

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра физики ускорителей

Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков

**КОГЕРЕНТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ВСТРЕЧНЫХ СГУСТКОВ**

Учебное пособие

Новосибирск
2011

ББК В381.1 я73-1
УДК 621.384.6.01
Д450

Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Когерентные колебания встречных сгустков: Учеб. пособие. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2011. 143 с.

В пособии описывается обширный круг коллективных явлений, протекающих при столкновениях сгустков в коллайдерах. Описаны современные методы описания таких эффектов. Пособие предназначено для сопровождения курсов "Коллективные эффекты в динамике пучков" и "Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков". Оно позволяет быстро ввести студентов в основной круг вопросов по данной тематике и поможет студентам усвоить основные физические явления, ответственные за неустойчивости колебаний встречных пучков.

Пособие будет полезно студентам, магистрантам физических факультетов университетов и научным сотрудникам ускорительных специальностей для углубленного изучения современных вопросов физики и техники ускорителей, а также установок с встречными пучками.

Рецензент
науч. сотр. В. А. Востриков

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009-2018 годы.

© Новосибирский государственный университет, 2011
© Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1. Введение	6
2. Дипольные колебания жестких сгустков	8
2.1. Поля встречных сгустков	9
2.2. Колебания малой амплитуды	12
2.2.1. Некогерентные колебания частиц	13
2.2.2. Когерентные колебания	17
2.2.3. Симметричные встречные пучки	27
3. Дипольные колебания больших амплитуд	30
3.1. Нелинейные колебания коротких сгустков	36
3.2. Сдвиги частот колебаний коротких сгустков	37
3.3. Резонансные кривые дипольных колебаний встречных пучков	42
3.4. Резонансы	46
4. Мультипольные колебания встречных пучков	48
4.1. Вертикальные колебания ленточных пучков	56
4.1.1. Сдвиги частот колебаний частиц	59
4.1.2. Амплитуды вертикальных когерентных колебаний	63
4.1.3. Суммовые и разностные резонансы	67
4.1.4. Столкновения симметричных сгустков	73
4.2. Горизонтальные колебания симметричных ленточных пучков	80
5. Затухание Ландау	84
5.1. Описание модели	85
5.2. Некогерентные колебания	86
5.3. Дисперсионные уравнения и моды	90

5.4. Запрещенные полосы немонохроматических сгустков	98
5.5. Запрещенные полосы монохроматических сгустков	103
5.6. Антисатухание Ландау коллективных мод встречных пучков	110
6. Компенсированные встречные пучки	116
6.1. Вертикальные когерентные колебания компенсированных ленточных пучков	117
6.2. Горизонтальные когерентные колебания компенсированных ленточных пучков	122
7. Заключительные замечания	125
7.1. Синхротронные когерентные колебания	129
7.2. Электрон-ионные коллайдеры	132
7.3. Особенности наблюдения колебаний сгустков	135
А Некоторые интегралы с функциями Бесселя	135
Библиографический список	142

Предисловие

В этом пособии мы обсудим ряд проблем, решения которых иллюстрируют применение общих методов теории линейных когерентных колебаний для описания когерентных колебаний встречных пучков. Обычной целью таких исследований является выяснение ограничений на достижимые параметры пучков в коллайдерах. Как правило, неустойчивости когерентных колебаний встречных пучков из-за их взаимодействия в месте встречи (МВ) развиваются гораздо быстрее тех, что обусловлены взаимодействием этих пучков с окружающими элементами вакуумных камер накопителей. Условия стабилизации колебаний встречных пучков зависят от их размеров. Поэтому ограничение роста амплитуд колебаний может сопровождаться уменьшениями плотностей сгустков пучков в их фазовых пространствах, что, в большинстве случаев, крайне нежелательно.

В тексте пособия [1] эти вопросы отражены очень коротко и, скорее, иллюстративно, оставляя их более подробное изучение для самостоятельной работы студентов. Более подробное описание особенностей когерентных колебаний встречных пучков в книгах авторов [2] и [3] к настоящему времени также частично устарело. Между тем, интерес к изучению коллективного поведения встречных пучков до сих пор не уменьшился. Обычно, такие задачи необычайно сложны технически как для аналитических, так и для численных методов. Их упрощения для исследований даже отдельных аспектов явлений, равно как и результаты таких исследований часто представляют самостоятельный интерес.

Описание современного состояния большинства из этих проблем рассеяно по журнальным статьям и докладам на ускорительных конференциях. Материалы, включенные в пособие, существенно расширяют доступную студентам и научным сотрудникам литературу по влиянию эффектов встречи на параметры пучков в установках с встречными пучками. К тому же, изложение этого круга, в общем, непростых вопросов физики пучков с единых позиций может представлять определенную дидактическую ценность.

1. Введение

Производительность установки с встречными пучками (коллайдера) интегрально определяется ее параметром, который называют светимостью. Эта величина равна скорости счета реакций в МВ при единичном сечении этих реакций. Если $N_{1,2}$ – числа частиц в сталкивающихся сгустках, S – площади их поперечных сечений в МВ, а T_{bb} – период столкновений сгустков в МВ, то в самом простом случае величина светимости коллайдера определяется величиной

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{4ST_{bb}}.$$

Из этого выражения ясно, что для увеличения светимости следует увеличивать произведение чисел частиц в сгустках, уменьшать их поперечные сечения в МВ и период встреч сгустков. В современных машинах величина T_{bb} уменьшается заполнением сталкивающихся пучков большим числом сгустков. После взаимодействия в МВ сгустки каждого из пучков разводятся по своим накопительным кольцам, где продолжают движение до следующего столкновения. Таким образом, например, современный электрон-позитронный коллайдер состоит из двух накопительных колец. Если в установке запланировано одно МВ, то замкнутые орбиты сгустков в таких накопителях сопрягаются в окрестности точки встречи. Обычно, периметры замкнутых орбит в накопителях, составляющих коллайдер, выбираются равными, а сталкивающиеся пучки заполняются сгустками так, чтобы одни и те же пары сталкивающихся сгустков подходили к МВ одновременно. Такая структура заполнения пучков помогает избежать многосгустковых неустойчивостей их когерентных колебаний.

Например, в электрон-позитронной В-фабрике КЕКВ (Цукуба, Япония) в электронном и позитронном кольцах коллайдера движется примерно по 2000 сгустков, которые попарно взаимодействуют в одном МВ. При числе частиц в сгустке $\sim 2 \times 10^{10}$ и правильной настройке машины светимость этой установки достигает величины $\mathcal{L} = 2 \times 10^{34} \text{ 1/(см}^2\text{с)}$. Конечно, обеспечение работы такой установки требует решения многих проблем физики пучков. Среди прочих, это организация возможности устойчивой циркуляции в кольцах нужного количества сгустков, требуемой интенсивности. Студенты могут

ознакомиться с возможными решениями этого круга вопросов, в том числе, в [1]. Они общие для всех накопителей, работающих с большим числом интенсивных сгустков.

Вместе с тем, в установках с встречными пучками появляется ряд специфических ограничений достижимых значений параметров сгустков, которые обусловлены возмущениями движения частиц полем пространственного заряда встречного сгустка. По принятой в отечественной литературе терминологии этот многоплановый круг явлений сокращенно называют эффектами встречи. Они выражаются в появлении неустойчивостей колебаний индивидуальных частиц, либо сгустков в целом. Первый круг явлений обычно связывают с увеличениями дисперсий частот колебаний частиц из-за нелинейностей полей встречных сгустков и сопутствующим действием на частицы нелинейных резонансов, порождаемых этими полями. По тем, или иным причинам такие возмущения вызывают увеличения размеров сгустков в МВ и тем уменьшают достижимые значения светимости установки.

Широко распространенным является изучение колебаний отдельной частицы заданным полем встречного пучка (т. н. модель слабого и сильного сгустков; см., среди прочего, в [4]). Хотя задача о взаимодействии сгустков в МВ является существенно самосогласованной, роль нелинейных резонансов в транспортировке частиц на большие амплитуды оказывается очень важной. Даже при ограниченной точности описания взаимодействия встречных пучков, модель слабого и сильного сгустков предсказывает значительное количество наблюдаемых эффектов.

Изучение линейных когерентных колебаний встречных пучков является первым приближением описания их самосогласованного поведения. Уже начальные вычисления такого рода (например, в [1]) показывают, что появление когерентных колебаний сталкивающихся сгустков приводит к уменьшению светимости установки. При гауссовых распределениях частиц в сгустках и неустойчивых колебаниях это уменьшение может протекать по экспоненциальному, а при устойчивых когерентных колебаниях конечной амплитуды – по степенному закону. Этот круг вопросов более сложен и в той части, которая касается вычислений, и в той, которая касается измерений

параметров пучков в установках. Даже в простейшем случае изучения линейных колебаний сгустков проведение, например, измерений требует надежного наблюдения когерентных колебаний высокой мультипольности, что является далеко непростым делом. Продолжение решения этой задачи в сторону учета взаимного влияния частиц сгустков и их когерентных колебаний, или их когерентных флуктуаций (например, в [2] или в [3]), сталкивается с значительными вычислительными трудностями, которые переводят исследования в плоскость более интенсивного использования численных методов. Описание самосогласованного поведения встречных пучков гораздо хуже описано в ускорительной литературе, хотя и здесь накоплено много результатов, особенно тех, которые описывают линейные когерентные колебания сталкивающихся сгустков (например, в [2, 3] а также в [5] – [16]).

Для упрощения вычислений мы предполагаем т. н. лобовые столкновения сгустков в МВ. Это означает, что их средние скорости в МВ антипараллельны. Столкновения сгустков под некоторым углом в МВ приводят к явлениям, которые в этом пособии почти не обсуждаются. Однако читатель, знакомый с материалом, изложенным в [4], может легко предвидеть или установить, проведя, например, самостоятельное исследование, характер и значимость неописанных здесь коллективных явлений, обязанных пересечениям сгустками МВ под углом.

2. Дипольные колебания жестких сгустков

В связи с значительной сложностью описания самосогласованного поведения встречных пучков большинство задач этого круга ставятся, а затем решаются, используя те или иные упрощающие предположения. Так, при изучении когерентных колебаний встречных пучков одной из часто используемых является т. н. модель жестких сгустков. В ней предполагается полное отсутствие у сталкивающихся пучков внутренних степеней свободы так, что возможные коллективные движения сгустков сводятся к их дипольным колебаниям с неизменными по форме функциями распределения частиц сгустков в фазовом пространстве. Несомненным достоинством такой модели

является ее простота и наглядность ее предсказаний. Среди главных недостатков модели жестких сгустков следует упомянуть, что любой, даже малый, разброс частот колебаний частиц будет приводить к размыванию начальных возмущений функций распределения сгустков (например, в [17]). Поэтому предсказания модели жестких сгустков справедливы лишь в тех случаях, когда исследуемые процессы проходят в достаточно короткие интервалы времени, или, что то же, когда в силу специфики решаемой задачи начальные условия когерентных колебаний изменяются достаточно часто.

Еще одним недостатком модели является ее условная самосогласованность, когда согласованно изменяются только амплитуды дипольных колебаний сгустков, а из-за игнорирования внутренних степеней свободы эти колебания никак не взаимодействуют с частицами. В частности, это приводит к отсутствию в такой модели затухания Ландау когерентных колебаний встречных пучков.

2.1. Поля встречных сгустков

Для упрощения расчетов мы примем, что пучки содержат по одному сгустку круглого поперечного сечения и что сгустки движутся в кольцах равного периметра, проходя место встречи в противоположных направлениях. Геометрия таких столкновений схематически изображена на рис.1. Мы также пренебрежем разбросами ча-

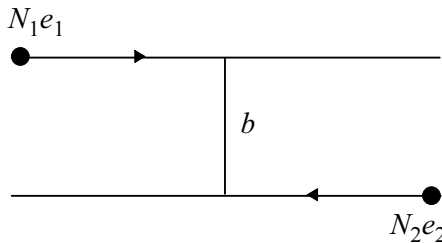


Рис. 1. К задаче о неустойчивости встречных пучков. Раз в период обращения пучки с зарядами $N_1 e_1$ и $N_2 e_2$ сталкиваются в МВ с прицельным параметром $b = d_1 - d_2$, а затем разводятся по своим кольцам

стот невозмущенных бетатронных колебаний частиц из-за разброса

их энергий и нелинейности фокусировки. Энергии частиц считаем ультрарелятивистскими ($E = \gamma Mc^2$, $\gamma \gg 1$). Пусть s обозначает путь, пройденный частицей сгустка вдоль замкнутой (или равновесной) орбиты к моменту времени t , x обозначает горизонтальное, а y – вертикальное отклонение частицы от замкнутой орбиты. Тогда, поперечное электрическое поле сгустка, движущегося вдоль равновесной орбиты с средней скоростью $\mathbf{v}_2 = \{0, -c, 0\}$ и имеющего плотность

$$\rho_2(\mathbf{r}, t) = \frac{N_2}{2\pi\sigma_2^2} \rho_2(s + ct) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (2.1)$$

с ультрарелятивистской точностью определяется выражением:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r} E, \quad E = \frac{2N_2 e_2}{\sigma_2^2 r} \rho_2(s + ct) \int_0^r dr_1 r_1 e^{-r_1^2/2\sigma_2^2}. \quad (2.2)$$

После простого интегрирования получаем:

$$E = 2N_2 e_2 \rho_2(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma_2^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \quad (2.3)$$

С той же точностью магнитное поле сгустка равно

$$\mathbf{H} = \frac{[\mathbf{v}_2 \times \mathbf{E}]}{c}. \quad (2.4)$$

Сила, действующая на частицы встречного сгустка, движущегося со скоростью $\mathbf{v}_1 = \{0, c, 0\}$, равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1,2)} &= e_1 \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}]}{c} \right) \simeq 2e_1 \mathbf{E} \\ &= 4N_2 e_1 e_2 \rho_2(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma_2^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Она линейно зависит от поперечных координат частиц (x, y) вблизи центра сгустка ($r \ll \sigma_2$). При увеличении расстояния от центра r величина этой силы (например, $|F_x|$) сначала проходит максимум, а затем уменьшается пропорционально $1/r$ (рис.2). Возмущение частиц полем встречного сгустка во времени представляет собой серию

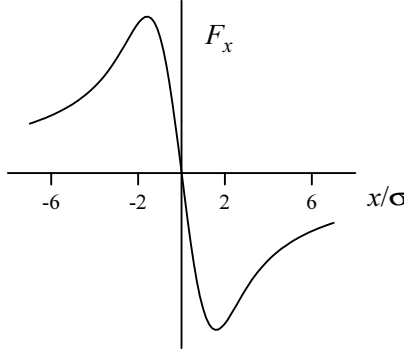


Рис. 2. Зависимость (радиальной) силы, возмущающей встречный пучок, от поперечного смещения частицы. Плотность распределения поперечных координат во встречном сгустке гауссова, $e_1 e_2 = -e^2$

периодических, коротких толчков. Если сгустки движутся в разных кольцах с частотой обращения ω_0 каждый, то период этих толчков равен $2\pi/\omega_0$. При длине сгустков σ_s длительности толчков равны $\delta t = \sigma/(2c)$. Как и всякое другое, такое периодическое возмущение приводит к резонансным неустойчивостям как некогерентных, так и когерентных колебаний пучка.

Если сгусток (2) можно считать жестким и если он совершает, например, вертикальные когерентные колебания с дипольным моментом $d_2(t)$, то плотность такого сгустка определяется выражением

$$\rho_2(\mathbf{r}, t) = \frac{N_2}{2\pi\sigma_2^2} \rho_2(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + (y - d_2(t))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.6)$$

а поля, возмущающие колебания частиц сгустка (1) в МВ, описываются уравнениями (2.2) и (2.4), в которых аргумент y должен быть заменен на $y - d_2(t)$. После такой замены вместо (2.5) пишем $(r^2 = x^2 + (y - d_2)^2)$

$$F_y^{(1,2)} = 4N_2 e_1 e_2 \rho_2(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma_2^2)]}{r^2} (y - d_2(t)). \quad (2.7)$$

Подставив это выражение в уравнения движения частиц и используя в этих уравнениях в качестве независимой переменной обобщенный

азимут частицы $\theta = s/R_0$, получим:

$$y''_a + g_y^{(1)}(\theta)y_a = \frac{F_y^{(1,2)}}{\gamma M \omega_0^2} = 4 \frac{N_2 e_1 e_2 R_0^2}{pc} \quad (2.8)$$

$$\times \rho_2(s_a + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma_2^2(\theta))]}{r^2} (y_a - d_2(\theta)).$$

Здесь p импульс частицы, штрих обозначает дифференцирование по θ , $g_y^{(1)}(\theta)$ – коэффициент жесткости вертикальных бетатронных колебаний частиц в кольце (1) в точке θ , символ $a = 1, 2, \dots N_1$ нумерует частицы в сгустке (1).

2.2. Колебания малой амплитуды

Изучим сначала особенности колебаний встречных пучков в случае, когда поперечные отклонения частиц от замкнутой орбиты и амплитуды когерентных колебаний малы по сравнению с поперечным размером встречного сгустка. В такой области параметров уравнения (2.8) можно линеаризовать по поперечным отклонениям частицы. Поэтому уравнение (2.8) переходит в следующее:

$$y''_a + g_y^{(1)}(\theta)y_a = 2 \frac{N_2 e_1 e_2 R_0^2}{pc \sigma_2^2} \rho_2(s_a + ct)(y_a - d_2(\theta)). \quad (2.9)$$

Обозначим посредством z_a продольное положение частицы a в сгустке (1). Тогда учитывая, что для частиц этого сгустка $s_a(t) = ct + z_a$, а $ct \simeq R_0 \theta$, уравнение (2.9) может быть переписано в виде:

$$y''_a + g_y^{(1)}(\theta)y_a = 2 \frac{N_2 e_1 e_2 R_0^2}{pc \sigma_2^2(\theta)} \rho_2(2R_0 \theta + z_a)(y_a - d_2(\theta)). \quad (2.10)$$

Аналогично, если дипольные колебания совершает сгусток (1), то линеаризованные уравнения движения для частиц второго сгустка ($s_b(t) = -ct + z_b$, $b = 1, 2, \dots N_2$) записываются в виде

$$y''_b + g_y^{(2)}(\theta)y_b = 2 \frac{N_1 e_1 e_2 R_0^2}{pc \sigma_1^2(\theta)} \rho_1(2R_0 \theta - z_b)(y_b - d_1(\theta)). \quad (2.11)$$

Здесь, для простоты, положено $\rho(s) = \rho(-s)$. Уравнения (2.10) и (2.11) описывают изменения фокусировки частиц сталкивающихся

сгустков полями пространственного заряда встречного пучка и возбуждение этими полями вынужденных бетатронных колебания частиц при несовпадении их координат с положением дипольного момента встречного сгустка. Согласно (2.10) и (2.11) встречный сгусток является фокусирующей линзой при столкновении противоположно заряженных частиц ($e_1 e_2 = -e^2$) и – дефокусирующей при столкновении одноименно заряженных частиц ($e_1 e_2 = e^2$).

2.2.1. Некогерентные колебания частиц

Прежде чем решать уравнения (2.10) и (2.11) и находить условия устойчивости когерентных колебаний сгустков и некогерентных колебаний частиц в общих случаях рассмотрим вспомогательную задачу, в которой амплитуды дипольных колебаний сгустков равны нулю ($d_2(\theta) = 0$, $d_1(\theta) = 0$), а также равны нулю длины сталкивающихся сгустков. В силу последнего предположения линейные плотности сгустков в (2.10) и (2.11) заменяются периодическими δ -функциями, а сами уравнения (2.10) и (2.11) заменяются следующими

$$y_a'' + g_y^{(1)}(\theta) y_a = \frac{N_2 e_1 e_2 R_0}{p c \sigma_2^2(\theta)} \delta_T(\theta) y_a, \quad (2.12)$$

$$y_b'' + g_y^{(2)}(\theta) y_b = \frac{N_1 e_1 e_2 R_0}{p c \sigma_1^2(\theta)} \delta_T(\theta) y_b, \quad (2.13)$$

где

$$\delta_T(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{2\pi}. \quad (2.14)$$

Помимо прочего, уравнения (2.10) и (2.11) позволяют найти изменения частот бетатронных колебаний и β -функций частиц за счет действия полей встречного сгустка. Для простоты примем, что $e_1 e_2 = -e^2$. Тогда согласно, например, уравнению (2.12), после прохождения места встречи частицы сгустка (1) испытывают толчок

$$\delta(y_a') = -\frac{R_0}{D} y_a, \quad \frac{1}{D} = \frac{N_2 e^2}{p c \sigma_2^2}. \quad (2.15)$$

Транспортная матрица такого преобразования записывается в виде

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R_0}{D} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Приняв, что преобразование координат (y_a, y'_a) через один оборот в кольцо описывается, например, транспортной матрицей

$$M_R = \begin{bmatrix} \cos \mu_{y0} & \frac{\beta_{y0}}{R_0} \sin \mu_{y0} \\ -\frac{R_0}{\beta_{y0}} \sin \mu_{y0} & \cos \mu_{y0} \end{bmatrix}, \quad \mu_{y0} = 2\pi\nu_{y0}, \quad (2.17)$$

получим транспортную матрицу преобразования координат (y_a, y'_a) от середины места встречи к середине места встречи на соседнем обороте

$$M_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R_0}{2D} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \mu_{y0} & \frac{\beta_{y0}}{R_0} \sin \mu_{y0} \\ -\frac{R_0}{\beta_{y0}} \sin \mu_{y0} & \cos \mu_{y0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R_0}{2D} & 1 \end{bmatrix},$$

или

$$M_t = \begin{bmatrix} \cos \mu_y & \frac{\beta_y}{R_0} \sin \mu_y \\ -\frac{R_0}{\beta_y} \sin \mu_y & \cos \mu_y \end{bmatrix}, \quad \mu_y = 2\pi\nu_y, \quad (2.18)$$

где

$$\cos \mu_y = \cos \mu_{y0} - \frac{\beta_{y0}}{2D} \sin \mu_{y0}, \quad (2.19)$$

а

$$\beta_{y0} \sin \mu_{y0} = \beta_y \sin \mu_y. \quad (2.20)$$

Взаимодействие пучков в МВ не приводит к неустойчивости колебаний, если $|\cos(2\pi\nu_y)| \leq 1$. Согласно уравнению (2.19) при малой величине параметра $\beta_{y0}/(2D)$ сдвиг частоты вертикальных бетатронных колебаний частиц сгустка (1), обусловленный полем встречного сгустка, равен

$$\Delta\nu_y^{(1)} = \nu_y^{(1)} - \nu_{y0}^{(1)} = \frac{\beta_{y0}}{4\pi D},$$

или

$$\Delta\nu_y^{(1)} = \xi_1 = \frac{N_2 e^2 \beta_{y0}^{(1)}}{4\pi r c \sigma_2^2}. \quad (2.21)$$

Эта величина играет важную роль в исследованиях устойчивости встречных пучков и носит специальное название – параметр пространственного заряда. Используя определение (2.21), перепишем (2.19) в следующем виде:

$$\cos \mu_y^{(1)} = \cos \mu_{y0}^{(1)} - 2\pi \xi_1 \sin \mu_{y0}^{(1)}. \quad (2.22)$$

Если параметры встречного пучка (2) заданы, то некогерентные бетатронные колебания частиц в сгустке (1) будут устойчивы при выполнении условия

$$\xi_1 \leq \xi_{th}^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \cot \left(\pi \nu_{y0}^{(1)} \right), & 0 \leq \nu_{y0}^{(1)} \leq 1/2, \\ -\tan \left(\pi \nu_{y0}^{(1)} \right), & 1/2 \leq \nu_{y0}^{(1)} \leq 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Согласно этому уравнению пороговые значения ξ_{th} особенно велики при приближении частоты $\nu_{y0}^{(1)}$ к параметрическому резонансу $2\nu_{y0}^{(1)} = k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, сверху.

