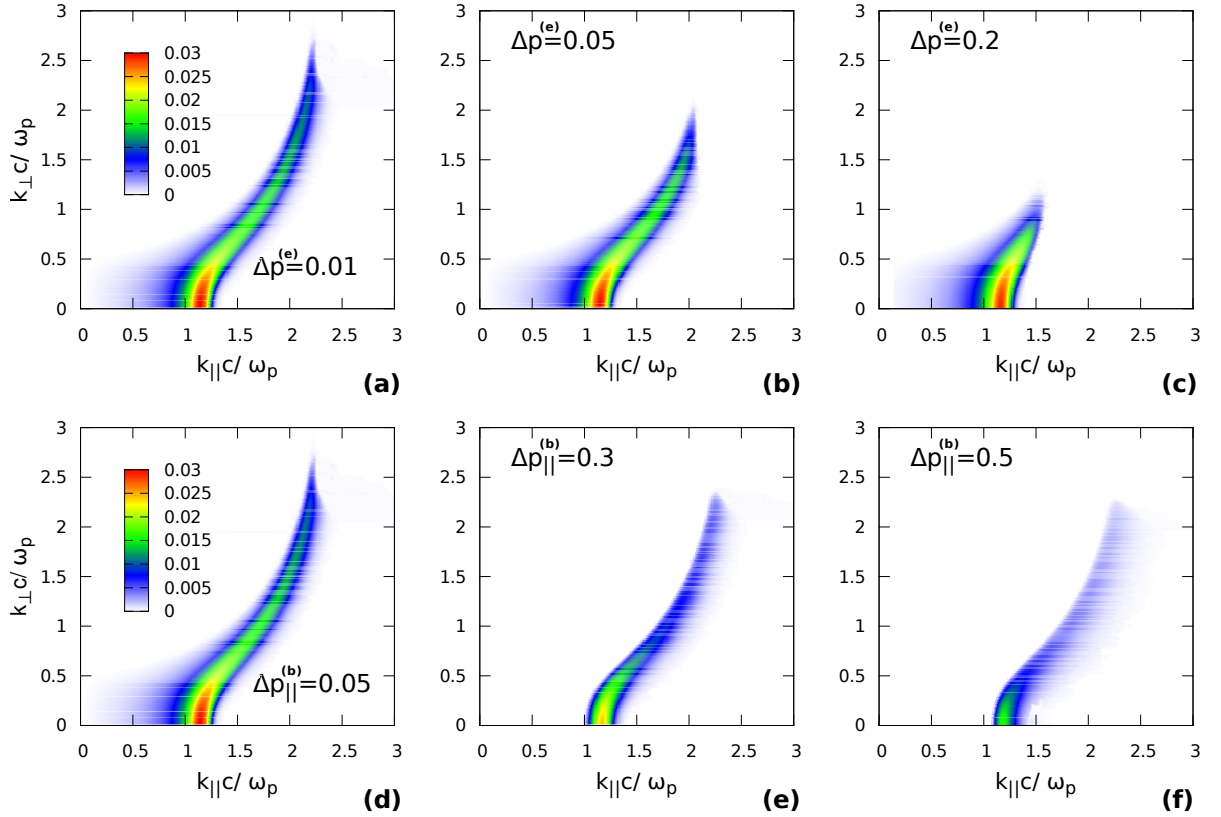


Рисунок 2: (a),(b),(c) – зависимость инкремента пучковой неустойчивости от температуры плазменных электронов в магнитном поле $\Omega = 2$ при заданных параметрах пучка $\Delta p_{\parallel}^{(b)} = 0.05$ и $\Delta p_{\perp}^{(b)} = 0.5$. (d),(e),(f) – влияние увеличивающегося продольного разброса пучка при фиксированных температуре плазмы $\Delta p^{(e)} = 0.01$ и поперечной температуре пучка $\Delta p_{\perp}^{(b)} = 0.5$.

Как видно из рис. 2 (a),(b),(c), увеличение температуры электронов плазмы приводит к подавлению косых неустойчивостей, практически не влияя на продольные. Из этого можно сделать вывод, что повышение температуры плазмы в процессе инжекции пучка до десятков кэВ не приводит к стабилизации наиболее неустойчивых мод. С другой стороны, из рис. 2 (d),(e),(f) следует, что увеличение продольного разброса пучка существенно снижает инкремент неустойчивости равномерно во всём

k -пространстве.

На рис. 3 показаны мнимая и вещественная части частот колебаний, вычисленных вдоль линий в k -пространстве, на которых локализован максимальный инкремент. Из него следует, что с увеличением температуры область резкого спада инкремента смещается в область малых k_{\perp} . Кроме того, в этой области заметно уменьшается частота раскачиваемых колебаний по сравнению со случаем холодной плазмы. Это вступает в противоречие с гидродинамическими представлениями, из которых следует, что частота верхнегибридной моды должна расти по мере увеличения температуры электронов плазмы.

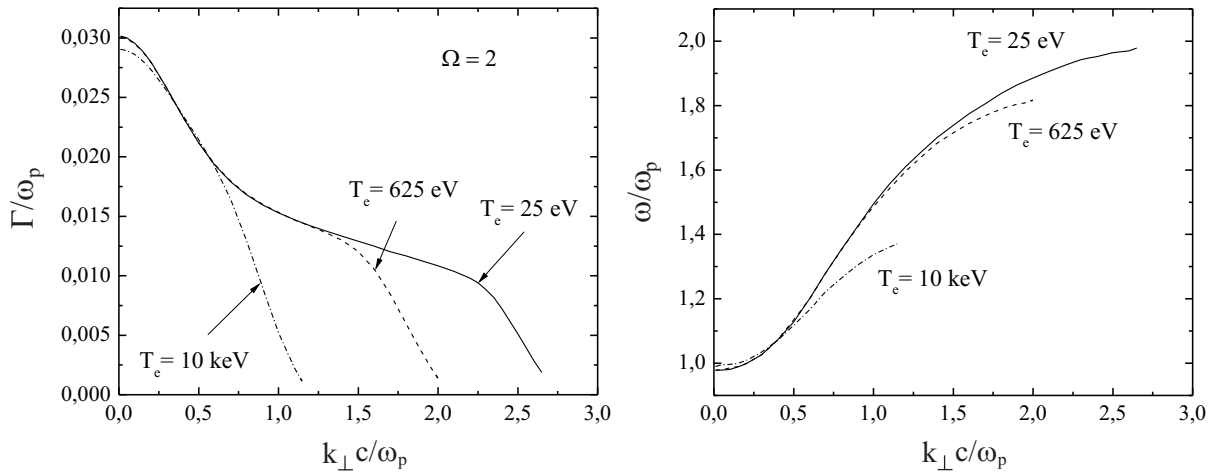


Рисунок 3: Инкремент и вещественная частота неустойчивых колебаний вдоль линии $k_{\parallel} = k_{\parallel}(k_{\perp})$, на которой достигается максимум инкремента при различных температурах плазмы.

Заключение

В ходе работы были получены следующие результаты:

- Разработан численный алгоритм, позволяющий решать дисперсионное уравнение для системы плазмы-пучок с произвольными релятивистскими распределениями частиц в широкой области k -пространства.
- Впервые получены решения дисперсионного уравнения для горячей замагниченной плазмы с горячим релятивистским пучком. Показано, что повышение продольного энергетического разброса для частиц пучка приводит к равномерному уменьшению инкремента и для косых, и для продольных волн. Установлено также, что повышение температуры электронов плазмы не приводит к стабилизации неустойчивости во всём k -пространстве, подавляя только косые волны.

Отметим, что вывод о невозможности подавления наиболее неустойчивых продольных колебаний конечной температурой плазменных электронов касается только случая максвелловской плазмы. Наличие интенсивного хвоста надтепловых электронов может существенно поменять эту картину. Выяснение этого вопроса будет предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Linear and nonlinear development of oblique beam-plasma instabilities in the relativistic kinetic regime. / L. Gremillet, D. Benisti, E. Lefebvre, A. Bret // Phys. Plasmas. — 2007. — Vol. 14. — P. 040704.
2. Exact relativistic kinetic theory of an electron-beam-plasma system: hierarchy of the competing modes in the system-parameter space / A. Bret, L. Gremillet, D. Benisti, E. Lefebvre // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 205008.
3. Bret A., Gremillet L., Bénisti D. Exact relativistic kinetic theory of the full unstable spectrum of an electron-beam-plasma system with Maxwell-Jüttner distribution functions // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 81. — P. 036402.
4. Godfrey Brendan B., Shanahan William R., Thode Lester E. Linear theory of a cold relativistic beam propagating along an external magnetic field // Phys. Fluids. — 1975. — Vol. 18. — P. 346.
5. Bret A., Dieckmann M. E., Deutsch C. Oblique electromagnetic instabilities for a hot relativistic beam interacting with a hot and magnetized plasma // Phys. Plasmas. — 2006. — Vol. 13. — P. 082109.
6. Tautz R. C., Schlickeiser. R. Counterstreaming magnetized plasmas. I. Parallel wave propagation. // Phys. Plasmas. — 2005. — Vol. 12. — P. 122901.
7. Cary J. R., Thode L. E., Lemons D. S. Simple criteria for the absence of the beam-Weibel instability. // Phys. Fluids. — 1981. — Vol. 24. — P. 1818.
8. Bret A., Gremillet L., Dieckmann M. E. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime // Phys. Plasmas. — 2010. — Vol. 17. — P. 120501.
9. Timofeev I. V., Lotov K. V., Terekhov A. V. Direct computation of the growth rate for the instability of a warm relativistic electron beam in a cold magnetized plasma // Phys. Plasmas. — 2009. — Vol. 16. — P. 063101.
10. Newberger B. S. New sum rule for products of Bessel functions with application to plasma physics. // J. Math. Phys. — 1982. — Vol. 23. — P. 1278.
11. Qin Hong, Phillips Cynthia K., Davidson Ronald C. A new derivation of the plasma susceptibility tensor for a hot magnetized plasma without infinite sums of products of Bessel functions // Phys. Plasmas. — 2007. — Vol. 14. — P. 092103.