Аналогично, для частиц сгустка (2) вводится величина

$$\xi_2 = \frac{N_1 e^2 \beta_{y0}^{(2)}}{4\pi r c \sigma_1^2}, \quad (2.24)$$

определяющая сдвиг частоты линейных бетатронных колебаний этих частиц полями встречного сгустка:

$$\cos \mu_y^{(2)} = \cos \mu_{y0}^{(2)} - 2\pi \xi_2 \sin \mu_{y0}^{(2)}. \quad (2.25)$$

Повторив похожие вычисления, читателю легко проверить, что параметры пространственного заряда для столкновений сгустков с гауссовыми распределениями частиц по поперечным координатам и имеющих эллиптические поперечные сечения с среднеквадратичными вертикальными $\sigma_y^{(1,2)}$ и горизонтальными $\sigma_x^{(1,2)}$ размерами определяются формулами

$$\xi_{1y} = \frac{N_2 e^2 \beta_{y0}^{(1)}}{2\pi r c \sigma_y^{(2)} (\sigma_y^{(2)} + \sigma_x^{(2)})}, \quad \xi_{1x} = \frac{N_2 e^2 \beta_{x0}^{(1)}}{2\pi r c \sigma_x^{(2)} (\sigma_y^{(2)} + \sigma_x^{(2)})}, \quad (2.26)$$

и

$$\xi_{2y} = \frac{N_1 e^2 \beta_{y0}^{(2)}}{2\pi p c \sigma_y^{(1)} (\sigma_y^{(1)} + \sigma_x^{(1)})}, \quad \xi_{2x} = \frac{N_1 e^2 \beta_{x0}^{(2)}}{2\pi p c \sigma_x^{(1)} (\sigma_y^{(1)} + \sigma_x^{(1)})}. \quad (2.27)$$

Возвращаясь к изучению столкновений сгустков с круглыми поперечными сечениями заметим, что при равенстве β -функций вертикальных и горизонтальных бетатронных колебаний в МВ и с учетом соотношений $\sigma_{1,2}^2 = \epsilon_{1,2} \beta^{(1,2)}$, где $\epsilon_{1,2}$ – эмиттансы сгустков (1) и (2), параметры пространственного заряда $\xi_{1,2}$ зависят от отношений $\beta_0^{(1)}/\beta_0^{(2)}$ и $\beta_0^{(2)}/\beta_0^{(1)}$. Однако, согласно уравнению (2.20) значения β -функций в МВ сами зависят от величин параметров $\xi_{1,2}$. Например,

$$\frac{\beta_0^{(1)}}{\beta^{(1)}} = \frac{\sin \mu^{(1)}}{\sin \mu_0^{(1)}}, \quad \frac{\beta_0^{(2)}}{\beta^{(2)}} = \frac{\sin \mu^{(2)}}{\sin \mu_0^{(2)}}$$

или

$$\frac{\beta_0^{(1)}}{\beta^{(1)}} = \frac{1}{\sin \mu_0^{(1)}} \sqrt{1 - \left(\cos \mu_0^{(1)} - 2\pi \xi_1 \sin \mu_0^{(1)} \right)^2}. \quad (2.28)$$

Очевидно, что в области $\sin \mu_0^{(1)} < 0$ знак радикала в правой части этой формулы должен быть заменен на противоположный. Поэтому правая часть в этом и других подобных уравнениях имеет период $1/2$ по переменным $\nu_0^{(1,2)}$. В этой связи, ниже мы можем считать, что величины $\nu_0^{(1,2)}$ расположены на отрезках $0 \leq \nu_0^{(1,2)} \leq 1/2$, и переписать соотношение (2.28) в виде

$$u_1 = \frac{\beta_0^{(1)}}{\beta^{(1)}} = \sqrt{1 + 4\pi \xi_1 \cot \mu_0^{(1)} - (2\pi \xi_1)^2},$$

или

$$\begin{aligned} u_1^2 &= 1 - B_1^2 u_2^2 + 2B_1 u_2 \cot \mu_0^{(1)}, \\ u_2^2 &= 1 - B_2^2 u_1^2 + 2B_2 u_1 \cot \mu_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь

$$B_{1,2} = \frac{N_{2,1} e^2 \beta_0^{(1,2)}}{2p c \epsilon_{2,1} \beta_0^{(2,1)}}, \quad u_1 = \frac{\beta_0^{(1)}}{\beta^{(1)}}, \quad u_2 = \frac{\beta_0^{(2)}}{\beta^{(2)}}. \quad (2.30)$$

Определенные таким образом величины $B_{1,2}$ выражены через невозможные столкновениями параметры пучков и накопительных колец. Поскольку величины u_1 и u_2 неотрицательны, действительные и положительные корни уравнений (2.29) расположены в областях:

$$0 \leq u_2 \leq u_{2m} = \frac{\cot(\pi\nu_0^{(1)})}{B_1}, \quad 0 \leq u_1 \leq u_{1m} = \frac{\cot(\pi\nu_0^{(2)})}{B_2}. \quad (2.31)$$

Если такие корни уравнений (2.29) удастся найти парами (u_1 и u_2), то они описывают устойчивые бетатронные колебания частиц в сгустках (1) и (2). При неравных значениях параметров $B_{1,2}$ и частот $\nu_0^{(1,2)}$ величины u_1 и u_2 , вообще, не равны. Однако оказывается, что при равенстве величин $B_1 = B_2 = B$ и $\nu_0^{(1)} = \nu_0^{(2)} = \nu_0$ (столкновения симметричных встречных пучков) уравнения (2.29) наряду с корнями $u_1 = u_2 = u$, где $(0 \leq \nu_0 \leq 1/2)$ [4]

$$u = \frac{B \cos \mu_0 + \sqrt{B^2 + \sin^2 \mu_0}}{(1 + B^2) \sin \mu_0}, \quad \mu_0 = 2\pi\nu_0, \quad (2.32)$$

могут иметь решения, для которых корни u_1 и u_2 неравны ($u_1 \neq u_2$). При этом симметричные решения $u_1 = u_2$ существуют при всех значениях ν_0 , а несимметричные (т.н. flip-flop) решения $u_1 \neq u_2$ находятся в узкой полосе частот

$$\frac{1}{2\pi} \arccos \frac{B^2 - 1}{1 + B^2} \leq \nu_0 \leq \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{B^2 - 1}{\sqrt{1 + B^2}}, \quad B \leq 1 \quad (2.33)$$

вблизи параметрического резонанса $\nu_0 \leq 1/2$ (например, в [4]).

2.2.2. Когерентные колебания

Решения уравнений (2.10) и (2.11) могут быть выражены через интегралы от дипольных моментов d_1 и d_2 . Сами уравнения для d_1 и d_2 получаются суммированием уравнений (2.10) или (2.11) по индексам a или b . При этом следует учесть, что частицы, например, сгустка (1) и расположенные в нем в малом интервале расстояний вдоль замкнутой орбиты $z \leq z_a \leq z + dz$, дают в дипольный момент

d_1 вклад, пропорциональный линейной плотности этого сгустка в точке z_a . Поэтому пишем

$$d_{1,2} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N (y_a)_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz_{1,2} (y_a)_{1,2} \rho_{1,2}(z_{1,2}), \quad (2.34)$$

а вместо уравнений (2.10), (2.11):

$$d_1'' + g_y^{(1)}(\theta) d_1 = -\frac{2R_0\xi_1}{\beta_0^{(1)}} (d_1 - d_2) K(\theta), \quad (2.35)$$

$$d_2'' + g_y^{(2)}(\theta) d_2 = \frac{2R_0\xi_2}{\beta_0^{(2)}} (d_1 - d_2) K(\theta), \quad (2.36)$$

где

$$K(\theta) = 2\Pi \int_{-\infty}^{\infty} ds \rho_1(s + ct) \rho_2(s - ct). \quad (2.37)$$

Учитывая, что величина $K(\theta)$ в (2.37) является периодической функцией θ с периодом 2π , пишем

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{-in\theta}, \quad K_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} K(\theta) e^{in\theta}. \quad (2.38)$$

Распределение гармоник K_n по номерам зависит от ширин линейных плотностей частиц в сталкивающихся сгустках. Если, например, линейные плотности сталкивающихся сгустков идентичны и равны

$$\rho(s) = \frac{\exp[-s^2/(2\sigma_s^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_s},$$

то вычисление интеграла в (2.37) даёт

$$K(\theta) = 2\Pi \frac{\exp[-(ct)^2/\sigma_s^2]}{2\pi\sigma_s} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2},$$

или

$$K(\theta) = 2\pi \frac{\exp[-\theta^2/\sigma_\phi^2]}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi}, \quad \sigma_\phi = \frac{\sigma_s}{R_0}.$$

Тогда, для сгустков с длинами $\sigma_s \ll R_0$, имеем

$$K_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) \\ \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) = \exp[-(n\sigma_\phi)^2/4].$$

Поэтому для не очень высоких номеров гармоник ($n \ll R_0/\sigma_s$) амплитуды K_n мало отличаются от единицы ($K_n \simeq 1$). Ниже мы увидим, что нетривиальное поведение амплитуд когерентных колебаний сталкивающихся сгустков появляется при приближении частот колебаний частиц к резонансным значениям $\nu = n/m$, где n и m – взаимно простые, положительные числа. При заданной величине ν и больших значениях n выполнение резонансного условия требует увеличения значения порядка резонанса m . Пренебрегая вкладами резонансов высокого порядка на устойчивость когерентных колебаний пучков, мы будем полагать, что $K_n = 1$ для всех значений n . Подстановка этих выражений в (2.35) и (2.36) дает

$$d_1'' + g_y^{(1)}(\theta)d_1 = -\frac{4\pi R_0 \xi_1}{\beta_0^{(1)}}(d_1 - d_2)\delta_T(\theta), \quad (2.39) \\ d_2'' + g_y^{(2)}(\theta)d_2 = \frac{4\pi R_0 \xi_2}{\beta_0^{(2)}}(d_1 - d_2)\delta_T(\theta),$$

где

$$\delta_T(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} \quad (2.40)$$

– периодическая δ -функция.

Уравнения (2.39) решаются используя разложения (например, в [18])

$$d_{1,2} = f_0^{(1,2)}(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^{(1,2)} \exp\left(-i(n+\nu)w_0^{(1,2)}(\theta)\right), \quad (2.41) \\ w_0^{(1,2)} = \frac{\phi_0^{(1,2)}(\theta)}{\nu_0^{(1,2)}}, \quad \frac{d\phi_0^{(1,2)}}{d\theta} = \frac{1}{\left(f_0^{(1,2)}\right)^2}.$$

Здесь $f_0^{(1,2)}(\theta)$ и $\phi_0^{(1,2)}(\theta)$ амплитуды и фазы функций Флоке невозмущенных бетатронных колебаний в кольцах (1) и (2), соответственно. Поскольку $\phi_0^{(1,2)}(\theta + 2\pi) = 2\pi\nu_0^{(1,2)} + \phi_0^{(1,2)}(\theta)$, при обходе замкнутой орбиты фазы $w_0^{(1,2)}$ изменяются на интервалах $0 \leq w_0^{(1,2)} \leq 2\pi$. Неизвестное значение частоты бетатронных когерентных колебаний сгустков ν устанавливается решением дисперсионного уравнения задачи. Подставив, например, в первое уравнение в (2.39) разложение d_1 из (2.41) и вычислив производные по θ :

$$d_1' = \left(f_0^{(1)}\right)' \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{1n} \exp\left(-i(n+\nu)w_0^{(1)}(\theta)\right) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \frac{n+\nu}{\nu_0^{(1)} f_0^{(1)}} d_{1n} \exp\left(-i(n+\nu)w_0^{(1)}(\theta)\right)$$

и

$$d_1'' = \left(f_0^{(1)}\right)'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{1n} \exp\left(-i(n+\nu)w_0^{(1)}\right) - \frac{1}{\left(f_0^{(1)}\right)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(n+\nu)^2}{\left(\nu_0^{(1)}\right)^2} d_{1n} \exp\left(-i(n+\nu)w_0^{(1)}\right),$$

получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(f_0^{(1)}\right)'' + g_{x1}(\theta)f_0^{(1)} - \frac{1}{\left(f_0^{(1)}\right)^3} \frac{(n+\nu)^2}{\left(\nu_0^{(1)}\right)^2} \right) \times d_{1n} \exp\left(-i(n+\nu)w_0^{(1)}\right) = -\frac{4\pi\xi_1 R_0}{\beta_0^{(1)}} \delta_T(\theta) (d_1 - d_2). \quad (2.42)$$

Учитывая в этом уравнении, что

$$\left(f_0^{(1)}\right)'' + g_{x1}(\theta)f_0^{(1)} = \frac{1}{\left(f_0^{(1)}\right)^3},$$

а также соотношение ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(f_0^{(1)}(\theta)\right)^2} \exp\left(-i(n-n_1)w_0^{(1)}(\theta)\right) = 2\pi\nu_0^{(1)}\delta_{n,n_1},$$

перепишем (2.42) в виде

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{(n + \nu)^2}{\left(\nu_0^{(1)}\right)^2}\right) d_{1n} &= -\frac{2\xi_1 R_0}{\beta_0^{(1)} \nu_0^{(1)}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (d_{1n_1} - d_{2n_1}) \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta (f_0^{(1)}(\theta))^2 \delta_T(\theta) \exp\left(in_1 w_0^{(1)}(\theta)\right) \\ &= -\frac{2\xi_1}{\nu_0^{(1)}} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (d_{1n_1} - d_{2n_1}) \exp\left(-in_1 w_0^{(1)}(0)\right), \end{aligned}$$

или, используя $\beta_0^{(1)} = R_0(f_0^{(1)}(0))^2$ и $w_0^{(1)}(0) = 0$,

$$d_{1n} = -\frac{2\xi_1 \nu_0^{(1)}}{\left(\nu_0^{(1)}\right)^2 - (n + \nu)^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (d_{1n_1} - d_{2n_1}). \quad (2.43)$$

Аналогичные вычисления в уравнении (2.36) приводят к равенству

$$d_{2n} = \frac{2\xi_2 \nu_0^{(2)}}{\left(\nu_0^{(2)}\right)^2 - (n + \nu)^2} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (d_{1n_1} - d_{2n_1}). \quad (2.44)$$

Вычитанием уравнений (2.43) и (2.44) и последующим их суммированием по n находим дисперсионное уравнение задачи:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\xi_1 \nu_0^{(1)}}{(n + \nu)^2 - \left(\nu_0^{(1)}\right)^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\xi_2 \nu_0^{(2)}}{(n + \nu)^2 - \left(\nu_0^{(2)}\right)^2}. \quad (2.45)$$

Заменив в (2.45), например,

$$\frac{2\nu_0^{(1)}}{(n + \nu)^2 - \left(\nu_0^{(1)}\right)^2} = \frac{1}{\nu + n - \nu_0^{(1)}} - \frac{1}{\nu + n + \nu_0^{(1)}}$$

и используя соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu + n - \nu_0^{(1)}} = \pi \cot\left(\pi\left(\nu - \nu_0^{(1)}\right)\right),$$

перепишем дисперсионное уравнение (2.45) в следующем виде:

$$1 = \pi\xi_1 \left(\frac{\cos \left(\pi \left(\nu - \nu_0^{(1)} \right) \right)}{\sin \left(\pi \left(\nu - \nu_0^{(1)} \right) \right)} - \frac{\cos \left(\pi \left(\nu + \nu_0^{(1)} \right) \right)}{\sin \left(\pi \left(\nu + \nu_0^{(1)} \right) \right)} \right) + \pi\xi_2 \left(\frac{\cos \left(\pi \left(\nu - \nu_0^{(2)} \right) \right)}{\sin \left(\pi \left(\nu - \nu_0^{(2)} \right) \right)} - \frac{\cos \left(\pi \left(\nu + \nu_0^{(2)} \right) \right)}{\sin \left(\pi \left(\nu + \nu_0^{(2)} \right) \right)} \right),$$

или

$$1 = -\frac{2\pi\xi_1 \sin 2\pi\nu_0^{(1)}}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi\nu_0^{(1)}} - \frac{2\pi\xi_2 \sin 2\pi\nu_0^{(2)}}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi\nu_0^{(2)}}. \quad (2.46)$$

Решая это уравнение относительно $\cos 2\pi\nu$, находим

$$(\cos 2\pi\nu)_{\pm} = \frac{\cos \mu^{(1)} + \cos \mu^{(2)}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\cos \mu^{(1)} - \cos \mu^{(2)})^2 + 16\pi^2 \xi_1 \xi_2 \sin 2\pi\nu_0^{(2)} \sin 2\pi\nu_0^{(1)}}, \quad (2.47)$$

где величины $(\mu^{(1,2)} = 2\pi\nu^{(1,2)})$

$$\cos \mu^{(1,2)} = \cos 2\pi\nu_0^{(1,2)} - 2\pi\xi_{1,2} \sin 2\pi\nu_0^{(1,2)} \quad (2.48)$$

определяют сдвиги частот некогерентных колебаний частиц полями встречных сгустков. Как и следовало ожидать, собственные числа в уравнении (2.47) совпадают с собственными числами двух линейных связанных осцилляторов с коэффициентом связи

$$Q = 16\pi^2 \xi_1 \xi_2 \sin 2\pi\nu_0^{(2)} \sin 2\pi\nu_0^{(1)}. \quad (2.49)$$

При заданных значениях параметров пространственного заряда сгустков $\xi_{1,2}$ и частот невозмущенных бетатронных колебаний частиц $\nu_0^{(1,2)}$ эти формулы позволяют вычислить частоты когерентных бетатронных колебаний сгустков, а также найти условия устойчивости этих колебаний. Если одна из величин $\xi_{1,2}$ обращается в нуль, то

связь разрывается, а собственные числа в (2.47) (и частоты когерентных колебаний) становятся равными собственным числам некогерентных колебаний частиц сталкивающихся сгустков.

Нетривиальные изменения в спектрах когерентных колебаний встречных пучков обязаны их связи в МВ. Поскольку уравнения в (2.44) гамильтоновы, то в соответствии с общими положениями теории линейных когерентных колебаний, например в [1], когерентные колебания сгустков, описываемые уравнением (2.47), будут устойчивы при приближении частот $\nu^{(1,2)}$ к значениям, соответствующим одному из разностных резонансов

$$\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.50)$$

и могут оказаться неустойчивыми при приближении $\nu^{(1,2)}$ к суммовым резонансам

$$\nu^{(1)} + \nu^{(2)} = k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.51)$$

В таких случаях, простые выражения для частот собственных мод когерентных колебаний получаются, если параметры пространственного заряда $\xi_{1,2}$ малы ($\xi_{1,2} \ll 1$). При этом мы ожидаем, что будут малы и сдвиги частот когерентных колебаний относительно частот $\nu_0^{(1,2)}$. Определив, например, в уравнении (2.45) $\Delta\nu = \nu - \nu_0^{(1)}$, а также предположив при решении этого уравнения близость частот $\nu_0^{(1,2)}$ к разностному резонансу $\nu_0^{(1)} - \nu_0^{(2)} = k$ и отбросив в (2.45) нерезонансные слагаемые, получим

$$1 \simeq \frac{\xi_1}{\Delta\nu} + \frac{\xi_2}{\Delta\nu + \varepsilon}, \quad (2.52)$$

где $\varepsilon = \nu_0^{(1)} - \nu_0^{(2)} - k$ расстройка от резонанса. Корни этого уравнения равны

$$\Delta\nu_{\pm} = \frac{\xi_1 + \xi_2 - \varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon)^2 + 4\xi_1\xi_2}. \quad (2.53)$$

Они являются действительными числами для всех значений ε . Поэтому амплитуды колебаний не затухают, но и не нарастают во времени. Более того, если бы при выводе уравнения (2.45) мы бы учли возможность затухания когерентных колебаний, например, в сгустке

(1) с безразмерным декрементом затухания λ_1 , то вместо уравнения (2.52) мы получили бы дисперсионное уравнение:

$$1 \simeq \frac{\xi_1}{\Delta\nu + i\lambda_1} + \frac{\xi_2}{\Delta\nu + \varepsilon}. \quad (2.54)$$

Среди прочего, такое затухание может обеспечиваться, например, демпфированием колебаний в кольце (1) с помощью систем обратных связей. Корни уравнения (2.54) являются комплексными величинами. Определив

$$\Delta\nu = z - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{i\lambda_1}{2},$$

пишем

$$1 \simeq \frac{\xi_1}{z - \frac{1}{2}(\varepsilon - i\lambda_1)} + \frac{\xi_2}{z + \frac{1}{2}(\varepsilon - i\lambda_1)},$$

или

$$\begin{aligned} z^2 - z(\xi_1 + \xi_2) - \frac{(\varepsilon - i\lambda_1)^2}{4} - \frac{\varepsilon - i\lambda_1}{2}(\xi_1 - \xi_2) &= 0, \\ z^2 - z(\xi_1 + \xi_2) - \frac{1}{4} \left[(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon - i\lambda_1)^2 - (\xi_1 - \xi_2)^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta\nu_{\pm} = \frac{\xi_1 + \xi_2 - \varepsilon - i\lambda_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon - i\lambda_1)^2 + 4\xi_1\xi_2}. \quad (2.55)$$

Декременты обоих мод $(-\text{Im}(\Delta\nu_{\pm}))$:

$$-\text{Im}(\Delta\nu_{\pm}) = \frac{\lambda_1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + 4\lambda_1^2(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon)^2} - X}{2}}, \quad (2.56)$$

где

$$X = (\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon)^2 + 4\xi_1\xi_2 - \lambda_1^2,$$

являются положительными величинами. Для моды (+) такое утверждение проверяется прямым вычислением:

$$\begin{aligned} (2\lambda_1^2 + X)^2 &> X^2 + 4\lambda_1^2(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon)^2, \\ 4\lambda_1^2(X + \lambda_1^2) &= 4\lambda_1^2(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon)^2 + 16\lambda_1^2\xi_1\xi_2 > 4\lambda_1^2(\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Это означает, что вблизи разностного резонанса когерентные колебания обоих сгустков затухают. Связь когерентных колебаний сгустков в МВ приводит к перераспределению декрементов затухания, которые имели их когерентные колебания в отсутствии встреч. При демпфировании колебаний в одном из сгустков максимальное значение декремента затухания, которое может быть передано колебаниям второго, равно $\lambda_1/2$. Это осуществляется в точном резонансе $\xi_1 - \xi_2 + \varepsilon = 0$. В этой точке сдвиги частот колебаний связанных мод определяются выражениями

$$\Delta\nu_{\pm} = \frac{2\xi_1 - i\lambda_1 \pm \sqrt{4\xi_1\xi_2 - \lambda_1^2}}{2}. \quad (2.57)$$

Вблизи суммового резонанса $\varepsilon = \nu_0^{(1)} + \nu_0^{(2)} - k$, где $|\varepsilon| \ll \nu_0^{(1,2)}$, отбор в правой части дисперсионного уравнения (2.45) старших по величине членов приводит к замене уравнения (2.52) на

$$1 \simeq \frac{\xi_1}{\Delta\nu} - \frac{\xi_2}{\Delta\nu + \varepsilon}. \quad (2.58)$$

В отличие от (2.53), корни этого уравнения равные

$$\Delta\nu_{\pm} = \frac{\xi_1 - \xi_2 - \varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + \xi_1 + \xi_2)^2 - 4\xi_1\xi_2}, \quad (2.59)$$

предсказывают неустойчивость когерентных колебаний в области частот

$$-2\sqrt{\xi_1\xi_2} \leq \varepsilon + \xi_1 + \xi_2 \leq 2\sqrt{\xi_1\xi_2}, \quad (2.60)$$

где мода $(-)$ затухает, а мода $(+)$ нарастает с инкрементом

$$\text{Im}\Delta\nu_+ = \sqrt{\xi_1\xi_2 - \frac{(\varepsilon + \xi_1 + \xi_2)^2}{4}}. \quad (2.61)$$

Эта величина достигает своего максимального значения

$$(\text{Im}\Delta\nu_+)_{\max} = \sqrt{\xi_1\xi_2} \quad (2.62)$$

в середине запрещенной полосы частот (2.60) $\varepsilon + \xi_1 + \xi_2 = 0$, что совпадает с условием точного суммового резонанса. Вдали от границ

запрещенной полосы когерентные колебания сгустков устойчивы, а частоты мод ($\pm$) равны следующим величинам (например, $\varepsilon + \xi_1 + \xi_2 > 0$):

$$\nu_+ \simeq \nu_0^{(1)} + \xi_1 - \frac{\xi_1 \xi_2}{(\varepsilon + \xi_1 + \xi_2)}, \quad (2.63)$$

$$\nu_- \simeq k - \nu_0^{(2)} - \xi_2 + \frac{\xi_1 \xi_2}{(\varepsilon + \xi_1 + \xi_2)}. \quad (2.64)$$

Напомним, что в этих формулах k – номер резонансной гармоники. Видно, что в такой области ε связь когерентных колебаний сгустков за счет их взаимодействия в МВ приводит к весьма малым сдвигам частот мод $\nu_{\pm}$ от частот некогерентных колебаний частиц. Из (2.59) следует, что сдвиги частот мод $\Delta\nu_{\pm}$ увеличиваются и сближаются при приближении ε к границам запрещенной полосы частот. Прямо на этих границах ($\varepsilon^{\pm} = -\xi_1 - \xi_2 \pm 2\sqrt{\xi_1 \xi_2}$) частоты мод когерентных колебаний стремятся к величинам:

$$\nu^{(+)} = \nu_0^{(1)} + \xi_1 - \sqrt{\xi_1 \xi_2}, \quad \varepsilon = \varepsilon^+, \quad (2.65)$$

$$\nu^{(-)} = \nu_0^{(1)} + \xi_1 + \sqrt{\xi_1 \xi_2}, \quad \varepsilon = \varepsilon^-. \quad (2.66)$$

Такие соотношения следует учитывать при интерпретации результатов измерений спектров когерентных колебаний несимметричных встречных пучков.

Неустойчивость встречных пучков вблизи суммового резонанса относится к неустойчивостям динамического типа (например, в [1]). Это означает, что демпфирование неустойчивых когерентных мод требует подавления колебаний обоих сталкивающихся сгустков. Действительно, переписав уравнение (2.58) в виде

$$1 = \frac{\xi_1}{\Delta\nu + i\lambda_1} - \frac{\xi_2}{\Delta\nu + i\lambda_2 + \varepsilon}, \quad (2.67)$$

и определив

$$\Lambda_+ = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \Lambda_- = \lambda_1 - \lambda_2, \quad (2.68)$$

получим

$$\Delta\nu_{\pm} = \frac{\xi_1 - \xi_2 - \varepsilon - i\Lambda_+}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\xi_1 + \xi_2 + \varepsilon - i\Lambda_-)^2 - 4\xi_1 \xi_2}. \quad (2.69)$$

Вычислением декрементов мод

$$-\operatorname{Im}(\Delta\nu_{\pm}) = \frac{\Lambda_+}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + 4\Lambda_-^2 (\xi_1 + \xi_2 + \varepsilon)^2} - X}{2}}, \quad (2.70)$$

где

$$X = (\xi_1 + \xi_2 + \varepsilon)^2 - 4\xi_1\xi_2 - \Lambda_-^2, \quad (2.71)$$

находим условие устойчивости колебаний

$$(\xi_1 + \xi_2 + \varepsilon)^2 > \Lambda_+^2 \left(\frac{\xi_1\xi_2}{\lambda_1\lambda_2} - 1 \right). \quad (2.72)$$

Это условие никогда не выполнено, если $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Наоборот, оно выполняется для любых расстроек ε , если произведение декрементов затухания когерентных колебаний в кольцах (1) и (2) достаточно велико

$$\xi_1\xi_2 < \lambda_1\lambda_2. \quad (2.73)$$

При большом отличии величин ξ_1 и ξ_2 это условие, в общем, облегчает требования на величины декрементов λ_1 и λ_2 необходимые для подавления неустойчивой моды когерентных колебаний.

2.2.3. Симметричные встречные пучки

Большинство современных электрон-позитронных коллайдеров работают в режимах, когда значения параметров сталкивающихся сгустков ξ_1 и $\nu_0^{(1)}$, а также ξ_2 и $\nu_0^{(2)}$ близки, или просто равны. В таких случаях ($\xi_1 = \xi_2 = \xi$ и $\nu_0^{(1)} = \nu_0^{(2)} = \nu_0$) иногда еще говорят о столкновениях симметричных сгустков. Основные особенности когерентных колебаний таких сгустков можно проследить с помощью формул (2.47) и (2.48), которые теперь запишутся в виде

$$\cos 2\pi\nu_{\pm} = \cos \mu \pm 2\pi\xi \sin 2\pi\nu_0 \quad (2.74)$$

и

$$\cos \mu = \cos 2\pi\nu_0 - 2\pi\xi \sin 2\pi\nu_0. \quad (2.75)$$

Видно, что частота моды (+) вообще не зависит от взаимодействия пучков в МВ ($\cos 2\pi\nu_+ = \cos 2\pi\nu_0$). Для этой моды и при выполнении, например, условия $2\pi\xi \ll 1$ положительная величина сдвига частот некогерентных колебаний частиц ($\Delta\nu = \xi$) в точности компенсируется отрицательным значением когерентного сдвига частоты моды ($\Delta\nu = -\xi$). Согласно формулам (2.43) и (2.44) таким свойством обладают колебания общего центра тяжести симметричных сталкивающихся пучков $(d_1 + d_2)/2$.

Мода (−) описывает относительные когерентные колебания (колебания прицельного параметра $b = d_1 - d_2$) сталкивающихся сгустков. В этой связи, такую моду еще называют π -модой. Частота таких колебаний существенно меняется взаимодействием пучков в МВ

$$\cos 2\pi\nu_- = \cos 2\pi\nu_0 - 4\pi\xi \sin 2\pi\nu_0. \quad (2.76)$$

Как видно из (2.75), половина этого воздействия обязана некогерентному сдвигу частоты колебаний частиц, а вторая половина – взаимодействию когерентных колебаний сгустков. Для симметричных столкновений условие разностного резонанса $\varepsilon = \nu_0^{(1)} - \nu_0^{(2)} - k = 0$ выполняется лишь для гармоники $k = 0$. При этом из формулы (2.53) получаем

$$\Delta\nu_+ = 0, \quad \Delta\nu_- = 2\xi. \quad (2.77)$$

Суммовые резонансы системы $2\nu_0 \simeq k$, где $k \neq 0$ – одно из чисел натурального ряда, могут приводить к неустойчивости когерентных колебаний. Если значение параметра ξ задано, то колебания будут устойчивы при выполнении условия

$$-1 \leq \cos 2\pi\nu_0 - 4\pi\xi \sin 2\pi\nu_0 \leq 1.$$

Для области частот $0 \leq \nu_0 \leq 1/2$ это условие эквивалентно требованию

$$\xi \leq \xi_{th} = \frac{1}{4\pi} \cot(\pi\nu_0). \quad (2.78)$$

Сравнение этого выражения и (2.23) показывает, что в рамках принятой модели требование устойчивости когерентных колебаний сгустков устанавливает вдвое меньшее допустимое значение ξ , чем то, что требуется для устойчивости некогерентных колебаний (рис. 3).

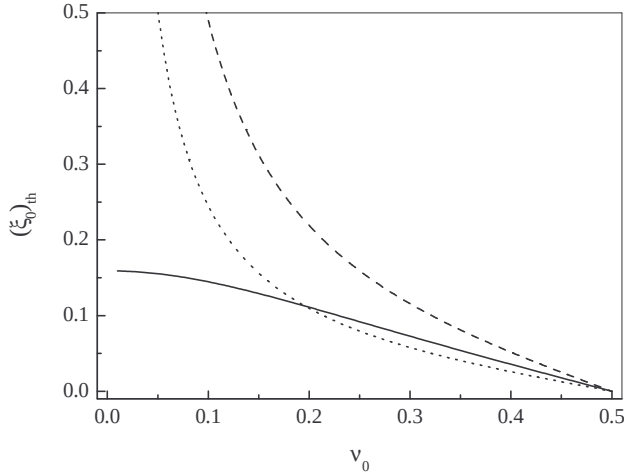


Рис. 3. Зависимость порогового значения $(\xi_0)_{th}$ от частоты невозмущенных бетатронных колебаний ν_0 . Пунктир – некогерентные колебания, точки – формула (2.78), сплошная линия – учет самосогласованного и симметричного изменения динамических β -функций

Самосогласованное изменение β -функций колец в МВ за счет действия полей встречных сгустков изменяет условие устойчивости (2.78). Предполагая сохранение симметрии взаимодействия и используя формулу (2.32), перепишем (2.76) в виде ($\mu_0 = 2\pi\nu_0$)

$$\begin{aligned} \cos 2\pi\nu_- &= \cos \mu_0 - 2Bu \sin \mu_0 \\ &= \frac{(1 - B^2) \cos \mu_0 - 2B\sqrt{B^2 + \sin^2 \mu_0}}{1 + B^2}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где

$$B = 2\pi\xi_0, \quad \xi_0 = \frac{Ne^2}{4\pi r c \epsilon}. \quad (2.80)$$

Простые вычисления показывают, что условие $\cos 2\pi\nu_- \leq 1$ выполняется при всех значениях B и μ_0 , а условие $\cos 2\pi\nu_- \geq -1$ – лишь

для значений, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{(1 - B^2) \cos \mu_0 - 2B \sqrt{B^2 + \sin^2 \mu_0}}{1 + B^2} &> 0, \\
\cos^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) + B^2 \sin^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) - B \sqrt{B^2 + \sin^2 \mu_0} &> 0, \\
\left(\cos^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) + B^2 \sin^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) \right)^2 - B^2 (B^2 + \sin^2 \mu_0) &> 0, \\
\cos^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) - 2B^2 \sin^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) - B^4 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\mu_0}{2} \right) \right) &> 0.
\end{aligned}$$

Решая эти неравенства относительно B , получаем условие устойчивости колебаний:

$$\xi_0 \leq (\xi_0)_{th} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\mu_0/2)}{\sqrt{1 + \sin^2(\mu_0/2)}} = \frac{\xi_{th}^{(0)}}{\sqrt{2 + \left(2\pi \xi_{th}^{(0)} \right)^2}}, \quad (2.81)$$

где $\xi_{th}^{(0)}$ определено в формуле (2.23):

$$\xi_{th}^{(0)} = \frac{\cot(\pi\nu_0)}{2\pi}.$$

Аналогично выражению (2.78) формула (2.81) предсказывает увеличение порогового значения $(\xi_0)_{th}$ при приближении частоты колебаний ν_0 к целому, или полуцелому, числу сверху. Вместе с тем, максимальная величина $(\xi_0)_{th}$ не превышает $1/(2\pi)$. Поэтому мы можем заключить, что самосогласованные изменения β -функций полями встречных сгустков, в целом, усиливают неустойчивости когерентных колебаний встречных пучков при приближении частот бетатронных колебаний частиц к параметрическим резонансам сверху (рис. 3).

3. Дипольные колебания больших амплитуд

При всей своей ограниченности и недостатках, использование модели жестких сгустков для описания когерентных колебаний встреч-

ных пучков временами может приводить к любопытным результатам. В частности, отказываясь от возможности описания и исследования влияния на процессы внутренних степеней свободы сгустков, мы получаем средство для сравнительно простого описания нелинейных дипольных когерентных колебаний, например, встречных пучков. В модели жесткого сгустка предполагается, что состояния стелкивающихся сгустков в поперечном фазовом пространстве в любой момент времени ($\theta = \omega_0 t$) описываются функциями распределения

$$f^{(1,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \theta) = f_0^{(1,2)} \left((\mathbf{r} - \mathbf{d}_{1,2}(\theta))^2, (\mathbf{p} - p\mathbf{d}'_{1,2}(\theta))^2 \right), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{d}(\theta)$ – компоненты поперечных дипольных моментов пучка, а функции распределения $f_0^{(1,2)}$ описывают сгустки без когерентных колебаний при нулевых смещениях $\mathbf{d}(\theta)$. Такие функции распределения могут получаться при быстром и одновременном смещении всех частиц сгустка в поперечном фазовом пространстве в направлении $\mathbf{d}(\theta_0)$, или $p\mathbf{d}'(\theta_0)$, θ_0 – начальный момент времени. Ангармоничность колебаний приводит к тому, что в последующие моменты времени функции распределения $f_0^{(1,2)}$ начнут расплываться в фазовом пространстве. Если величина $\delta\nu$ определяет характерный разброс частот бетатронных колебания в сгустках, такими процессами расплывания можно пренебречь на временах $\Delta\theta\delta\nu \sim 1$. Поэтому расчеты, выполненные в рамках модели жестких сгустков, могут давать разумные результаты лишь для достаточно быстрых, или для достаточно частых процессов.

В рамках модели все изменения функций распределения сводятся к дипольным когерентным колебаниям $\mathbf{d}(\theta)$. Уравнения движения для, например, вертикальной компоненты дипольного момента пучка (1) получаются усреднением уравнения (2.8) с функцией распределения $f^{(1)}$. Для простоты описания бетатронных колебаний частиц в кольцах будем использовать приближение сглаженной фокусировки. Кроме того, мы упростим вычисления считая, что распределения частиц в сгустках гауссовы, а поперечные сечения сгустков в МВ имеют круглую форму ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma$). Тогда, определив $(\mathbf{d}_1)_y = d_1$,

пишем ($e_1 e_2 = -e^2$)

$$d_1'' + \nu_{1y}^2 d_1 = -2 \frac{N_2 e^2 R_0}{2\pi p c} K(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi \sigma_1^2} e^{-x^2/(2\sigma_1^2)} \quad (3.2)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{(y - d_1(\theta))^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1 - e^{-r^2/(2\sigma_2^2)}}{r^2} (y - d_2(\theta)),$$

где $r^2 = x^2 + (y - d_2(\theta))^2$, а функция $K(\theta)$ определена в уравнении (2.37). Подстановкой $y - d_1(\theta) \rightarrow y$ убеждаемся в том, что выражение в правой части этого уравнения зависит лишь от прицельного расстояния сталкивающихся пучков $b = d_1 - d_2$. Интегралы по поперечным координатам в правой части (3.2) наиболее просто вычисляются с использованием представления полей встречных сгустков в виде интегралов Фурье. В таком представлении электрическое поле, например, сгустка (2) вместо формулы (2.2) определяется выражениями

$$E_y = -\rho_2(s + ct) \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.3)$$

$$U = N_2 e_2 \int \frac{dk_x dk_y}{\pi k^2} \varrho^{(2)}(k_x, k_y) \exp(ik_x x + ik_y y), \quad (3.4)$$

где для гауссова сгустка

$$\varrho^{(2)}(k_x, k_y) = \exp\left(-\frac{(k_x^2 + k_y^2)\sigma_2^2}{2}\right), \quad (3.5)$$

а сила $F_y^{(1,2)}$ в (2.7) – выражением

$$\frac{F_y^{(1,2)}}{\gamma M \omega_0^2} = \frac{2N_2 e^2 R_0^2}{p c} \rho_2(s + ct) \quad (3.6)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dk_x dk_y}{\pi k^2} \varrho^{(2)}(k_x, k_y) \exp(ik_x x + ik_y(y - d_2)).$$

С учетом этого, уравнение (3.2) переписывается в виде

$$d_1'' + \nu_{1y}^2 d_1 = \frac{2N_2 e^2 R_0}{2\pi p c} K(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \varrho^{(1)}(x, y - d_1)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dk_x dk_y}{\pi k^2} \varrho^{(2)}(k_x, k_y) \exp(ik_x x + ik_y(y - d_2)),$$

или

$$d_1'' + \nu_{1y}^2 d_1 = \frac{2N_2 e^2 R_0}{2\pi r c} K(\theta) \frac{\partial U_{1,2}}{\partial b}, \quad (3.7)$$

где

$$U_{1,2}(b) = \int \frac{dk_x dk_y}{\pi k^2} \varrho^{(1)}(-k_x, -k_y) \varrho^{(2)}(k_x, k_y) e^{ik_y b}. \quad (3.8)$$

Аналогично, для сгустка (2) получаем

$$d_2'' + \nu_{2y}^2 d_2 = -\frac{2N_1 e^2 R_0}{2\pi r c} K(\theta) \frac{\partial U_{2,1}}{\partial b}. \quad (3.9)$$

Дальнейшее упрощение задачи возможно для сгустков, движущихся в накопителях с равными частотами бетатронных колебаний, например, $\nu_{1y} = \nu_{2y} = \nu_y$. В таком случае, вычитая из (3.7) уравнение (3.9), получим

$$b'' + \nu_y^2 b = \frac{4N e^2 R_0}{2\pi r c} K(\theta) \frac{\partial U_t}{\partial b}, \quad (3.10)$$

где

$$U_t = \frac{N_2 U_{1,2} + N_1 U_{2,1}}{2N}, \quad N = \frac{N_1 + N_2}{2}. \quad (3.11)$$

Определив также положение общего центра тяжести сгустков соотношением

$$Y = \frac{N_1 d_1 + N_2 d_2}{2N} \quad (3.12)$$

и сложив уравнения (3.7) и (3.9) с соответствующими коэффициентами, находим, что поля встречных сгустков не возмущают колебания их общего центра тяжести

$$Y'' + \nu_y^2 Y = 0. \quad (3.13)$$

Возвращаясь к уравнению (3.10), заметим, что, формально, оно описывает колебания одной частицы, которая периодически проходит место встречи с (вертикальной) координатой $b(\theta)$ и которая возмущается там заданным полем встречного сгустка с потенциалом U_t . Любопытно, что здесь самосогласованные изменения амплитуд дипольных когерентных колебаний сгустков в точности описываются несамосогласованными уравнениями модели слабого и сильного сгустков.

Комбинируя формулы (3.8) и (3.11), находим, что потенциал U_t порождается распределением в МВ заряда с Фурье-амплитудами плотности

$$\begin{aligned}\varrho_t &= \frac{N_2}{2N} \varrho^{(1)}(-k_x, -k_y) \varrho^{(2)}(k_x, k_y) \\ &+ \frac{N_1}{2N} \varrho^{(1)}(k_x, k_y) \varrho^{(2)}(-k_x, -k_y).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Для гауссовых сгустков круглого поперечного сечения используя (3.5), находим

$$\varrho_t = \exp\left(-\frac{k^2 \Sigma^2}{2}\right), \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \Sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \quad (3.15)$$

а

$$U_t = \int \frac{dk_x dk_y}{\pi k^2} \varrho_t(k_x, k_y) e^{ik_y b}. \quad (3.16)$$

После этого мы можем вычислить величину $\partial U_t / \partial b$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_t}{\partial b} &= i \int \frac{dk_x dk_y k_y}{\pi k^2} \exp\left(-\frac{k^2 \Sigma^2}{2} + ik_y b\right) \\ &= \frac{i}{\pi \Sigma} \int \frac{dk_x dk_y k_y}{k^2} \exp\left(-\frac{k^2}{2} + ik_y y\right), \quad y = \frac{b}{\Sigma} \\ &= \frac{i}{\pi \Sigma} \int_0^\infty dk e^{-k^2/2} \int_0^{2\pi} \exp(iky \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Подставив сюда формулы

$$\int_0^{2\pi} \exp(iky \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha = 2\pi i J_1(ky),$$

где $J_1(ky)$ – функция Бесселя первого порядка, и

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_1(ky) e^{-k^2/2} dk &= \int_0^\infty \frac{ky}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (k^2 y^2 / 4)^k}{k! (k+1)!} e^{-k^2/2} dk \\ &= \frac{y}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k! (k+1)!} \left(\frac{y^2}{2}\right)^k \int_0^\infty t^k e^{-t} dt = \frac{1 - e^{-y^2/2}}{y},\end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial U_t}{\partial b} = -\frac{2}{b} \left(1 - \exp \left(-\frac{b^2}{2\Sigma^2} \right) \right). \quad (3.18)$$

Поэтому уравнение (3.10) переписывается в виде

$$b'' + \nu_y^2 b = -\frac{4Ne^2 R_0}{\pi pc} K(\theta) \frac{1}{b} \left(1 - \exp \left(-\frac{b^2}{2\Sigma^2} \right) \right). \quad (3.19)$$

Для определения в данной модели параметра пространственного заряда сгустков, который мы обозначим посредством ξ_b , предположим, что длины сгустков равны нулю, и линеаризуем правую часть (3.19) по b . Учитывая, что в таком случае $K(\theta) = 2\pi\delta_T(\theta)$, где $\delta_T(\theta)$ – периодическая δ -функция, получаем уравнение

$$b'' + \nu_y^2 b = -\frac{4Ne^2 R_0}{pc\Sigma^2} \delta_T(\theta) b, \quad \frac{1}{D} = \frac{4Ne^2}{pc\Sigma^2}. \quad (3.20)$$

Оно означает, что после прохождения места встречи значение b не меняется, а b' изменяется на величину $\delta b' = -R_0 b/D$. Перемножением матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R_0}{2D} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \mu_0 & \frac{\beta_0}{R_0} \sin \mu_0 \\ -\frac{R_0}{\beta_0} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{R_0}{2D} & 1 \end{bmatrix}$$

находим

$$\cos \mu_- = \cos \mu_0 - 2\pi\xi_b \sin \mu_0, \quad (3.21)$$

где

$$\xi_b = \frac{Ne^2 \beta_0}{\pi pc \Sigma^2}. \quad (3.22)$$

Для симметричных столкновений $N_1 = N_2 = N$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $\Sigma^2 = 2\sigma^2$ получаем

$$\xi_b = \frac{Ne^2 \beta_0}{2\pi pc \sigma^2} = 2\xi. \quad (3.23)$$

В этом случае предсказания формул (3.21) и (2.76) совпадают. Вместе с тем, предсказания данной модели расходятся с предсказаниями уравнений (2.35), (2.36), записанными в предположении идентичной фокусировки в кольцах, но с отличающимися величинами ξ_1 и ξ_2 .

Как видно из уравнений (2.43) и (2.44), в таком случае гармоника колебаний координат общего центра тяжести сгустков

$$Y_n = \frac{\xi_2 d_{1n} + \xi_1 d_{2n}}{\xi_1 + \xi_2} = 0$$

не чувствительны к полям встречных пучков, а собственные частоты относительных колебаний ($b_n = d_{1n} - d_{2n}$) находятся решением дисперсионного уравнения

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\xi_{b0}\nu_0}{(n+\nu)^2 - \nu_0^2}, \quad \xi_{b0} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}. \quad (3.24)$$

Величины ξ_b и ξ_{b0} совпадают лишь при равенстве плотностей N_2/σ_2^2 и N_1/σ_1^2 . В остальных случаях они не равны. Причиной расхождения является способ получения уравнений (2.35), (2.36) и (3.20). Первые получены усреднением линеаризованных уравнений движения частиц тогда, как (3.20) получено линеаризацией по b предварительно усредненных уравнений (2.8). В виду нелинейных зависимостей полей пространственного заряда встречного сгустка от координат частиц это приводит к различию в предсказаниях поведения когерентных колебаний сгустков в этих двух моделях.

3.1. Нелинейные колебания коротких сгустков

Как уже упоминалось, в модели жестких сгустков когерентные колебания описываются уравнениями, которые с точностью до масштабного преобразования эквивалентны уравнениям движения одной частицы сгустка (1), или (2) движущейся в заданных полях сгустка-партнера. Как уже говорилось, последний прием часто используется при изучении неустойчивостей нелинейных колебаний такой пробной частицы и называется моделью слабого и сильного сгустков. К настоящему времени установлены многочисленные результаты и предсказания такой модели, которые с помощью уравнений (3.7), (3.9), или уравнения (3.10) могут быть перенесены на описание особенностей когерентных колебаний встречных пучков больших амплитуд. Для простоты мы рассмотрим случай, когда фокусировки частиц в кольцах совпадают, длины сгустков малы по сравнению с величиной β -функции в МВ ($K(\theta) = 2\pi\delta_T(\theta)$), а когерентные

колебания описываются уравнением (3.10):

$$b'' + g(\theta)b = \frac{4Ne^2R_0}{pc}\delta_T(\theta)\frac{\partial U_t}{\partial b}. \quad (3.25)$$

Здесь $g(\theta)$ коэффициент жесткости бетатронных колебаний в любом из колец. Как и следовало ожидать, движение, описываемое уравнением (3.25), гамильтоново. Одной из причин этого является бездиссипативность полей встречных сгустков в МВ. Другая – связана с предположением о жесткости сгустков. Поскольку такие сгустки не имеют внутренних степеней свободы, в задаче отсутствует затухание Ландау когерентных колебаний. Для некогерентных колебаний частиц возможные негамильтоновы слагаемые в эквивалентах уравнения (3.25) могли бы быть обусловлены охлаждением пучков. Для когерентных колебаний такие добавки могут еще появиться в (3.25) из-за использования в кольцах систем подавления дипольных когерентных колебаний пучков, которые так, или иначе, вносят быстрое затухание в дипольные колебания. Если же системы подавления не используются, то уравнение (3.25) может быть получено с помощью гамильтониана. После канонического преобразования к переменным действие-угол невозмущенных когерентных колебаний такой гамильтониан записывается в виде

$$H = \nu_y I + \delta H, \quad \delta H = -\frac{4Ne^2}{c}\delta_T(\theta)U_t, \quad (3.26)$$

где U_t определяется формулой (3.16). Каноническое преобразование от переменных $(b, pb'/R_0)$ к переменным действие-угол (I, ψ) в МВ определяется формулами:

$$b = \sqrt{J\beta_0} \cos \psi, \quad b' = -R_0 \sqrt{\frac{J}{\beta_0}} \sin \psi, \quad I = \frac{pJ}{2}. \quad (3.27)$$

Здесь мы предположили, что в МВ дисперсионные функции колец и производные β' равны нулю.

3.2. Сдвиги частот колебаний коротких сгустков

Хотя прямое решение нелинейного уравнения (3.25) затруднено, малость возмущений в МВ и гамильтоновость движения позволяют

установить многие важные особенности колебаний больших амплитуд. Одним из наиболее важных следствий является появление ангармоничности когерентных колебаний сгустков. Это означает, что в отличие от линейных когерентных колебаний, частоты колебаний, описываемых уравнением (3.25), зависят от амплитуд когерентных колебаний. Пользуясь стандартными методами (например, в [4]), находим, что в первом приближении метода усреднений сдвиг частоты когерентных колебаний определяется выражением

$$\Delta\nu_y = \frac{2}{p} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\psi}{(2\pi)^2} \frac{\partial \delta H}{\partial J}. \quad (3.28)$$

Подставив сюда (3.26), (3.27) и (3.17), пишем

$$\begin{aligned} \Delta\nu_y &= -\frac{4Ne^2}{\pi pc} \frac{\partial b}{\partial J} \frac{\partial U_t}{\partial b} \\ &= -\frac{4Ne^2}{\pi pc} \frac{\sqrt{\beta_0}}{2\sqrt{J}} \frac{i}{\pi\Sigma} \int \frac{dk_x dk_y k_y}{k^2} e^{-k^2/2} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos\psi \exp\left(i \frac{k_y \sqrt{J\beta_0}}{\Sigma} \cos\psi\right) \frac{d\psi}{2\pi}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись интегральным представлением функции Бесселя первого порядка $J_1(x)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \cos\psi \exp\left(i \frac{k_y \sqrt{J\beta_0}}{\Sigma} \cos\psi\right) = iJ_1\left(\frac{k_y \sqrt{J\beta_0}}{\Sigma}\right),$$

получаем

$$\Delta\nu_y = \frac{2Ne^2\sqrt{\beta_0}}{\pi pc\Sigma\sqrt{J}} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\pi} \cos\alpha \int_0^\infty \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) J_1(ku) dk, \quad (3.29)$$

где α – полярный угол ($k_y = k \cos\alpha$), а

$$u = \frac{\sqrt{J\beta_0}}{\Sigma} \cos\alpha.$$

Простое интегрирование в (3.29) по k и α :

$$\int_0^\infty dk e^{-k^2/2} J_1(ku) = \frac{1 - e^{-u^2/2}}{u},$$

$$\frac{\Sigma}{\sqrt{J\beta_0}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha (1 - \exp(-q \cos^2 \alpha)) = \frac{2\Sigma}{\sqrt{J\beta_0}} S,$$

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \exp(-q(1 - \cos 2\alpha)) \\ &= 1 - e^{-q} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \cosh(q \cos \alpha) = 1 - e^{-q} I_0(q), \end{aligned}$$

дает

$$\Delta\nu_y = \xi_b \frac{1 - e^{-q} I_0(q)}{q}, \quad q = \frac{J\beta_0}{4\Sigma^2}, \quad \xi_b = \frac{Ne^2\beta_0}{\pi pc\Sigma^2}. \quad (3.30)$$

Здесь $I_0(q)$ функция Бесселя мнимого аргумента. Видно, что для малых амплитуд колебаний ($q \ll 1$) и малых значений $\xi_b \ll 1$ сдвиг частоты $\Delta\nu_y$ совпадает со сдвигом частоты линейных когерентных колебаний, рассчитанным по формуле (3.21) вдали от параметрических резонансов. С увеличением амплитуды когерентных колебаний $q \rightarrow \infty$ фактор $e^{-q} I_0(q)$ в (3.30) стремится к нулю. Поэтому в области $J \gg 4\Sigma^2/\beta_0$ сдвиг частоты $\Delta\nu_y$ уменьшается по следующему закону:

$$\Delta\nu_y = \xi_b \frac{4\Sigma^2}{J\beta_0}. \quad (3.31)$$

Сравнение сдвигов частот для когерентных и некогерентных колебаний в предположении, например, о симметрии столкновений ($N_1 = N_2 = N$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $\Sigma^2 = 2\sigma^2$, рис. 4) показывает, что в эквивалентных условиях сдвиги частот когерентных колебаний превышают сдвиги частот некогерентных колебаний и медленнее убывают с ростом амплитуд колебаний.

Если в сталкивающихся пучках одновременно возбуждены вертикальные и горизонтальные дипольные колебания, то они описываются уравнениями, которые получаются с помощью гамильтониана

$$H = \nu_y I_y + \nu_x I_x + \delta H, \quad \delta H = -\frac{4Ne^2}{c} \delta_T(\theta) U_t, \quad (3.32)$$

где

$$U_t(b_y, b_x) = \int \frac{dk_x dk_y}{\pi k^2} \varrho_t(k_x, k_y) e^{ik_y b_y + ik_x b_x}, \quad (3.33)$$

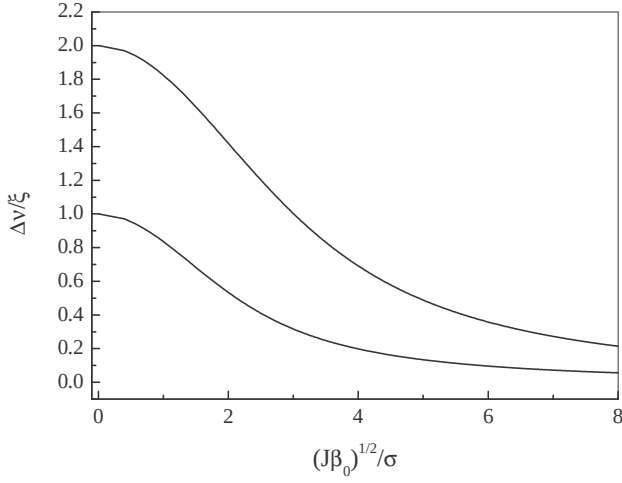


Рис. 4. Зависимость сдвига частоты когерентных колебаний (верхняя линия) и некогерентных колебаний (нижняя) от амплитуды колебания. Симметричные столкновения

а b_y и b_x проекции прицельного параметра сталкивающихся сгустков на вертикальное и горизонтальное направления, соответственно. В таком случае, сдвиги частот вертикальных и горизонтальных когерентных колебаний зависят от их амплитуд одновременно. Так, увеличение амплитуды горизонтальных когерентных колебаний уменьшает среднюю силу, действующую на частицы встречного сгустка в вертикальном направлении. Это приводит к уменьшению сдвигов частот когерентных колебаний $\Delta\nu_y(J_y, J_x)$ и $\Delta\nu_x(J_y, J_x)$ при увеличении амплитуд этих колебаний $\sqrt{J_y\beta_0}$ и $\sqrt{J_x\beta_0}$. Хотя явные выражения, определяющие функции $\Delta\nu_y(J_y, J_x)$ и $\Delta\nu_x(J_y, J_x)$ могут оказаться довольно сложными, сравнительно легко вычислить их предельные значения, например, $\Delta\nu_y(J_y, 0)$ (в уравнении (3.30)) и $\Delta\nu_y(0, J_x)$. Последняя функция находится с помощью соотношения

$$\Delta\nu_y(J_y, J_x) = - \left(\frac{2}{p} \right) \frac{4Ne^2}{2\pi c} \frac{\partial b_y}{\partial J_y} \frac{\partial U_t}{\partial b_y}.$$

Положив здесь $J_y \rightarrow 0$, пишем

$$\begin{aligned}\Delta\nu_y(0, J_x) &= \frac{2Ne^2\beta_0}{2\pi^2pc\Sigma^2} \int \frac{dk_x dk_y k_y^2}{k^2} e^{-k^2/2} J_0\left(\frac{k_x \sqrt{J_x \beta_0}}{\Sigma}\right) \\ &= \xi_b \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\pi} \sin^2 \alpha \int_0^\infty e^{-k^2/2} J_0\left(\frac{k \cos \alpha \sqrt{J_x \beta_0}}{\Sigma}\right) k dk.\end{aligned}$$

Как уже упоминалось, интеграл

$$A = \int_0^\infty e^{-k^2/2} J_0\left(\frac{k \cos \alpha \sqrt{J_x \beta_0}}{\Sigma}\right) k dk$$

вычисляется разложением функции Бесселя в ряд Тэйлора по степеням аргумента. Результат записывается в виде:

$$A = \exp\left(-\frac{J_x \beta_0 \cos^2 \alpha}{2\Sigma^2}\right).$$

Поэтому получаем

$$\Delta\nu_y(0, J_x) = \xi_b \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \exp\left(-\frac{J_x \beta_0 \cos^2 \alpha}{2\Sigma^2}\right) \frac{d\alpha}{\pi}.$$

Воспользовавшись теперь одним из интегральных представлений функций Бесселя мнимого аргумента

$$I_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(m\theta) d\theta,$$

приходим к выражению

$$\Delta\nu_y(0, J_x) = \xi_b e^{-q_x} (I_0(q_x) + I_1(q_x)), \quad q_x = \frac{J_x \beta_0}{4\Sigma^2}. \quad (3.34)$$

Формулы (3.30) и (3.34) отображают оси $J_x = 0$ и $J_y = 0$ плоскости амплитуд когерентных колебаний (J_x, J_y) в некоторые линии в плоскости частот когерентных колебаний (ν_x, ν_y) . Поскольку сдвиги частот не превышают ξ_b , все возможные частоты когерентных колебаний сталкивающихся сгустков находятся внутри области, ограниченной этими линиями. Такую область принято называть следом пучка (в зарубежной литературе – footprint) в пространстве частот колебаний. Для пучков с гауссовым распределением поперечных координат и круглым поперечным сечением такой след в плоскости (ν_x, ν_y) вытянут вдоль линии разностного резонанса $\nu_y = \nu_x$ и симметричен относительно этой линии (рис. 5).

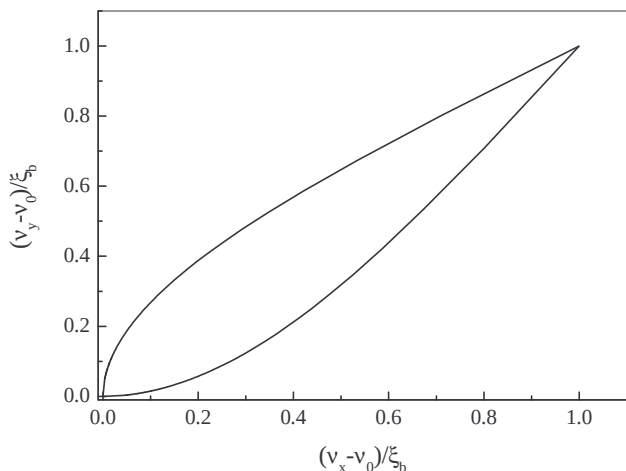


Рис. 5. След двумерных дипольных когерентных колебаний сталкивающихся сгустков, описанных в тексте

3.3. Резонансные кривые дипольных колебаний встречных пучков

Когерентные колебания встречных пучков могут изучаться, раскачивая колебания одного из пучков и измеряя амплитуды колебаний пучка партнера. Взаимодействие пучков в МВ сдвигает частоты колебаний частиц и когерентных колебаний относительно их невозмущенных значений. Величина такого сдвига зависит от значений параметров пространственного заряда сгустков ξ . Поэтому, измеряя, например, спектры когерентных колебаний встречных пучков, то есть зависимости амплитуд когерентных колебаний сгустков от частоты возмущающей силы, можно устанавливать величины параметров пространственного заряда сгустков. Измерение спектров дипольных колебаний встречных пучков требует использования лишь простейших отклоняющих систем (дефлекторов) и дифференциальных пикап-электродов. В силу своей простоты, этот класс измерений часто используется и описывается в связи с изучением когерентных колебаний встречных пучков. В теории колебаний измеряемая при этом зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты раскачки называется резонансной кривой. Поэтому измерения спек-

тров колебаний всегда сводится к построению их резонансных кривых.

Наиболее просто выглядит резонансная кривая линейного осциллятора. Это – плавная кривая, которая имеет пик на частоте осциллятора. Такая кривая симметрична относительно резонансной частоты. Как мы видели, из-за нелинейностей полей в МВ сдвиги частот когерентных колебаний встречных пучков могут существенно зависеть от амплитуд этих колебаний. Такая зависимость существенно искажает ход и форму резонансной кривой. Благодаря зависимости частот от амплитуд раскачка колебаний сопровождается расстройкой частот осциллятора и возмущающей силы и выходом осциллятора из резонанса. Рост амплитуды колебаний осциллятора при этом прекращается.

Для построения резонансных кривых дипольных когерентных колебаний встречных пучков мы воспользуемся техникой, описанной в [4]. Мы упростим вычисления предположив, что частота внешней силы, раскачивающей сгустки, не входит в запрещенную полосу частот дипольных колебаний, а не приближена к частотам нелинейных резонансов n/m , где n и m – взаимно простые, положительные числа. Для определенности, проведем расчеты для вертикальных когерентных колебаний. Пусть μ – безразмерная частота раскачки. Если демпфирование колебаний отсутствует, то вблизи резонанса $\nu_y - \mu \simeq n$ и в первом приближении метода усреднений относительные колебания сгустков описываются уравнениями

$$J' = Q\sqrt{J} \sin w, \quad w' = \varepsilon + \xi_b \frac{1 - e^{-q} I_0(q)}{q} + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos w. \quad (3.35)$$

Здесь мы использовали определения (3.27) и (3.30), $\varepsilon = \nu_y - \mu - n$, $w = \psi - (n + \mu)\theta$ – медленная фаза вблизи резонанса, а величина Q пропорциональна амплитуде раскачивающей колебания силы (например, см. в [4]). Уравнения (3.35) определяют точки равновесия $w = 0, \pi$ и

$$\varepsilon^{(\pm)} = -\xi_b \frac{1 - e^{-q} I_0(q)}{q} \mp \frac{Q}{2\sqrt{J}}. \quad (3.36)$$

Последнее уравнение в неявной форме задает резонансную кривую когерентных колебаний встречных пучков. Как и вообще для нели-

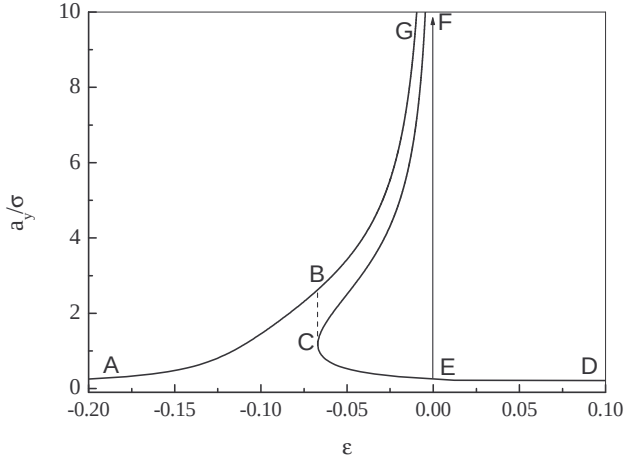


Рис. 6. Пример резонансной кривой дипольных когерентных колебаний встречных двух сгустков. Симметричные столкновения, демпфирования колебаний нет, $\xi_b = 0.1$, $Q = 0.05$

нейных колебаний, резонансная кривая несимметрична относительно точки $\varepsilon = 0$, или относительно точки $\varepsilon = -\xi_b$ (рис. 6) Она сосредоточена вблизи так называемой скелетной кривой

$$\varepsilon^{(\pm)} = -\xi_b \frac{1 - e^{-q} I_0(q)}{q}. \quad (3.37)$$

Вблизи точки $\varepsilon = 0$ амплитуды стационарных колебаний неограниченно растут по закону $J \simeq (Q/2\varepsilon)^2$. На резонансной кривой, изображенной на рис. 6, линии ABG и CED содержат центры сепаратрис когерентных колебаний, а линия CF – седловые точки этих сепаратрис (точки неустойчивого равновесия; [4]). В тех случаях, когда резонансная кривая измеряется непрерывным изменением частоты раскачки, результат измерения амплитуды колебаний зависит от направления изменения этой частоты. Если в процессе измерения величина ε увеличивается, то амплитуды стационарных когерентных колебаний будут следовать кривой ABCED. В точке B происходит срыв амплитуды. При обратном направлении изменения частоты раскачки амплитуды колебаний следуют линиям DEFGBA. После прохождения точки E амплитуда скачком вырастает до очень большого значе-

ния, которое в таком измерении определяется скоростью изменения частоты раскачки. Периодическое изменение частоты в диапазоне AD приведет к периодическому изменению амплитуды следуя линиям ABCED и DEFGBA. Такая зависимость амплитуд вынужденных колебаний от направления изменения частоты раскачки называется гистерезисом нелинейных колебаний. Это явление отсутствует у линейных осцилляторов.

Описанные результаты показывают, что измерения резонансных кривых позволяют установить значение величины ξ_b . Правда, интерпретация результатов таких измерений требует отчетливого знания всех полей, действующих на встречные сгустки.

Демпфирование когерентных колебаний сгустков приводит к появлению конечных точек резонансной кривой. Если вносимый декре-

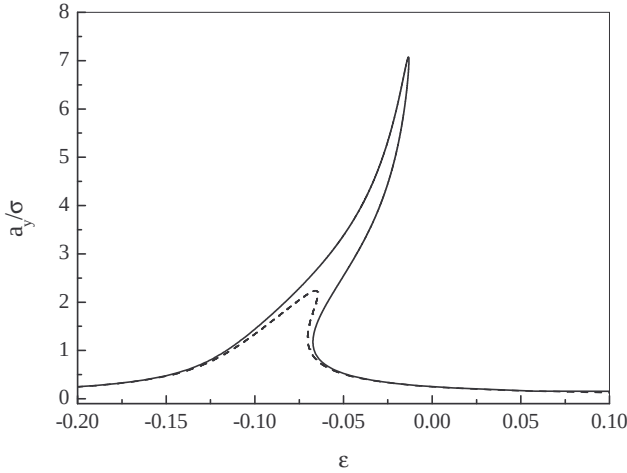


Рис. 7. Пример резонансной кривой дипольных когерентных колебаний встречных двух сгустков. Симметричные столкновения, сплошная линия – $(J_f/\epsilon) = 50$, пунктирная – $(J_f/\epsilon) = 5$, $\xi_b = 0.1$, $Q = 0.05$

мент колебаний равен Λ , то амплитуды вынужденных когерентных колебаний не могут превышать (рис. 7) значение, соответствующее величине

$$J \leq J_f = \left(\frac{Q}{\Lambda} \right)^2. \quad (3.38)$$

Увеличение декрементов затухания когерентных колебаний ослабляет гистерезисные явления в спектрах колебаний (например, пунктирная кривая на рис. 7).

3.4. Резонансы

Модуляции энергии взаимодействия встречных пучков фазами колебаний приводит к возможности проявления в когерентном движении многочисленных нелинейных резонансов. В пространстве частот колебаний такие резонансы могут быть одномерными (например, при выполнении условия $\nu_y \simeq n/m$, где n и m – целые числа), или двумерными. В последнем случае резонансное условие записывается в виде:

$$m_y \nu_y + m_x \nu_x = n, \quad (3.39)$$

где m_y , m_x и n – целые. Как уже говорилось, взаимодействие сгустков в МВ может приводить к заметной нелинейности когерентных колебаний встречных пучков. В частности, это выражается в зависимости частот когерентных колебаний от их амплитуд. Если в пучках возбуждено одномерное колебание (например, в вертикальном направлении), то в отсутствие других источников нелинейности фокусировки и при заданном значении частоты невозмущенных колебаний $\nu_y^{(0)}$, номере резонансной гармоники n , а также порядке резонанса m резонансное условие будет выполнено лишь для одного значения амплитуды колебаний

$$\Delta \nu_y(J_{y,s}) = \frac{n}{m} - \nu_y^{(0)}. \quad (3.40)$$

Для пучков с противоположными знаками зарядов величина $\Delta \nu_y(J_y)$ положительна. Поэтому резонансное условие выполняется для тех значений $\nu_y^{(0)}$, которые расположены ниже отношения n/m . В окрестности резонанса (3.40) фазовое пространство когерентных колебаний расслаивается. Фазовые траектории в непосредственной близости $J_{y,s}$ соответствуют финитным колебаниям по фазам в пределах $\Delta \psi_y \simeq 2\pi/m$, а фазовые траектории колебаний, которые достаточно далеко удалены от $J_{y,s}$, соответствуют инфинитному увеличению

фаз колебаний (либрации). Финитные и инфинитные фазовые траектории разделены сепаратрисами. Ширины сепаратрис по амплитудам колебаний определяются величинами гармоник потенциала $(U_t)_m$ (мощностями резонансов) и значениями сдвигов частот когерентных колебаний $\Delta\nu_y(J_y)$. В отсутствие демпфирования когерентных колебаний факт попадания колебания в сепаратрису или в либрационную область фазового пространства определяется начальными условиями. Если колебания сгустков демпфируются, но декременты затухания колебаний малы, чтобы разрушить сепаратрисы, то при попадании начальных условий внутрь сепаратрисы колебания сгустков будут затухать к ее центру. В этом же случае, но при попадании начальных условий в либрационную область колебания сгустков могут быть захвачены в сепаратрису, или пройти ее и продолжить затухание к замкнутой орбите. Реализация той, или иной возможности зависит от конкретных начальных условий. Это происходит из-за нарушения гамильтоновости коллективного движения сгустков демпфирующей системой.

Такая простая картина изменения фазового пространства колебаний возможна только в том случае, когда в окрестности резонанса (3.40) не оказывается ни одного другого подобного резонанса. Если это не так, то колебания вблизи таких резонансов влияют друг на друга. Это приводит к более сложным изменениям фазовых пространств колебаний встречных сгустков. Описание промежуточных случаев сближения резонансов, вообще, сложно и, как правило, требует привлечения численных методов. Можно, однако, утверждать, что увеличение перекрытия сепаратрис большого числа резонансов приводит сначала к образованию вблизи сепаратрис так называемых стохастических слоев фазового пространства, а затем к стохастизации колебаний в областях, занятых сепаратрисами. В таких условиях движение осцилляторов приобретает случайный характер, а его адекватное описание достигается использованием соответствующего уравнения Фоккера-Планка (например, в [19]).

При возбуждении в сгустках двумерных когерентных колебаний из-за зависимостей частот колебаний от их амплитуд резонансные условия выполняются на некоторой линии в пространстве амплитуд (J_x, J_y) . Например, условие одномерного резонанса (3.40) записыва-

ется в виде

$$\Delta\nu_y(J_x, J_y) = \frac{n}{m} - \nu_y^{(0)}. \quad (3.41)$$

Поэтому вертикальные и горизонтальные колебания сгустков оказываются связанными. Как и в модели слабо-сильного сгустков, такая связь может приводить к дрейфу когерентных колебаний вдоль линии резонанса. В частности, демпфирование колебаний вдоль одной из степеней свободы при подходящем наклоне резонансной кривой будет приводить к увеличению амплитуд колебаний в перпендикулярном направлении.

До сих пор мы предполагали, что длины сталкивающихся сгустков малы по сравнению с значением β -функции в МВ. В таких условиях можно пренебречь набегам фаз колебаний на эффективной длине МВ. Если это не так, то интерференция возмущений сгустков вдоль МВ, в целом, уменьшает мощности резонансов высоких порядков, действующие на когерентные колебания встречных пучков. Одновременно, взаимодействие сгустков становится чувствительным к значениям фаз синхротронных колебаний, в которых сталкиваются сгустки. Поэтому, наряду с резонансами бетатронных колебаний (3.39) – (3.41), когерентные колебания сгустков могут возмущаться синхробетатронными резонансами, например,

$$m_y\nu_y + m_s\nu_s = n, \quad (3.42)$$

где m_s – целое число. Характер изменений мощностей резонансов в таких случаях зависит от геометрии поперечных сечений сгустков в МВ (подробнее см. в [4]).

4. Мультипольные колебания встречных пучков

Более последовательное описание неустойчивости встречных пучков достигается вычислением самосогласованных изменений функций распределения сталкивающихся сгустков используя уравнения Власова, или, если это необходимо, то уравнения Фоккера–Планка.

Как и прежде мы предполагаем, что два коротких сгустка сталкиваются в одном месте встречи, двигаясь в противоположных направлениях. Мы считаем, что, пройдя место встречи, сгустки движутся в раздельных кольцах. Для простоты примем, что значения дисперсионных функций орбит, а также значения производных β -функций вертикальных (y) и горизонтальных (x) бетатронных колебаний по азимуту в МВ равны нулю. В таких предположениях вблизи МВ частицы сгустков совершают бетатронные колебания, которые описываются формулами

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{J_y \beta_y} \cos \psi_y, \quad p_y = \frac{py'}{R_0} = -p \sqrt{\frac{J_y}{\beta_y}} \sin \psi_y, \\ x &= \sqrt{J_x \beta_x(s)} \cos \psi_x, \quad p_x = \frac{px'}{R_0} = -p \sqrt{\frac{J_x}{\beta_x}} \sin \psi_x, \\ I_{x,y} &= \frac{pJ_{x,y}}{2}, \quad \psi'_{x,y} = \nu_{x,y}^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь пары $(I, \psi)_{x,y}$ обозначают переменные действие-угол невозмущенных колебаний частиц, $\Pi = 2\pi R_0$ – периметр замкнутой орбиты, $s = R_0\theta$ – путь, пройденный частицей к азимуту θ , штрихи обозначают производные $d/d\theta$, $p = \gamma Mc$ – значение импульса равновесной частицы сгустка, величины $\beta_{x,y}$ – значения β -функций горизонтальных, вертикальных бетатронных колебаний частиц в МВ. Предполагается, что длины сталкивающихся сгустков (σ_s) существенно короче значений $\beta_{x,y}$ сгустков ($\sigma_s \ll \beta_{x,y}$). По этой причине мы пренебрежем в наших вычислениях возможностью синхротронных колебаний частиц в сгустках. В переменных действие-угол невозмущенные бетатронные колебания частиц описываются гамильтонианом

$$H_0 = \nu_x^{(0)} I_x + \nu_y^{(0)} I_y. \quad (4.2)$$

В месте встречи колебания частиц возмущаются полями встречного сгустка. Помечая сталкивающиеся сгустки символами (1) и (2), мы будем описывать эти возмущения лагранжианами $L_{1,2}$ и, соответственно, $L_{2,1}$. Например, мы будем описывать колебания частиц сгустка (1) гамильтонианом

$$H_1 = H_0 - L_{1,2}, \quad (4.3)$$

а сгустка (2) – гамильтонианом

$$H_2 = H_0 - L_{2,1}. \quad (4.4)$$

Для релятивистских частиц ($\gamma \gg 1$) мы можем вычислять поля пространственного заряда сталкивающихся сгустков в локальном приближении. Поэтому, например, для $L_{1,2}$ пишем:

$$L_{1,2}(I, \psi, \theta) = -\frac{2N_2e_1e_2}{\pi\omega_0} \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

$$\times \int d^2I_1 d^2\psi_1 \delta(s - s_2) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) f^{(2)}(I_1, \psi_1, \theta),$$

где $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x(I, \psi, \theta) + k_y y(I, \psi, \theta)$, а N_2e_2 , или N_1e_1 – заряды сгустков (2), или, соответственно, (1), интегрирование ведется по всему фазовому пространству встречного сгустка. Для коротких сгустков ($\beta_{x,y} \gg \sigma_s$) неустойчивости встречных пучков являются результатом действия на частицы серий коротких, периодических толчков. Если, к тому же, заряды частиц сгустка (1) и (2) противоположны $e_1e_2 = -e^2$, то такие возмущения описываются лагранжианами вида:

$$L_{1,2}(I, \psi, \theta) = \frac{N_2e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

$$\times \int d^2I_1 d^2\psi_1 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) f^{(2)}(I_1, \psi_1, \theta).$$

Здесь $\delta_T(\theta)$ – периодическая δ -функция

$$\delta_T(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}, \quad (4.7)$$

а $f^{(2)}(I_1, \psi_1, \theta)$ – функция распределения частиц сгустка (2). Аналогично, возмущения частиц сгустка (2) будем описывать лагранжианом:

$$L_{2,1}(I, \psi, \theta) = \frac{N_1e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.8)$$

$$\times \int d^2I_1 d^2\psi_1 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) f^{(1)}(I_1, \psi_1, \theta),$$

в котором $f^{(1)}(I_1, \psi_1, \theta)$ – функция распределения частиц сгустка (1).

В пренебрежении охлаждением сгустков и возмущениями колебаний частиц действием случайных полей изменения функций распределения $f^{(1,2)}$ описываются системой уравнений Власова

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \theta} + \nu_{x1}^{(0)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi_x} + \nu_{y1}^{(0)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi_y} - [L_{1,2}; f^{(1)}] = 0 \quad (4.9)$$

и

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \theta} + \nu_{x2}^{(0)} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \psi_x} + \nu_{y2}^{(0)} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \psi_y} - [L_{2,1}; f^{(2)}] = 0, \quad (4.10)$$

где, например,

$$\begin{aligned} [L_{1,2}; f^{(1)}] = & \frac{\partial L_{1,2}}{\partial I_x} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi_x} - \frac{\partial L_{1,2}}{\partial \psi_x} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial I_x} \\ & + \frac{\partial L_{1,2}}{\partial I_y} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi_y} - \frac{\partial L_{1,2}}{\partial \psi_y} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial I_y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

– скобка Пуассона функций $L_{1,2}$ и $f^{(1)}$.

Напомним, что в теории линейных когерентных колебаний состояния сгустка без когерентных колебаний описываются функциями распределения, которые не зависят от фаз колебаний частиц ψ_x, ψ_y . По этой причине пишут

$$f^{(1,2)} = f_0^{(1,2)}(I), \quad I = \{I_x, I_y\}. \quad (4.12)$$

В таком случае мы будем предполагать, что функции $f_0^{(1,2)}(I)$ нормированы согласно соотношениям

$$\int d^2 I f_0^{(1,2)}(I) = 1. \quad (4.13)$$

Для определенности положим, что сгусток (1) проходит МВ в положительном, а сгусток (2) – в отрицательном направлении. В соответствии с этим, продольные координаты частиц в сгустках будем записывать в виде $z_{1,2} = s \mp R_0 \theta$, где $\theta = \omega_0 t$, а ω_0 – частота обращения вдоль замкнутой орбиты синхронной частицы сгустка.

Когерентные колебания сгустков описываются малыми добавками к f_0 , которые зависят от времени t и от фаз некогерентных колебания частиц. Пишем

$$f^{(1,2)} = f_0^{(1,2)}(I) + \delta f^{(1,2)}, \quad (4.14)$$

где

$$\delta f^{(1,2)} = \sum_m f_m^{(1,2)}(I, \theta) \exp(im_x \psi_x + im_y \psi_y), \quad m = \{m_x, m_y\}. \quad (4.15)$$

В тех случаях, когда уравнения для гармоник $f_m^{(1,2)}(I, \theta)$ разделены, номера гармоник m_x и m_y определяют номера мультипольности мод когерентных колебаний сгустков. Так, набору $|m_x| + |m_y| = 1$ соответствуют дипольные когерентные колебания, набору $|m_x| + |m_y| = 2$ – квадрупольные когерентные колебания и так далее. При изучении неустойчивостей из-за взаимодействия пучков с окружающими электродами необходимость учета колебаний высшей мультипольности появляется крайне редко. Наоборот, при изучении устойчивости когерентных колебаний встречных пучков типичным является необходимость учета как дипольных колебаний, так и колебаний высших мультипольностей. Это обстоятельство следует учитывать как при расчетах условий устойчивости встречных сгустков, так и при планировании и проведении измерений их когерентных колебаний.

Если амплитуды когерентных колебаний невелики, то амплитуды $f_m^{(1,2)}$ могут вычисляться решением систем уравнений, которые получаются линеаризацией уравнений Власова (4.9) и (4.10) вблизи стационарных состояний $f_0^{(1,2)}(I)$. Поскольку лагранжианы $L_{1,2}$ и $L_{2,1}$ являются линейными функционалами функций распределения $f^{(1,2)}$, пишем

$$L_{1,2} = L_{1,2}^{(0)} + \delta L_{1,2}, \quad L_{2,1} = L_{2,1}^{(0)} + \delta L_{2,1}. \quad (4.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{1,2}^{(0)} &= \frac{N_2 e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \\ &\times \int d^2 I_1 d^2 \psi_1 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) f_0^{(2)}(I_1), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$L_{2,1}^{(0)} = \frac{N_1 e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

$$\times \int d^2 I_1 d^2 \psi_1 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) f_0^{(1)}(I_1),$$

а, например,

$$\delta L_{1,2} = \frac{N_2 e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (4.19)$$

$$\times \int d^2 I_1 d^2 \psi_1 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1 + im_x \psi_{1x} + im_y \psi_{1y}) f_m^{(2)}(I_1, \psi_1, \theta).$$

Как видно из уравнений (4.17) и (4.18), функции $L_{1,2}^{(0)}$ и $L_{2,1}^{(0)}$ зависят не только от переменных действие частицы (I), но также от переменных фаза (ψ) и от времени θ . Поэтому, даже в отсутствие когерентных колебаний сгустков, решениями уравнений (4.9) и (4.10) являются функции распределения, зависящие от фаз колебаний и времени. Такие зависимости отражают изменения фазовых пространств сталкивающихся сгустков полями пространственного заряда их партнеров в МВ. Напомним, что аналогичные изменения функций распределения стационарного состояния присутствуют и при решении задач о когерентных колебаниях пучков, взаимодействующих с окружающими электродами. В последнем случае определение функции распределения стационарного состояния пучка удастся упростить, используя предположение о слабой нелинейности наведенных полей и о удаленности рабочей точки по частотам колебаний частиц от опасных нелинейных резонансов.

В случае неустойчивости встречных пучков определение функций распределения стационарного состояния требует дополнительных усилий из-за существенной нелинейности полей встречных сгустков на расстояниях, порядка поперечных размеров сталкивающихся сгустков. Это обстоятельство, а также периодичность прохождения частицами МВ, может приводить к появлению в фазовых пространствах сгустков значительных расслоений из-за действия на колебания частиц многочисленных нелинейных резонансов. Кроме того, нелинейные зависимости полей пространственного заряда встречных сгустков от поперечных координат частиц приводят к существенной

зависимости частот колебаний частиц от амплитуд этих колебаний. Если бы нелинейные резонансы за счет столкновений сгустков действовали бы на частицы независимо, то, в зависимости от начальных условий, частица могла бы быть или захвачена в одну из сепаратрис одного из нелинейных резонансов, или совершать либрационные колебания, оставаясь вне ближайшей сепаратрисы. Такое состояние сгустка может быть стационарным. Однако, вычисление соответствующей функции распределения сгустка, в общем случае, значительно затруднено необходимостью одновременного учета действия на частицы большого числа изолированных резонансов. В таком случае, упрощения определения стационарных состояний сгустков удастся достичь, предполагая что ширины наиболее важных резонансов встречных пучков в пространстве амплитуд колебаний частиц невелики и поэтому малы числа частиц, захваченных в сепаратрисы соответствующих резонансов. В рамках такого предположения считают, что функции распределения сгустков в стационарном состоянии такие же как и в невзаимодействующих пучках, но, возможно, ширины этих распределений зависят от параметров пространственного заряда (ξ) сталкивающихся сгустков.

Сходное предположение может основываться на учете совместного влияния на эффекты встречи охлаждения пучков и действия на частицы в сталкивающихся пучках случайных толчков. Увеличение темпов охлаждения или амплитуд и средних частот стохастических возмущений может приводить к разрушению, или к размыванию, резонансной структуры фазовых пространств сталкивающихся сгустков и, соответственно, к увеличению в них доли частиц, характер колебаний которых близок к колебаниям в невозмущенных пучках. Само действие на частицы резонансов за счет полей встречных сгустков часто не может рассматриваться как независимое. При увеличении параметров пространственного заряда сгустков (ξ) сепаратрисы таких резонансов сближаются в пространстве частот колебаний. При значительном сближении резонансов это приводит к появлению у сепаратрис так-называемых стохастических слоев, движение частиц в которых носит случайный характер. Это явление также уменьшает вклады захваченных частиц в функции распределения сталкивающихся сгустков.

Используя эти соображения мы будем вести вычисления параметров когерентных колебаний встречных сгустков считая, что функции распределения сталкивающихся сгустков описываются уравнением (4.14). По тем же причинам, а также для упрощения вычислений, мы будем вести расчеты касающиеся когерентных колебаний встречных сгустков пренебрегая возможным влиянием некогерентных резонансов встречных пучков на амплитуды когерентных колебаний сгустков. Тогда, линеаризованные уравнения для амплитуд $f_m^{(1,2)}$ записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_m^{(1)}}{\partial \theta} + im_x \nu_x^{(1)} f_m^{(1)} + im_y \nu_y^{(1)} f_m^{(1)} \\ & + im_x (\delta L_{1,2})_m \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial I_x} + im_y (\delta L_{1,2})_m \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial I_y} = 0, \\ & \frac{\partial f_m^{(2)}}{\partial \theta} + im_x \nu_x^{(2)} f_m^{(2)} + im_y \nu_y^{(2)} f_m^{(2)} \\ & + im_x (\delta L_{2,1})_m \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial I_x} + im_y (\delta L_{2,1})_m \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial I_y} = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь

$$\nu_{x,y}^{(1)} = \nu_{(x,y),1}^{(0)} + \Delta \nu_{x,y}^{(1)}(I_x, I_y) \quad (4.21)$$

и

$$\nu_{x,y}^{(2)} = \nu_{(x,y),2}^{(0)} + \Delta \nu_{x,y}^{(2)}(I_x, I_y) \quad (4.22)$$

– частоты бетатронных колебаний частиц в сгустках (1) и (2), а $\Delta \nu_{x,y}^{(1,2)}(I_x, I_y)$ – сдвиги частот бетатронных колебаний частиц за счет полей встречных сгустков. Вдали от параметрических резонансов величины $\Delta \nu_{x,y}^{(1,2)}$ определяются выражениями:

$$\Delta \nu_{x,y}^{(1)}(I_x, I_y) = -\frac{\partial}{\partial I_{(x,y)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y d\theta}{(2\pi)^3} L_{1,2}^{(0)}(I, \psi, \theta) \quad (4.23)$$

и

$$\Delta \nu_{x,y}^{(2)}(I_x, I_y) = -\frac{\partial}{\partial I_{(x,y)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_x d\psi_y d\theta}{(2\pi)^3} L_{2,1}^{(0)}(I, \psi, \theta). \quad (4.24)$$

Ввиду нелинейной зависимости полей пространственного заряда сгустков от координат частиц сдвиги частот $\Delta\nu_{x,y}^{(1,2)}(I_x, I_y)$ могут существенно меняться с изменением амплитуд колебаний частиц. Так, если заряды частиц сгустков противоположны ($e_1 e_2 = -e^2$), то при изменениях величин I_x, I_y в диапазонах $0 \leq I_x, I_y \leq \infty$ сдвиги частот изменяются от $\xi_{x,y}^{(1,2)}$ до нуля. Уравнения (4.20) обычно слишком сложны даже для их численного решения. Поэтому ниже мы рассмотрим несколько примеров, когда решение таких уравнений может быть упрощено и допускает нахождение аналитических, или полуаналитических решений, а также позволяет провести простое исследование устойчивости колебаний встречных пучков.

4.1. Вертикальные колебания ленточных пучков

Во многих машинах поперечные сечения сталкивающихся сгустков в МВ представляют собой эллипсы, вытянутые в горизонтальном направлении. Исследование устойчивости поперечных когерентных колебаний таких встречных пучков, в общем случае, затруднено. Однако, эту задачу можно упростить предположив, что функции распределения $f_0^{(1,2)}$ зависят лишь от амплитуд вертикальных колебаний частиц. Такое предположение не вполне корректно поскольку, если функции распределения $f_0^{(1,2)}$ не зависят от амплитуд горизонтальных колебаний, то они не могут быть нормированы. Чтобы обойти эту трудность, мы, в качестве примера, предположим, что функции $f_0^{(1,2)}$ определяются выражениями вида

$$f_0^{(1,2)}(I_x, I_y) = \frac{1}{(2\pi)^2 I_{0x}} \exp\left(-\frac{I_x}{I_{0x}}\right) Y_0^{(1,2)}(I_y), \quad (4.25)$$

где

$$\int_0^\infty dI_y Y_0^{(1,2)}(I_y) = 1. \quad (4.26)$$

Такие функции распределения хорошо определены и могут быть легко нормированы. Согласно (4.1) плотности частиц в таких сгустках

определены выражениями

$$\begin{aligned}
\rho^{(1,2)}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y f_0^{(1,2)}(I) \\
&= \frac{1}{(2\pi) I_{0x}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \exp\left(-\frac{I_x}{I_{0x}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_y}{2\pi} Y_0^{(1,2)}(I_y) \\
&= \frac{\exp(-x^2/(2\sigma_x^2))}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_y}{2\pi} Y_0^{(1,2)}(I_y),
\end{aligned}$$

где

$$\sigma_x^2 = \frac{I_{0x}\beta_x}{p}.$$

Из этих выражений видно, что мы можем пренебречь зависимостями $f_0^{(1,2)}(I_x, I_y)$ от I_x , или зависимостями $\rho^{(1,2)}(x, y)$ от x в таких задачах, где результаты, в основном, определяются горизонтальными положениями частиц вблизи начала координат ($I_x \ll I_{0x}$ и $|x| \ll \sigma_x$). Например, согласно (4.17) функция $L_{1,2}^{(0)}$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
L_{1,2}^{(0)} &= \frac{N_2 e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp(ik_y y + ik_x x) \\
&\times \int_0^{\infty} dI_{1y} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{1y}}{2\pi} \exp(-ik_y y_1) Y_0^{(1,2)}(I_y) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-ik_x x_1 - \frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right),
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
L_{1,2}^{(0)} &= \frac{N_2 e^2}{\pi c} \delta_T(\theta) \int \frac{dk_x dk_y}{k_x^2 + k_y^2} \exp\left(ik_y y + ik_x x - \frac{k_x^2 \sigma_x^2}{2}\right) \\
&\times \int_0^{\infty} dI_{1y} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{1y}}{2\pi} \exp(-ik_y y_1) Y_0^{(1,2)}(I_y).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Для частиц, находящихся вблизи центра пучка $|x| < \sigma_x$ и $|y| \ll \sigma_x$, наибольший вклад в интеграл по k_x дает область $|k_x|\sigma_x < 1$, а вклады остальных областей k_x экспоненциально малы. Полагая в интеграле по k_x в (4.27) наиболее быстро меняющейся функцию $\exp(-k_x^2 \sigma_x^2/2)$

и вынося медленно меняющиеся функции k_x в точке $k_x = 0$, после интегрирования по k_x получим

$$L_{1,2}^{(0)} = \frac{N_2 e^2}{\pi c \sigma_x} \delta_T(\theta) \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_y^2} \exp(ik_y y) \quad (4.28)$$

$$\times \int_0^{\infty} dI_{1y} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{1y}}{2\pi} \exp(-ik_y y_1) Y_0^{(1,2)}(I_y).$$

Такой результат получается, если подставить в (4.17) функцию распределения

$$f_0^{(1,2)}(I_x, I_y) = \frac{\beta_x}{(2\pi) p \sigma_x^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\beta_x}{2pI_{0x}} p_x^2\right) \frac{Y_0^{(1,2)}(I_y)}{2\pi} \quad (4.29)$$

и воспользоваться предельным переходом

$$\lim_{\frac{\sigma_x}{\beta_x} \rightarrow 0} \left(\frac{\beta_x}{\sqrt{2\pi} p \sigma_x} \exp\left(-\frac{\beta_x^2}{2p^2 \sigma_x^2} p_x^2\right) \right) = \delta(p_x).$$

По этим причинам и в этом разделе мы будем описывать ленточные сталкивающиеся пучки без когерентных колебаний функциями распределения, для которых в МВ отсутствует угловая расходимость траекторий частиц в горизонтальном направлении:

$$f_0^{(1,2)}(I_y) = \frac{\delta(p_x)}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \frac{Y_0^{(1,2)}(I_y)}{2\pi}. \quad (4.30)$$

Мы также будем упрощать вычисления, полагая

$$Y_0^{(1,2)}(I_y) = \frac{1}{I_0^{(1,2)}} \begin{cases} 1, & I_y \leq I_0^{(1,2)}, \\ 0, & I_y > I_0^{(1,2)}. \end{cases} \quad (4.31)$$

Распределения плотности по поперечным координатам в таких пучках определяются выражениями:

$$\rho^{(1,2)}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \pi \sigma_y^{(1,2)}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{(\sigma_y^{(1,2)})^2}}, \quad \sigma_y^{(1,2)} = \sqrt{\frac{2I_0^{(1,2)} \beta_y}{p}}. \quad (4.32)$$

Здесь и ниже мы упрощаем вычисления предполагая, что значения β -функций в МВ для сталкивающихся сгустков совпадают (например, $\beta_y^{(1)} = \beta_y^{(2)} = \beta_y$).

4.1.1. Сдвиги частот колебаний частиц

Согласно формуле (4.28) для ленточных пучков функция $L_{1,2}^{(0)}$ определяется выражением

$$L_{1,2}^{(0)} = \frac{N_2 e^2 \sqrt{2\pi}}{\pi c \sigma_x} \delta_T(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_y^2} \exp(ik_y y) \\ \times \frac{1}{I_0^{(2)}} \int_0^{I_0^{(2)}} dI_{1y} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{1y}}{2\pi} \exp\left(-ik_y \sqrt{\frac{2I_{1y}\beta_y}{p}} \cos \psi_{1y}\right).$$

Используя

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_{1y}}{2\pi} \exp(-ik_y a_{1y} \cos \psi_{1y}) = J_0(k_y a_{1y}), \quad a_{1y} = \sqrt{\frac{2I_{1y}\beta_y}{p}},$$

где $J_m(z)$ – функции Бесселя порядка m , подстановку $y = I_{1y}/I_0^{(2)}$ и определение $\sigma_y^{(2)}$ в формуле (4.32), пишем

$$L_{1,2}^{(0)} = \frac{N_2 e^2 \sqrt{2\pi}}{\pi c \sigma_x} \delta_T(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_y^2} e^{ik_y y} \int_0^1 dy J_0(k_y \sigma_y^{(2)} \sqrt{y}).$$

Поскольку

$$J_0(k_y \sigma_y^{(2)} \sqrt{y}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \left(\frac{k_y \sigma_y^{(2)}}{2}\right)^{2l} y^l,$$

вычисление интеграла по y дает

$$\int_0^1 J_0(k_y \sigma_y^{(2)} \sqrt{y}) dy = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \left(\frac{k_y \sigma_y^{(2)}}{2}\right)^{2l} \int_0^1 y^l dy \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! (l+1)!} \left(\frac{k_y \sigma_y^{(2)}}{2}\right)^{2l} = \frac{2J_1(k_y \sigma_y^{(2)})}{k_y \sigma_y^{(2)}}.$$

Используя подстановку $k = k_y \sigma_y^{(2)}$, пишем

$$L_{1,2}^{(0)} = \frac{4N_2 e^2 \sqrt{2\pi} \sigma_y^{(2)}}{\pi c \sigma_x} \delta_T(\theta) \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \cos\left(\frac{ka_y}{\sigma_y^{(2)}} \cos \psi_y\right) \frac{J_1(k)}{k}, \quad (4.33)$$

где

$$a_y = \sqrt{\frac{2I_y \beta_y}{p}} \quad (4.34)$$

– амплитуда вертикальных бетатронных колебаний частицы в возмущаемом сгустке. Аналогичные вычисления приводят к следующему выражению для $L_{2,1}^{(0)}$:

$$L_{2,1}^{(0)} = \frac{4N_1 e^2 \sqrt{2\pi} \sigma_y^{(1)}}{\pi c \sigma_x} \delta_T(\theta) \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \cos\left(\frac{k_y a_y}{\sigma_y^{(1)}} \cos \psi_y\right) \frac{J_1(k)}{k}. \quad (4.35)$$

Хотя сами функции $L_{1,2}^{(0)}$ и $L_{2,1}^{(0)}$ расходятся в точке $y = 0$, их производные по y , то есть силы действующие на частицы сгустков в вертикальном направлении, конечны. Так же конечны гармоники лагранжианов $L^{(0)}$ по фазам колебаний и их производные по переменным действие. Например, подстановка формулы (4.33) в (4.23) дает

$$\begin{aligned} \Delta \nu_y^{(1)}(I_y) &= -\frac{4N_2 e^2 \sigma_y^{(2)}}{\pi c \sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \frac{J_1(k)}{k} \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} \frac{\partial}{\partial I_y} \cos\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(2)}} \cos \psi_y\right) \\ &= \frac{4N_2 e^2 \beta_y}{\pi p c \sigma_x \sqrt{2\pi} a_y} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} J_1(k) \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} \cos \psi_y \sin\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(2)}} \cos \psi_y\right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись здесь интегральным представлением

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi_y}{2\pi} \cos \psi_y \sin\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(2)}} \cos \psi_y\right) = J_1\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(2)}}\right),$$

получаем

$$\Delta \nu_y^{(1)}(I_y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_2 e^2 \beta_y}{\pi p c \sigma_x a_y} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} J_1(k) J_1\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(2)}}\right). \quad (4.36)$$

Аналогичные вычисления приводят к выражению

$$\Delta\nu_y^{(2)}(I_y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_1 e^2 \beta_y}{\pi r c \sigma_x a_y} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} J_1(k) J_1\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(1)}}\right). \quad (4.37)$$

Входящие в эти формулы интегралы по k выражаются через гипергеометрическую функцию. Один из примеров таких вычислений приведен в Приложении A, формула (A16):¹

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} J_1(k) J_1\left(\frac{k a_y}{\sigma_y^{(2)}}\right) \\ &= \frac{a_y}{2(\sigma_y^{(2)} + a_y)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{4a_y \sigma_y^{(2)}}{(\sigma_y^{(2)} + a_y)^2}\right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

где

$$F(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (4.39)$$

– гипергеометрический ряд. Несмотря на видимую сложность, выражения в формулах (4.36) – (4.38) облегчают вычисления сдвигов

¹ Интеграл в (4.38) может также вычисляться интегрированием по k по частям и использованием теоремы сложения для функций Бесселя:

$$J_1(k) J_1(kb) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-i\alpha} J_0(kr),$$

где $r = \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}$. Последующее интегрирование по k с учетом формулы

$$\int_0^\infty \frac{dk J_1(kr)}{k} = 1$$

приводит к выражению

$$A = - \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \cos \alpha \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha},$$

которое является одним из интегральных представлений гипергеометрического ряда. Простые преобразования приводят к окончательному выражению в правой части (4.38).

частот частиц в асимптотических областях. Так, в области $a_y \ll \sigma_y^{(2)}$ аргумент гипергеометрического ряда мал. Поэтому мы можем записать $F(a, b; c; z) \simeq 1$, что приводит к выражениям

$$\Delta\nu_y^{(1)}(I_y = 0) \simeq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_2 e^2 \beta_y}{2\pi r c \sigma_x \sigma_y^{(2)}} = \xi_y^{(1)} \quad (4.40)$$

и

$$\Delta\nu_y^{(2)}(I_y = 0) \simeq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_1 e^2 \beta_y}{2\pi r c \sigma_x \sigma_y^{(1)}} = \xi_y^{(2)}. \quad (4.41)$$

В области больших амплитуд вертикальных колебаний частиц $a_y \gg \sigma_y^{(2)}$ аргумент гипергеометрического ряда также оказывается малым. Поэтому вместо (4.40) и (4.41) получаем

$$\Delta\nu_y^{(1)} \simeq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_2 e^2 \beta_y}{2\pi r c \sigma_x a_y} = \xi_y^{(1)} \frac{\sigma_y^{(2)}}{a_y}, \quad a_y \gg \sigma_y^{(2)} \quad (4.42)$$

и

$$\Delta\nu_y^{(2)} \simeq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_1 e^2 \beta_y}{2\pi r c \sigma_x a_y} = \xi_y^{(2)} \frac{\sigma_y^{(1)}}{a_y}, \quad a_y \gg \sigma_y^{(1)}. \quad (4.43)$$

Поскольку

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 3; 1\right) = \frac{\Gamma(3) \Gamma\left(3 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3 - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{3}{2}\right)} = \frac{16}{3\pi}, \quad (4.44)$$

на вертикальных границах сгустков ($a_y = \sigma_y^{(1)}$ или $a_y = \sigma_y^{(2)}$) сдвиги частот равны:

$$\Delta\nu_y^{(1)}(I_y = I_0^{(2)}) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_2 e^2 \beta_y}{2\pi r c \sigma_x a_y} \frac{8}{3\pi} = \xi_y^{(1)} \frac{8}{3\pi} \quad (4.45)$$

и

$$\Delta\nu_y^{(2)}(I_y = I_0^{(1)}) = \xi_y^{(2)} \frac{8}{3\pi}. \quad (4.46)$$

4.1.2. Амплитуды вертикальных когерентных колебаний

Получим теперь уравнения, определяющие собственные моды и собственные частоты вертикальных когерентных колебаний ($m_x = 0$) ленточных встречных сгустков. С учетом (4.30) и (4.31), например, первое из уравнений (4.20) записывается в виде

$$\frac{\partial f_m^{(1)}}{\partial \theta} + im_y \nu_y^{(1)} f_m^{(1)} - \frac{im_y (\delta L_{1,2})_{m_y}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x I_0^{(2)}} \delta(p_x) \delta(I_y - I_0^{(1)}) = 0. \quad (4.47)$$

Оно и аналогичное уравнение, записанное для сгустка (2), явно указывают, что в нашей модели колебания распространяются по поверхностям сгустков в их фазовых пространствах. Это обстоятельство существенно упрощает вычисления и облегчает изучение устойчивости колебаний встречных сгустков. Правда, ценой такого упрощения является устранение влияния затухания Ландау за счет нелинейностей полей сгустков на устойчивость когерентных колебаний встречных пучков. Решения уравнений (4.47) ищем в виде

$$f_m^{(1,2)}(I_y, p_x, x, \theta) = \delta(p_x) f_m^{(1,2)}(I_y, \theta).$$

Подставив это выражение в формулу (4.19), учитывая разложения

$$\exp(iz \cos \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\phi}, \quad (4.48)$$

$$\delta(k_x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x}$$

и опуская для краткости индекс y у величин m_y ($m_y \rightarrow m$), а также у координат частиц в фазовом пространстве, пишем

$$\begin{aligned} (\delta L_{1,2})_m &= (2\pi)^2 \delta_T(\theta) \frac{N_2 e^2}{\pi c} \int \frac{dk_x dk_y \delta(k_x)}{k_x^2 + k_y^2} (\exp(ik_y a \cos \psi))_m \\ &\times \int_0^\infty dI_1 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (\exp(ik_y a_1 \cos \psi))_{m_1}^* f_{m_1}^{(2)}(I_1, \theta), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 (\delta L_{1,2})_m &= (2\pi)^2 \delta_T(\theta) \frac{N_2 e^2}{\pi c} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} i^{m-m_1} \\
 &\times \int_0^{\infty} dI_{1y} K_{m,m_1}(I, I_1) f_{m_1}^{(2)}(I_1, \theta),
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

где

$$K_{m,m_1}(I, I_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_y^2} J_m(k_y a) J_{m_1}(k_y a_1). \tag{4.50}$$

Поэтому уравнение (4.47) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m^{(1)}}{\partial \theta} + im\nu_y^{(1)} f_m^{(1)} &= im\delta_T(\theta) \delta(I_y - I_0^{(1)}) \frac{N_2 e^2 \sqrt{2\pi}}{\pi c \sigma_x I_0^{(2)}} \\
 \times \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} \int_0^{\infty} dI_{1y} K_{m,m_1}(I, I_1) &\left(f_{m_1}^{(2)}(I_1, \theta) + f_{-m_1}^{(2)}(I_1, \theta) \right).
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Аналогичное уравнение для амплитуд когерентных колебаний сгустка (2) записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m^{(2)}}{\partial \theta} + im\nu_y^{(2)} f_m^{(2)} &= im\delta_T(\theta) \delta(I_y - I_0^{(2)}) \frac{N_1 e^2 \sqrt{2\pi}}{\pi c \sigma_x I_0^{(1)}} \\
 \times \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} \int_0^{\infty} dI_{1y} K_{m,m_1}(I, I_1) &\left(f_{m_1}^{(2)}(I_1, \theta) + f_{-m_1}^{(2)}(I_1, \theta) \right).
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Здесь мы воспользовались свойствами симметрии функций Бесселя:

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z), \quad J_m(-z) = (-1)^m J_m(z).$$

Подставляя в уравнения (4.51) и (4.52)

$$f_m^{(1,2)}(I, \theta) = \delta(I_y - I_0^{(1,2)}) C_m^{(1,2)}(\theta), \tag{4.53}$$

учитывая формулы (4.40) и (4.41), а также определения величин $\sigma_y^{(1,2)}$ в формуле (4.32), получим уравнения для амплитуд $C_m^{(1,2)}(\theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_m^{(1)}}{\partial \theta} + im\nu_y^{(1)} C_m^{(1)} &= 2\pi im \xi_y^{(1)} \delta_T(\theta) \\ \times \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \left(C_{m_1}^{(2)}(\theta) + C_{-m_1}^{(2)}(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_m^{(2)}}{\partial \theta} + im\nu_y^{(2)} C_m^{(2)} &= 2\pi im \xi_y^{(2)} \delta_T(\theta) \\ \times \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(2,1)} \left(C_{m_1}^{(2)}(\theta) + C_{-m_1}^{(2)}(\theta) \right), \end{aligned} \quad (4.55)$$

где

$$K_{m,m_1}^{(1,2)} = \frac{1}{\sigma_y^{(2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_y^2} J_m \left(k_y \sigma_y^{(1)} \right) J_{m_1} \left(k_y \sigma_y^{(2)} \right), \quad (4.56)$$

$$K_{m,m_1}^{(2,1)} = \frac{1}{\sigma_y^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_y^2} J_m \left(k_y \sigma_y^{(2)} \right) J_{m_1} \left(k_y \sigma_y^{(1)} \right), \quad (4.57)$$

а

$$\xi_y^{(1,2)} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_{2,1} e^2 \beta_y}{2\pi p c \sigma_x \sigma_y^{(2,1)}}. \quad (4.58)$$

Благодаря свойствам симметрии функций Бесселя коэффициенты $K_{m,m_1}^{(1,2)}$ и $K_{m,m_1}^{(2,1)}$ равны нулю, если номера гармоник m и m_1 отличаются на нечетное число ($m_1 = m + 2l + 1$). Если же номера гармоник m и m_1 отличаются на четное число ($m_1 = m + 2l$), то величины $K_{m,m_1}^{(1,2)}$ и $K_{m,m_1}^{(2,1)}$ выражаются через гипергеометрические ряды.

Решения уравнений (4.54) и (4.55) ищутся в виде рядов

$$C_m^{(1)}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{m,n}^{(1)} e^{-i\nu\theta - in\theta}, \quad C_m^{(2)}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{m,n}^{(2)} e^{-i\nu\theta - in\theta}. \quad (4.59)$$

Учитывая разложение (4.7) мы можем, например, написать

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\nu + n - m\nu_y^{(1)} \right) d_{m,n}^{(1)} e^{-i\nu\theta - in\theta} = im\xi_y^{(1)} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} e^{in_1\theta} \\
& \times \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left(d_{m_1,n_2}^{(2)} + d_{-m_1,n_2}^{(2)} \right) e^{-i\nu\theta - in_2\theta}.
\end{aligned}$$

Отбирая в этом уравнении слагаемые с одинаковыми гармониками $e^{-in\theta}$ ($n = n_2 - n_1$), пишем

$$\begin{aligned}
& \left(\nu + n - m\nu_y^{(1)} \right) d_{m,n}^{(1)} = -m\xi_y^{(1)} \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \\
& \times \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left(d_{m_1,n+n_1}^{(2)} + d_{-m_1,n+n_1}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Из этого выражения видно, что, благодаря локализации возмущения в МВ, зависимости амплитуд $d_{m,n}^{(1)}$ от номера гармоники n описываются выражениями

$$d_{m,n}^{(1,2)} = \frac{X_m^{(1,2)}}{\nu + n - m\nu_y^{(1,2)}}. \quad (4.60)$$

При этом амплитуды $X_m^{(1,2)}$ нечетны по m :

$$X_m^{(1,2)} = -X_{-m}^{(1,2)}. \quad (4.61)$$

Поэтому собственные векторы и собственные частоты задачи находятся решением уравнений:

$$X_m^{(1)} = -m\xi_y^{(1)} \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} X_{m_1}^{(2)} \left(S_{m_1}^{(2)} - S_{-m_1}^{(2)} \right), \quad (4.62)$$

$$X_m^{(2)} = -m\xi_y^{(2)} \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(2,1)} X_{m_1}^{(1)} \left(S_{m_1}^{(1)} - S_{-m_1}^{(1)} \right), \quad (4.63)$$

где

$$S_m^{(1,2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu + n - m\nu_y^{(1,2)}} = \pi \cot \left[\pi \left(\nu - m\nu_y^{(1,2)} \right) \right], \quad (4.64)$$

а, например,

$$\begin{aligned} S_m^{(2)} - S_{-m}^{(2)} &= \pi \cot \left[\pi \left(\nu - m\nu_y^{(2)} \right) \right] - \pi \cot \left[\pi \left(\nu + m\nu_y^{(2)} \right) \right] \\ &= \frac{-2\pi \sin 2\pi m\nu_y^{(2)}}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi m\nu_y^{(2)}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Таким образом, амплитуды $X_m^{(1,2)}$ также удовлетворяют уравнениям

$$X_m^{(1)} = m \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \frac{2\pi \xi_y^{(1)} \sin \left(2\pi m_1 \nu_y^{(2)} \right)}{\cos 2\pi\nu - \cos \left(2\pi m_1 \nu_y^{(2)} \right)} X_{m_1}^{(2)} \quad (4.66)$$

и

$$X_m^{(2)} = m \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(2,1)} \frac{2\pi \xi_y^{(2)} \sin \left(2\pi m_1 \nu_y^{(1)} \right)}{\cos 2\pi\nu - \cos \left(2\pi m_1 \nu_y^{(1)} \right)} X_{m_1}^{(1)}. \quad (4.67)$$

4.1.3. Суммовые и разностные резонансы

Поскольку возмущения колебаний частиц в МВ определяются бездиссипативными полями, они могут вызывать неустойчивости когерентных колебаний лишь при приближении частот $\nu_y^{(1,2)}$ к резонансным значениям. Например, это реализуется при приближении суммы $m_1\nu_y^{(1)} + m_2\nu_y^{(2)}$ к целому числу. Напомним, что в случае, когда знаки m_1 и m_2 совпадают, то реализуется условие суммового резонанса. Если же знаки m_1 и m_2 противоположны, то реализуется условие разностного резонанса.

Мы упростим вычисления считая, что величины параметров пространственного заряда сгустков малы (например, $\xi_y^{(1,2)} \ll 1$) и поэтому резонансное условие

$$m\nu_y^{(1)} + m_2\nu_y^{(2)} = n_0 \quad (4.68)$$

примерно выполнено для определенных значений номеров мультипольности m , m_2 и номера резонансной азимутальной гармоники n_0 . Дисперсионное уравнение задачи строится отбором в уравнениях (4.62) наибольших по величине слагаемых. В соответствии с общими положениями теории линейных когерентных колебаний (например, в [2]) мы можем считать, что величины когерентных сдвигов частоты сгустков малы по сравнению с частотами в невозмущенных спектрах сгустков. Мы определим как малые, величину когерентного сдвига частоты:

$$\Delta\nu_m = \nu - m\nu_y^{(1)} \quad (4.69)$$

и отстройку от резонанса:

$$\varepsilon = m\nu_y^{(1)} + m_2\nu_y^{(2)} - n_0. \quad (4.70)$$

Для простоты примем, что $m > 0$. Тогда, наибольший вклад в сумму по m_1 в правой части уравнения (4.62)

$$X_m^{(1)} = -m\xi_y^{(1)} \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} X_{m_1}^{(2)} \\ \times \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu + n - m_1\nu_y^{(2)}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu + n + m_1\nu_y^{(2)}} \right)$$

дает лишь резонансное слагаемое. Если величина m_2 положительна, то реализуется случай суммового резонанса, вблизи которого уравнение (4.62) записывается в виде

$$X_m^{(1)} = \frac{m\xi_y^{(1)} i^{m-m_2} K_{m,m_2}^{(1,2)} X_{m_2}^{(2)}}{\Delta\nu_m + \varepsilon} + \delta X_m^{(1)}. \quad (4.71)$$

В тех же условиях уравнение (4.63) дает

$$X_{m_2}^{(2)} = -m_2\xi_y^{(2)} i^{m_2-m} K_{m_2,m}^{(2,1)} X_m^{(1)} \frac{1}{\Delta\nu_m} + \delta X_{m_2}^{(2)}. \quad (4.72)$$

В этих уравнениях величины $\delta X_m^{(1)}$ и $\delta X_{m_2}^{(2)}$ определяют вклады нерезонансных слагаемых. Если величины $\xi_y^{(1,2)}$ малы, то малы и вклады

нерезонансных слагаемых. Опуская в (4.71) и (4.72) величины $\delta X_m^{(1)}$ и $\delta X_m^{(2)}$, находим, что вблизи суммового резонанса амплитуды резонансных гармоник $X_m^{(1)}$ и $X_{m_2}^{(2)}$ удовлетворяют следующей системе однородных уравнений

$$X_m^{(1)} = \frac{m\xi_y^{(1)} i^{m-m_2} K_{m,m_2}^{(1,2)} X_{m_2}^{(2)}}{\Delta\nu_m + \varepsilon}, \quad X_{m_2}^{(2)} = -\frac{m_2\xi_y^{(2)} i^{m_2-m} K_{m_2,m}^{(2,1)} X_m^{(1)}}{\Delta\nu_m}.$$

Разрешая эти уравнения относительно $X_{m_2}^{(2)}$, находим дисперсионное уравнение задачи

$$\Delta\nu_m (\Delta\nu_m + \varepsilon) = -mm_2\xi_y^{(1)}\xi_y^{(2)}K_{m,m_2}^{(1,2)}K_{m_2,m}^{(2,1)}. \quad (4.73)$$

Используя формулы (4.56) и (4.57) находим, что $K_{m,m_2}^{(1,2)}(\sigma_y^{(2)}/\sigma_y^{(1)}) = K_{m_2,m}^{(2,1)}$. Поэтому корни дисперсионного уравнения определяются выражением

$$(\Delta\nu_m)_{\pm} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - mm_2\xi_y^{(1)}\xi_y^{(2)}\frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)}\right)^2}. \quad (4.74)$$

Поскольку в суммовом резонансе произведение mm_2 положительно, когерентные колебания сгустков устойчивы лишь при выполнении условия

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \geq mm_2\xi_y^{(1)}\xi_y^{(2)}\frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)}\right)^2. \quad (4.75)$$

Это общее свойство резонансных неустойчивостей динамического типа. Имея в виду, что развитие неустойчивых когерентных колебаний нежелательно, иногда говорят, что условие в (4.75) определяет ширину запрещенной полосы для частот колебаний частиц сгустков.

Знак равенства в (4.75) определяет порог неустойчивости, то есть условие, при выполнении которого колебания сгустков не нарастают по экспоненциальному закону. Благодаря самосогласованности задачи пороговое условие ограничивает величины параметров пространственного заряда обоих сгустков одновременно. Глубоко под порогом

неустойчивости

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \gg mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)} \right)^2$$

и при выполнении, например, условия $\varepsilon > 0$ частоты мод когерентных колебаний встречных сгустков определяются формулами

$$\begin{aligned} \nu_+ &= m\nu_y^{(1)} - \frac{mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)} \right)^2}{\varepsilon} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}}, \\ \nu_- &= n_0 - m_2 \nu_y^{(2)} + \frac{mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)} \right)^2}{\varepsilon} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

В этих формулах взаимодействие когерентных колебаний пучков описывается малой добавкой, пропорциональной произведению $\xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)}$. Это обстоятельство следует учитывать при интерпретации результатов измерений частот когерентных колебаний встречных сгустков.

В надпороговой области амплитуда одной из мод нарастает во времени по экспоненциальному закону. Наибольшее значение инкремента неустойчивости ($\text{Im}\Delta\nu_m$) достигается в точном резонансе ($\varepsilon = 0$). В этой точке частоты мод колебаний равны и составляют $\text{Re}\nu_{\pm} = m\nu_y^{(1)}$, а инкремент неустойчивой моды определяется выражением

$$\text{Im}\Delta\nu_m = \left| K_{m,m_2}^{(1,2)} \right| \sqrt{mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}}}. \quad (4.77)$$

В общем случае, величины $K_{m,m_2}^{(1,2)}$, определяющие зависимости когерентных сдвигов встречных пучков от номеров мультипольности и от отношений вертикальных размеров сгустков, выражаются через

гипергеометрические ряды. Так, если $\sigma_y^{(1)} < \sigma_y^{(2)}$, пишем (A12)

$$\begin{aligned}
 K_{m,m_2}^{(1,2)} &= \frac{2}{\sigma_y^{(2)}} \int_0^\infty \frac{dk_y}{k_y^2} J_m(k_y \sigma_y^{(1)}) J_{m_2}(k_y \sigma_y^{(2)}) \\
 &= \left(\frac{\sigma_y^{(1)}}{\sigma_y^{(2)}} \right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_2-1}{2}\right)}{2m! \Gamma\left(\frac{-m+m_2+3}{2}\right)} \\
 &\quad \times F\left(\frac{m+m_2-1}{2}, \frac{m-m_2-1}{2}; m+1; \left(\frac{\sigma_y^{(1)}}{\sigma_y^{(2)}}\right)^2\right).
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Если $\sigma_y^{(1)} > \sigma_y^{(2)}$, то в этой формуле меняются местами $\sigma_y^{(1)}$ и $\sigma_y^{(2)}$, а также m и m_2 .

При совпадении ширин $\sigma_y^{(1)}$ и $\sigma_y^{(2)}$ выражение для $K_{m,m_2}^{(1,2)}$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
 K_{m,m_2}^{(1,2)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_2-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+m_2+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-m+m_2+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-m_2+3}{2}\right)} \\
 &= \frac{8}{\pi} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}(m_2-m)\right)}{\left((m+m_2)^2-1\right) \left((m-m_2)^2-1\right)}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

В таком случае произведение $mm_2 \left(K_{m,m_2}^{(1,2)}\right)^2$ уменьшается с ростом номеров мультипольности лишь по степенному закону. Наоборот, если, например, $\sigma_y^{(1)} \ll \sigma_y^{(2)}$, то это уменьшение заменяется на экспоненциальное

$$K_{m,m_2}^{(1,2)} \simeq \left(\frac{\sigma_y^{(1)}}{\sigma_y^{(2)}} \right)^m \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_2-1}{2}\right)}{2m! \Gamma\left(\frac{m_2-m+3}{2}\right)}, \quad \sigma_y^{(1)} \ll \sigma_y^{(2)}. \tag{4.80}$$

По этой причине мультипольные когерентные колебания встречных пучков с значительной разницей поперечных размеров оказываются более устойчивыми чем колебания пучков с равными поперечными размерами.

Как уже говорилось, в рассматриваемой модели отсутствует затухание Ландау когерентных колебаний. Поэтому неустойчивые мо-

ды могут демпфироваться охлаждением пучков, или введением быстрого затухания неустойчивых мод (например, использованием широкополосных обратных связей). Хотя обеспечение быстрого затухания мультипольных мод бетатронных когерентных колебаний является очень непростой задачей, мы коротко обсудим возможности такого демпфирования колебаний встречных пучков. Если демпфирующий механизм обеспечивает затухание связанных мод с декрементами $\Lambda_m^{(1)}$ и $\Lambda_{m_2}^{(2)}$, то дисперсионное уравнение (4.73) переписывается в виде:

$$1 = - \frac{mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)} \right)^2}{\left(\Delta\nu_m + i\Lambda_m^{(1)} \right) \left(\Delta\nu_m + \varepsilon + i\Lambda_{m_2}^{(2)} \right)} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}}. \quad (4.81)$$

Согласно общим свойствам неустойчивостей вблизи суммового резонанса корни этого уравнения описывают неустойчивые колебания, если демпфируется лишь одна из связанных мод (например, $\Lambda_m^{(1)} = 0$, а $\Lambda_{m_2}^{(2)} \neq 0$). Поэтому демпфирование неустойчивостей встречных пучков требует одновременного демпфирования когерентных колебаний обоих сгустков. Простым вычислением корней дисперсионного уравнения читатель легко установит, то условие подавления неустойчивости встречных пучков за счет демпфирования связанных гармоник может быть записано в виде:

$$1 + \frac{\varepsilon^2}{4 \left(\Lambda_m^{(1)} + \Lambda_{m_2}^{(2)} \right)^2} > \frac{mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)} \right)^2}{\Lambda_m^{(1)} \Lambda_{m_2}^{(2)}} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}}. \quad (4.82)$$

Вблизи разностного резонанса малой является величина расстройки

$$\varepsilon = m\nu_y^{(1)} - m_2\nu_y^{(2)} - n_0, \quad m > 0, \quad m_2 > 0. \quad (4.83)$$

В этом случае в правой части (4.62) доминирует то слагаемое $S_{m_1}^{(2)}$, которое имеет номер $m_1 = m_2$. Поэтому пишем

$$X_m^{(1)} \simeq \frac{m \xi_y^{(1)} i^{m-m_2} K_{m,m_2}^{(1,2)} X_{m_2}^{(2)}}{\Delta\nu_m - \varepsilon}, \quad X_{m_2}^{(2)} \simeq \frac{m_2 \xi_y^{(2)} i^{m_2-m} K_{m_2,m}^{(2,1)} X_m^{(1)}}{\Delta\nu_m}. \quad (4.84)$$

Разрешая эти уравнения относительно $X_{m_2}^{(2)}$ приходим к дисперсионному уравнению для когерентных колебаний сгустков вблизи резонансного резонанса:

$$\Delta\nu_m (\Delta\nu_m - \varepsilon) = mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}} \left(K_{m,m_2}^{(1,2)} \right)^2. \quad (4.85)$$

В соответствии с общими результатами теории линейных резонансных неустойчивостей оба корня этого уравнения описывают устойчивые колебания. В случае сильной связи колебаний ($\varepsilon \rightarrow 0$) когерентные сдвиги частот мод определяются выражениями

$$(\Delta\nu_m)_{\pm} = \left| K_{m,m_2}^{(1,2)} \right| \sqrt{mm_2 \xi_y^{(1)} \xi_y^{(2)} \frac{\sigma_y^{(2)}}{\sigma_y^{(1)}}}. \quad (4.86)$$

С ростом чисел частиц в сгустках эти сдвиги увеличиваются пропорционально $\sqrt{N_1 N_2}$.

Демпфирование мод колебаний сгустков приводит к перераспределению декрементов затухания между связанными гармониками сгустков (1) и (2). При этом, если демпфируются колебания только одного из сгустков, то связь мод в МВ приводит к одновременному затуханию когерентных колебаний обоих. Доля декремента, переданного колебаниями демпфируемого сгустка, зависит от расстройки связанных мод от резонанса. Максимальный декремент передается в точном резонансе и составляет половину от декремента затухания моды демпфируемого пучка.

4.1.4. Столкновения симметричных сгустков

Рассмотрим более подробно устойчивость когерентных колебаний симметричных сгустков. Как и прежде считаем, что в этом случае параметры пучков и фокусировки колец таковы, что выполнены равенства

$$\sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = \sigma_y, \quad \xi_y^{(1)} = \xi_y^{(2)} = \xi_y, \quad \nu_y^{(1)} = \nu_y^{(2)} = \nu_y. \quad (4.87)$$

При этом также выполнено $K_{m,m_1}^{(1,2)} = K_{m,m_1}^{(2,1)}$. Тогда уравнения (4.66) и (4.67) записываются в виде:

$$X_m^{(1)} = m \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \frac{2\pi\xi_y \sin(2\pi m_1 \nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m_1 \nu_y)} X_{m_1}^{(2)}$$

и

$$X_m^{(2)} = m \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \frac{2\pi\xi_y \sin(2\pi m_1 \nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m_1 \nu_y)} X_{m_1}^{(1)}.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим, что амплитуды

$$X_m^{(\pm)} = X_m^{(1)} \pm X_m^{(2)} \quad (4.88)$$

удовлетворяют несвязанным уравнениям

$$X_m^{(\pm)} = \pm m \sum_{m_1=1}^{\infty} i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} \frac{2\pi\xi_y \sin(2\pi m_1 \nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m_1 \nu_y)} X_{m_1}^{(\pm)}. \quad (4.89)$$

Поэтому величины $X_m^{(\pm)}$ определяют моды колебаний симметричных встречных пучков. По принятой терминологии говорят, что величина $X_m^{(+)}$, описывающая синфазные колебания сгустков, определяет амплитуду 0-моды, а величина $X_m^{(-)}$, описывающая колебания сгустков противоположной фазы, определяет амплитуду π -моды. Впрочем, допустимо называть эти моды как $(+)$ мода и $(-)$ мода.

Напомним, что коэффициенты $K_{m,m_1}^{(1,2)}$ в этом уравнении равны нулю, если номера мультипольности m и m_1 разнятся на нечетное число. Если числа m и m_1 отличаются на четное число, то согласно (4.79) коэффициенты $i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)}$ равны

$$i^{m-m_1} K_{m,m_1}^{(1,2)} = -\frac{8/\pi}{\left((2m+2l)^2 - 1\right)(4l^2 - 1)}, \quad m_1 = m + 2l. \quad (4.90)$$

Подставив это выражение в (4.89), перепишем (4.89) в виде:

$$\begin{aligned} X_m^{(\pm)} = \pm m 2\pi\xi_y \sum_{l=\left[\frac{1-m}{2}\right]}^{\infty} \frac{8/\pi}{\left((2m+2l)^2 - 1\right)(1 - 4l^2)} X_{m+2l}^{(\pm)} \\ \times \frac{\sin(2\pi[m+2l]\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi[m+2l]\nu_y)}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

где $[x]$ – обозначает целую часть числа x . Суммирование по l обязательно содержит диагональное слагаемое с $l = 0$. Из (4.91) видно, что вклады недиагональных слагаемых ($l \neq 0$) в амплитуды $X_m^{(\pm)}$ уменьшаются, по крайней мере, по закону

$$\delta X_m^{(\pm)} \propto \frac{1}{(2m + 2l)^2 4l^2}.$$

Поэтому если параметры пространственного заряда сталкивающихся пучков невелики (скажем, $\xi_y^{(1,2)} \ll 1$), то согласно общей теории линейных когерентных колебаний мы можем ожидать, что наибольший вклад в колебание с мультипольностью m дает диагональное слагаемое ($l = 0$), а вкладами остальных можно пренебречь. В таком приближении уравнение (4.91), записанное в виде

$$X_m^{(\pm)} = \pm 2\pi \xi_y m \frac{8/\pi}{(4m^2 - 1)} \frac{\sin(2\pi m \nu_y)}{\cos 2\pi \nu - \cos(2\pi m \nu_y)} X_m^{(\pm)}, \quad (4.92)$$

сразу приводит к дисперсионному уравнению задачи:

$$\cos 2\pi \nu_m^{(\pm)} = \cos(2\pi m \nu_y) \pm \frac{8}{\pi} \frac{2\pi \xi_y m}{(4m^2 - 1)} \sin(2\pi m \nu_y), \quad (4.93)$$

где $\nu^{(\pm)}$ собственные частоты мод $(\pm)$. Как уже говорилось, взаимодействие встречных пучков приводит к неустойчивости их когерентных колебаний при приближении частот ν_y суммовым резонансам. В случае взаимодействия симметричных пучков и в пренебрежении вкладами недиагональных гармоник такие резонансы приходятся на частоты $\nu_y = n_0/(2m)$, где n_0 – номер азимутальной резонансной гармоники. При заданной величине ξ_y и вблизи одного из резонансов мы определим величины

$$\varepsilon = \nu_y - \frac{n_0}{2m}, \quad \nu_m^{(\pm)} = m\varepsilon + \frac{n_0}{2} + \Delta \nu_m^{(\pm)}. \quad (4.94)$$

Считая величины $\Delta \nu_m^{(\pm)}$ и ε малыми и разлагая в (4.93) тригонометрические функции в степенные ряды по $\Delta \nu_m^{(\pm)}$ и ε с удержанием квадратичных по $\Delta \nu_m^{(\pm)}$ слагаемых:

$$\cos(2\pi m \varepsilon + 2\pi \Delta \nu_m^{(\pm)}) - \cos(2\pi m \varepsilon) = \pm \frac{8}{\pi} \frac{2\pi \xi_y m}{(4m^2 - 1)} \sin(2\pi m \varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
& 2\pi\Delta\nu_m^{(\pm)} (\sin 2\pi m\varepsilon) + 2\pi^2 \left(\Delta\nu_m^{(\pm)}\right)^2 (\cos 2\pi m\varepsilon) \\
& = \mp \frac{8}{\pi} \frac{2\pi\xi_y m}{(4m^2 - 1)} \sin(2\pi m\varepsilon), \\
& 2\pi^2 \left(\Delta\nu_m^{(\pm)}\right)^2 + 2\pi^2 \left(2m\varepsilon\Delta\nu_m^{(\pm)}\right) = \mp 2\pi^2 \frac{8}{\pi} \frac{2m^2\xi_y\varepsilon}{(4m^2 - 1)},
\end{aligned}$$

приходим к дисперсионному уравнению

$$\left(\Delta\nu_m^{(\pm)}\right)^2 + 2m\varepsilon\Delta\nu_m^{(\pm)} = \mp \frac{8}{\pi} \frac{2m^2\xi_y\varepsilon}{(4m^2 - 1)}. \quad (4.95)$$

Решением этого уравнения легко установить, что при движении частот колебаний частиц вдоль оси ν_y моды (+) могут оказаться неустойчивыми для частот ν_y , превышающих резонансное значение $n_0/(2m)$, а моды (−) – для частот ν_y , находящихся ниже резонансного значения. Ширины запрещенных полос для обеих мод оцениваются одинаковыми выражениями

$$|\varepsilon| \leq \frac{16}{\pi} \frac{\xi_y}{(4m^2 - 1)}. \quad (4.96)$$

Они квадратично убывают с ростом номера мультипольности колебаний.

При решении дисперсионного уравнения (4.93) следует также помнить, что частоты некогерентных колебаний частиц в сгустках изменяются полями встречного пучка. Для ленточного пучка с ступенчатым распределением по квадратам амплитуд вертикальных колебаний сдвиги частот должны вычисляться на вертикальных границах сгустков. Вдали параметрических резонансов эти сдвиги частот определяются формулами (4.45) и (4.46). При этом частоты колебаний записываются в виде:

$$\nu_y = \nu_y^{(0)} + \xi_y \frac{8}{3\pi}. \quad (4.97)$$

Поскольку само уравнение (4.93) получено в предположении о малости параметров пространственного заряда ξ_y , при вычислении собственных частот $\nu^{(\pm)}$ следует разложить тригонометрические функции в правой части этого уравнения по степеням ξ_y с удержанием

лишь линейных слагаемых. Результат описывается выражением

$$\begin{aligned} \cos 2\pi\nu_m^{(\pm)} = \cos \left(2\pi m\nu_y^{(0)} \right) - \frac{8}{3\pi} 2\pi\xi_y m \sin \left(2\pi m\nu_y^{(0)} \right) \\ \pm \frac{8}{\pi} \frac{2\pi\xi_y m}{(4m^2 - 1)} \sin \left(2\pi m\nu_y^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Как и следовало ожидать, частота дипольной моды $m = 1$ не зависит от связи симметричных пучков в МВ:

$$\cos 2\pi\nu_1^{(+)} = \cos \left(2\pi\nu_y^{(0)} \right). \quad (4.99)$$

Эта мода описывает колебания общего центра тяжести пучков, движение которого нечувствительно к возмущениям полями встречных сгустков. Наоборот, действие полей встречных сгустков удваивает сдвиг частоты дипольной моды $\nu_1^{(-)}$ относительно частоты невозмущенных колебаний $\nu_y^{(0)}$:

$$\cos 2\pi\nu_1^{(-)} = \cos \left(2\pi\nu_y^{(0)} \right) - \frac{8}{3\pi} 4\pi\xi_y \sin \left(2\pi\nu_y^{(0)} \right). \quad (4.100)$$

Это выражение отличается от вычисленного в приближении жестких сгустков (2.76) лишь множителем $8/(3\pi) \simeq 0.85$. Поэтому мы можем заключить, что результаты вычислений спектров частот дипольных колебаний полученных в рамках модели жестких сгустков мало отличаются от результатов, полученных расчетом самосогласованных изменений функций распределения сталкивающихся ленточных сгустков с распределениями (4.30). Другой особенностью уравнений (4.93) или (4.98) является возможность вычисления спектров не только дипольных мод, но и когерентных колебаний произвольной мультипольности. Такие моды описывают возможность возбуждения внутренних степеней свободы сталкивающихся сгустков. Очевидно, что они полностью отсутствуют в модели с жесткими распределениями частиц в пучках.

Положения границы области устойчивости $\xi_y(\nu_y^{(0)})$ определяется уравнением

$$\left| \cos \left(2\pi\nu_m^{(\pm)} \right) \right| \leq 1. \quad (4.101)$$

Согласно уравнению (4.93) положение границы области устойчивости является периодической функцией ν_y с периодом $1/(2m)$. Это свойство отражает то обстоятельство, что неустойчивости когерентных колебаний встречных пучков обусловлены суммовой связью когерентных колебаний сгустков. При столкновениях симметричных пучков и в пренебрежении вкладами недиагональных гармоник условия суммового резонанса записывается в виде $n = 2m$. По этой причине и условие устойчивости имеет по ν_y период $1/(2m)$. Как видно из уравнения (4.98), такую же периодичность имеет условие устойчивости вдоль оси $\nu_y^{(0)}$. Мы учтем это свойство, определив вместо $m\nu_y^{(0)}$ переменную

$$x_m = m\nu_y^{(0)} \bmod \left(\frac{1}{2}\right). \quad (4.102)$$

Тогда, при изменении $\nu_y^{(0)}$ на любом интервале $\frac{k-1}{2m} \leq \nu_y^{(0)} \leq \frac{k}{2m}$, где $k = 1, 2, \dots, m$, величина x_m изменяется в диапазоне $[0, 1/2]$. Используя это определение, перепишем формулу (4.98) в виде:

$$\cos 2\pi\nu_m^{(\pm)} = \cos(2\pi x_m) - \frac{8}{\pi} 2\pi\xi_y m \sin(2\pi x_m) \left(\frac{1}{3} \mp \frac{1}{4m^2 - 1}\right). \quad (4.103)$$

Собственные частоты моды (+) определяются уравнением

$$\cos 2\pi\nu_m^{(+)} = \cos(2\pi x_m) - \frac{8}{3\pi} 2\pi\xi_y m \sin(2\pi x_m) \frac{4m^2 - 4}{4m^2 - 1}. \quad (4.104)$$

Они соответствуют устойчивым колебаниям при выполнении условия (4.101). Легко проверить, что условие $\cos 2\pi\nu_m^{(+)} \leq 1$ выполняется при всех значениях ξ_y и $\nu_y^{(0)}$, а условие $-1 \leq \cos 2\pi\nu_m^{(+)}$ — лишь для значений ξ_y , не превышающих пороговое значение:

$$\xi_{th}^{(+)} = \frac{3\pi \cot(\pi x_m)}{8} \frac{4m^2 - 1}{2\pi m} \frac{4m^2 - 1}{4m^2 - 4}. \quad (4.105)$$

Аналогично, для мод (−) значения частот устойчивых когерентных колебаний вычисляются по формуле

$$\cos 2\pi\nu_m^{(-)} = \cos(2\pi x_m) - \frac{8}{3\pi} 2\pi\xi_y m \sin(2\pi x_m) \frac{4m^2 + 2}{4m^2 - 1}. \quad (4.106)$$

При этом значения ξ_y ограничиваются условием $\cos 2\pi\nu_m^{(-)} \geq -1$, а пороговое значение параметра пространственного заряда определяется выражением:

$$\xi_{th}^{(-)} = \frac{3\pi \cot(\pi x_m)}{8} \frac{4m^2 - 1}{2\pi m} \frac{4m^2 - 1}{4m^2 + 2}. \quad (4.107)$$

Поскольку условия устойчивости для мод $(\pm)$ должны быть выполнены одновременно, а $\xi_{th}^{(-)} < \xi_{th}^{(+)}$, в качестве порогового значения ξ_y следует выбрать $\xi_{th}^{(-)}$. Примеры зависимостей $\xi_{th}^{(-)}(\nu_y^{(0)})$ для нескольких первых номеров мультипольности когерентных колебаний (рис. 8) показывают, что величины пороговых токов сгустков равны нулю на верхних границах периодов и увеличиваются при приближении к их нижним границам. Такое поведение граничных кривых специфично для столкновений противоположно заряженных сгустков, когда сдвиги частот некогерентных колебаний положительны. Если же знаки зарядов сгустков одинаковы, то их взаимодействие в МВ ослабляет фокусировки колец. В этом случае значения $\xi_{th}^{(-)}(\nu_y^{(0)})$ равны нулю на нижних границах периодов и увеличиваются при приближении частот $\nu_y^{(0)}$ к верхней границе периода по $\nu_y^{(0)}$. При заданном значении $\nu_y^{(0)}$ требование одновременной устойчивости мод в заданном диапазоне m будет выполнено, если в качестве порогового значения $\xi_{th}^{(-)}$ будет выбрано наименьшее в (4.107) значение $\xi_{th}^{(-)}$ (например, рис. 9). Видно, что такое требование может существенно ограничить допустимые значения параметра пространственного заряда пучков. Так, согласно данным, изображенным на рис. 9, допустимые значения ξ_y редко превышают 0.02 почти для всех $\nu_y^{(0)}$ за исключением узкой области $\nu_y^{(0)}$, расположенной немного выше параметрического резонанса. Предпочтительность приближения частот бетатронных колебаний частиц к параметрическому резонансу сверху наблюдалась на многих электрон-позитронных коллайдерах.

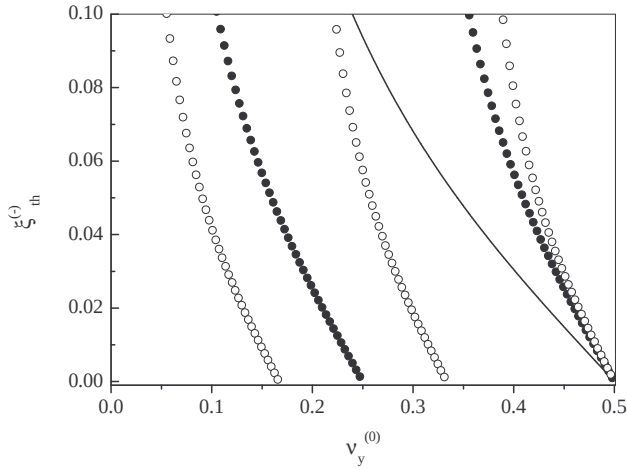


Рис. 8. Несколько примеров зависимостей пороговых значений ξ_y от частоты невозмущенных бетатронных колебаний $\nu_y^{(0)}$. Сплошная линия – дипольные, точки – квадрупольные, окружности – секступольные когерентные колебания

4.2. Горизонтальные колебания симметричных ленточных пучков

Рассмотрим еще один решаемый пример, в котором функции распределения сталкивающихся сгустков описываются выражениями

$$f_0^{(1,2)} = \frac{\delta(I_y)}{(2\pi)^2 I_0} \begin{cases} 1, & I_x \leq I_0, \\ 0, & I_x > I_0. \end{cases} \quad (4.108)$$

Они также описывают ленточные в горизонтальном направлении сгустки. В этом разделе мы предположим, что в сгустках возбуждены только горизонтальные когерентные колебания $m_y = 0$ и $m_x = m$. В таком случае, возмущения горизонтальных бетатронных колеба-

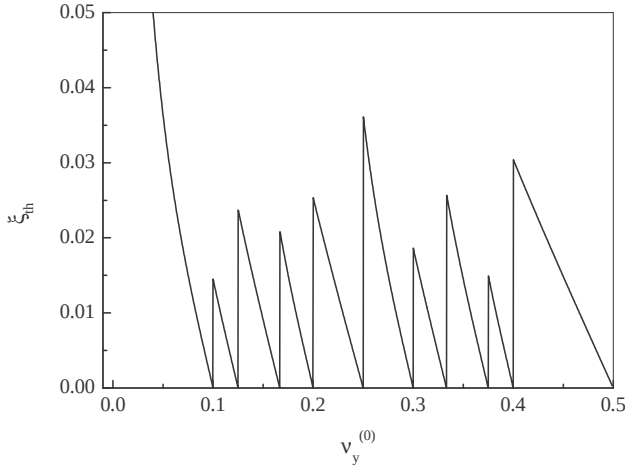


Рис. 9. Зависимость порогового значения ξ_y от частоты невозмущенных бетатронных колебаний $\nu_y^{(0)}$ для первых пяти мультиполей когерентных колебаний встречных сгустков

ний частиц сгустка (1) описываются лагранжианом

$$\begin{aligned}
 L_{1,2} &= \frac{N_2 e^2}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y e^{ik_x x}}{k_x^2 + k_y^2} \int_0^{\infty} dI_1 \int_0^{2\pi} d\psi_1 e^{ik_x x_1} f^{(2)}(I_1, \psi_1, \theta) \\
 &= \frac{4\pi N_2 e^2}{c} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} e^{ikx} \int_0^{\infty} dI_1 \sum_{m_3} i^{-m_3} J_{m_3}(ka_1) f_{m_3}^{(2)}(I_1, \theta).
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Подстановка этого выражения в (4.20) дает следующие скорости изменения амплитуд когерентных колебаний сгустков:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_m^{(1)}}{\partial \theta_s} + im\nu_x^{(1)} f_m^{(1)} &= \delta_T(\theta) \frac{imN_2 e^2}{2\pi c I_0} \delta(I_x - I_0) \int_0^{\infty} dI_1 \sum_{m_3=1}^{\infty} i^{m-m_3} \\
 &\times 2 \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_m(ka) J_{m_3}(ka_1) \left(f_{m_3}^{(2)}(I_1, \theta) + f_{-m_3}^{(2)}(I_1, \theta) \right)
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m^{(2)}}{\partial \theta_s} + im\nu_x^{(2)} f_m^{(2)} &= \delta_T(\theta) \frac{imN_1 e^2}{2\pi c I_0} \delta(I_x - I_0) \int_0^\infty dI_1 \sum_{m_3=1}^\infty i^{m-m_3} \\ &\times 2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_m(ka) J_{m_3}(ka_1) \left(f_{m_3}^{(1)}(I_1, \theta) + f_{-m_3}^{(1)}(I_1, \theta) \right). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Предполагая симметрию сталкивающихся сгустков

$$N_1 = N_2 = N, \quad \nu_x^{(1)} = \nu_x^{(2)} = \nu_x$$

и используя подстановки (4.53), (4.59) и (4.60):

$$f_m^{(1,2)}(I, \theta) = \delta(I_x - I_0) \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{X_m^{(1,2)} e^{-i\nu\theta - in\theta}}{\nu + n - m\nu_y}, \quad (4.112)$$

приходим к уравнениям для амплитуд $X_m^{(1,2)}$:

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} &= -2m\xi \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_m(ka_0) \sum_{m_3=1}^\infty i^{m-m_3} J_{m_3}(ka_0) \\ &\times X_{m_3}^{(2)}(I_0) (S_{m_3} - S_{-m_3}), \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} &= -2m\xi \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_m(ka_0) \sum_{m_3=1}^\infty i^{m-m_3} J_{m_3}(ka_0) \\ &\times X_{m_3}^{(1)}(I_0) (S_{m_3} - S_{-m_3}). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Здесь $a_0 = \sqrt{2I_0\beta_x/p}$,

$$\xi = \frac{Ne^2}{2\pi c I_0}, \quad (4.115)$$

а

$$S_m - S_{-m} = \frac{-2\pi \sin 2\pi m\nu_x}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi m\nu_x}. \quad (4.116)$$

Теперь, следует заметить, что имеет место тождество (A13)

$$2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_m(ka_0) J_{m_3}(ka_0) = \frac{4 \sin\left((m - m_3)\frac{\pi}{2}\right)}{\pi (m^2 - m_3^2)}. \quad (4.117)$$

Поскольку числа m и m_3 имеют одинаковую четность, выражение в правой части (4.117) равно нулю для всех значений $m \neq m_3$ и равно $1/m$ для номеров $m = m_3$. Таким образом, получаем

$$2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} J_m(ka_0) J_{m_3}(ka_0) = \frac{\delta_{m,m_3}}{m}. \quad (4.118)$$

Подставляя это выражение в формулы (4.113), (4.114) и выполняя суммирование по m_3 , находим, что взаимодействие в МВ горизонтальных когерентных колебаний ленточных пучков с распределениями (4.108) само отбирает в коллективные моды лишь вклады диагональных номеров мультипольности:

$$\begin{aligned} X_m^{(1)}(I_0) &= -\xi \sum_{m_3=1}^{\infty} i^{m-m_3} \delta_{m,m_3} X_{m_3}^{(2)}(I_0) (S_{m_3} - S_{-m_3}) \\ &= \frac{2\pi\xi \sin 2\pi m\nu_x}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi m\nu_x} X_m^{(2)}(I_0), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} X_m^{(1)}(I_0) &= \frac{2\pi\xi \sin 2\pi m\nu_x}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi m\nu_x} X_m^{(2)}(I_0), \\ X_m^{(2)}(I_0) &= \frac{2\pi\xi \sin 2\pi m\nu_x}{\cos 2\pi\nu - \cos 2\pi m\nu_x} X_m^{(1)}(I_0). \end{aligned} \quad (4.119)$$

Моды колебаний определяются комбинациями

$$X_m^{(\pm)} = X_m^{(1)}(I_0) \pm X_m^{(2)}(I_0), \quad (4.120)$$

которые имеют собственные частоты:

$$\cos 2\pi\nu_{\pm} = \cos 2\pi m\nu_x \pm 2\pi\xi \sin 2\pi m\nu_x. \quad (4.121)$$

При вычислении частот $\nu_{\pm}$ и границ области устойчивости следует помнить, что взаимодействие сгустков в МВ изменяет частоты горизонтальных бетатронных колебаний согласно

$$\cos 2\pi\nu_0 = \cos 2\pi\nu_x + 2\pi\xi \sin 2\pi\nu_x, \quad (4.122)$$

где ν_0 – частота невозмущенных горизонтальных бетатронных колебаний. Отметим похожесть выражений для частот дипольных мод в

(4.121) с аналогичными формулами (2.74) и (2.75), рассчитанными в модели жестких сгустков. Для моды (+) эти частоты совпадают в точности. Для моды (−) они совпадают с точностью до квадратичных слагаемых по ξ .

5. Затухание Ландау

Как уже упоминалось, поля пространственного заряда встречных сгустков существенно нелинейно зависят от отклонений частиц от замкнутой орбиты. Среди прочего, это приводит к заметным изменениям (безразмерных) частот колебаний частиц при изменении амплитуд их колебаний. Для разноименно заряженных встречных пучков характер этой зависимости таков, что сдвиги частот колебаний относительно их невозмущенных значений положительны и имеют наибольшую величину ξ для нулевых амплитуд колебаний частиц. При неограниченном росте амплитуд эти сдвиги частот уменьшаются до нуля. В пучке с гладким распределением по амплитудам колебаний присутствуют частицы со всеми амплитудами. Поэтому спектр такого пучка вблизи гармоник частот бетатронных колебаний содержит множество частот между невозмущенным значением и частотой, смещенной на величину линейного сдвига частоты ξ . Таким образом, если даже сгустки движутся в накопительных кольцах с идеально линейной фокусировкой, их взаимодействие в МВ приводит к появлению в них разбросов частот колебаний частиц. В таких условиях взаимодействие колебаний частиц и когерентных колебаний сгустков может вызывать затухание Ландау когерентных колебаний. Резонансность неустойчивостей из-за взаимодействия сгустков в МВ вносит свои особенности в характер затухания Ландау когерентных колебаний встречных пучков. Так, в определенных условиях, ожидаемое затухание может перейти в антизатухание амплитуд когерентных колебаний. В последнем случае говорят, что разброс частот колебаний частиц вызывает антизатухание Ландау. Для неустойчивостей когерентных колебаний встречных пучков это явление впервые было обнаружено и описано в работе [12].

5.1. Описание модели

Для построения полуаналитической модели, описывающей затухание Ландау когерентных колебаний встречных пучков, мы воспользуемся методом, применявшимся в работе [20] для изучения сходных проблем в пучках с сильным пространственным зарядом. Мы упростим вычисления предполагая выполнение нескольких специальных условий. Именно, мы рассмотрим столкновения симметричных, ленточных пучков, невозмущенные функции распределения в которых описываются выражениями

$$f_0^{(1,2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(I_y) f_0(I_x). \quad (5.1)$$

Кроме того, мы предположим, что сталкивающиеся сгустки совершают когерентные колебания только в горизонтальной плоскости ($m_y = 0$, $m_x = m$). В рамках такой модели уравнения (4.20) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m^{(1)}}{\partial \theta} + im\nu_x f_m^{(1)} &= -im\delta_T(\theta) \frac{\partial f_0}{\partial I} \frac{N_2 e^2}{c} \\ &\times \sum_{m_3=1}^{\infty} i^{m-m_3} \int_0^{\infty} dI_1 K_{m,m_3}^{(1,2)}(I, I_1) \left(f_{m_3}^{(2)}(I_1, \theta) + f_{-m_3}^{(2)}(I_1, \theta) \right), \\ \frac{\partial f_m^{(2)}}{\partial \theta} + im\nu_x f_m^{(2)} &= -im\delta_T(\theta) \frac{\partial f_0}{\partial I} \frac{N_1 e^2}{c} \\ &\times \sum_{m_3=1}^{\infty} i^{m-m_3} \int_0^{\infty} dI_1 K_{m,m_3}^{(2,1)}(I, I_1) \left(f_{m_3}^{(1)}(I_1, \theta) + f_{-m_3}^{(1)}(I_1, \theta) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь

$$K_{m,m_3}^{(1,2)}(I, I_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} J_m \left(k \sqrt{I \beta^{(1)}} \right) J_{m_3} \left(k \sqrt{I_1 \beta^{(2)}} \right), \quad (5.3)$$

а $J_k(z)$ – функции Бесселя. Напомним, что $J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z)$ и $J_k(-z) = (-1)^k J_k(z)$. Поскольку мы будем изучать лишь горизонтальные колебания, мы будем опускать индекс x там, где это не приведет к недоразумениям. Мы будем также предполагать, что значения невозмущенных и динамических β -функций в МВ совпадают

для обоих пучков $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \beta$. Из (5.3) находим, что

$$K_{m,m_3}^{(1,2)}(I, I_1) = K_{m,m_3}^{(2,1)}(I, I_1) = K_{m,m_3}(I, I_1),$$

а

$$K_{m,m_3}(I, I_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_m(k\sqrt{I})J_{m_3}(k\sqrt{I_1})}{|k|} dk, \quad m + m_3 = 2l, \quad (5.4)$$

$$K_{m,m_3}(I, I_1) = 0, \quad m + m_3 = 2l + 1, \quad (5.5)$$

где l – целое число.

Для симметричных встречных пучков из (5.2) получаем уравнения для мод

$$f_m^{(\pm)} = f_m^{(1)} \pm f_m^{(2)}. \quad (5.6)$$

В рамках нашей модели эти уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m^{(\pm)}}{\partial \theta} + im\nu_x f_m^{(\pm)} = \mp im\delta_T(\theta) \frac{\partial f_0}{\partial I} \frac{N_2 e^2}{c} \sum_{m_3=1}^{\infty} i^{m-m_3} \\ \times \int_0^{\infty} dI_1 K_{m,m_3}(I, I_1) \left(f_{m_3}^{(\pm)}(I_1, \theta) + f_{-m_3}^{(\pm)}(I_1, \theta) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

В общем случае, функции $f_m^{(1,2)}$ являются линейными комбинациями мод $f_m^{(\pm)}$. Поэтому когерентные колебания симметричных встречных пучков будут устойчивы лишь при одновременной устойчивости мод $f_m^{(+)}$ и $f_m^{(-)}$.

5.2. Некогерентные колебания

В соответствии с положениями общей теории когерентных колебаний (например, в [1], или в [8]), а также ввиду резонансного характера изучаемых явлений, до вычисления условий устойчивости мод, описываемых уравнениями (5.7), нам следует уточнить значения частот бетатронных колебаний частиц в сталкивающихся сгустках ν_x и β -функций колец в МВ. В нашей модели колебания частиц, например, сгустка (1) в МВ возмущаются силой

$$F_x = \omega_0 \frac{\partial L_{1,2}^{(0)}}{\partial x} = -\delta_T(ct) \frac{N_2 e^2 p}{\beta_2} x \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} f_0 \left(\frac{px^2}{2\beta_2} u \right), \quad (5.8)$$

где $\beta_{1,2}$ – значения β -функций горизонтальных бетатронных колебаний частиц сгустков (1) и (2) в МВ. Если ϵ – горизонтальные эмиттансы сгустков, то их функции распределения удовлетворяют соотношению $f_0(0) = 1/(p\epsilon)$. Тогда, простые вычисления приводят к следующим выражениям для частот некогерентных линейных бетатронных колебаний $\nu_x^{(1,2)}$ и β -функций в МВ (например, в [13]):

$$\cos \mu^{(1)} = \cos \mu_0 - \frac{N_2 e^2}{p c \epsilon} \frac{\beta_0}{\beta_2} \sin \mu_0, \quad \beta_1 \sin \mu^{(1)} = \beta_0 \sin \mu_0, \quad (5.9)$$

$$\cos \mu^{(2)} = \cos \mu_0 - \frac{N_1 e^2}{p c \epsilon} \frac{\beta_0}{\beta_1} \sin \mu_0, \quad \beta_2 \sin \mu^{(2)} = \beta_0 \sin \mu_0. \quad (5.10)$$

Здесь, $\mu = 2\pi\nu_x$, $\mu_0 = 2\pi\nu_{x0}$, β_0 – значения невозмущенных β -функций горизонтальных колебаний. Мы уже встречались с такими уравнениями в связи с колебаниями частиц в жестких сгустках (раздел 2.2.1.). Они описывают самосогласованные изменения частот бетатронных колебаний и β -функций полями встречных сгустков. Для столкновений симметричных сгустков ($N_1 = N_2 = N$) такие самосогласованные уравнения имеют решения и потому описывают устойчивые линейные бетатронные колебания частиц при всех значениях μ_0 и β_0 . Определив $B = 2\pi\xi$, где

$$\xi = \frac{N e^2}{2\pi p c \epsilon} \quad (5.11)$$

– параметр пространственного заряда сгустка, перепишем уравнения (5.9) и (5.10) в более компактном виде

$$\cos \mu^{(1)} = \cos \mu_0 - B \frac{\beta_0}{\beta_2} \sin \mu_0, \quad \beta_1 \sin \mu^{(1)} = \beta_0 \sin \mu_0, \quad (5.12)$$

$$\cos \mu^{(2)} = \cos \mu_0 - B \frac{\beta_0}{\beta_1} \sin \mu_0, \quad \beta_2 \sin \mu^{(2)} = \beta_0 \sin \mu_0. \quad (5.13)$$

В реалистической области параметров $B < 1$, уравнения (5.12) и (5.13) предсказывают равные изменения частот бетатронных колебаний и β -функций для всех значений μ_0 . Помимо этого, в узкой области частот:

$$\arccos \left(\frac{B^2 - 1}{1 + B^2} \right) \leq \mu_0 \leq \arccos \left(\frac{B^2 - 1}{\sqrt{1 + B^2}} \right), \quad B < 1, \quad (5.14)$$

уравнения (5.12) и (5.13) в дополнение к симметричным решениям предсказывают решения с существенно отличающимися значениями β -функций β_1 и β_2 в месте встречи. Соответствующие этим дополнительным решениям частоты бетатронных колебаний в сгустках (1) и (2) в этой области также различны. Это так называемое flip-флор расщепление бетатронных функций. Оно связано с самосогласованностью уравнений (5.12) и (5.13), а также с нелинейной зависимостью функций в этих уравнениях от бетатронных функций колец. При малых значениях ξ ширина такой flip-флор области невелика ($\Delta\mu_0 \simeq 0.3B$). По этой причине, а также поскольку, как мы видели, когерентные колебания встречных пучков с равными поперечными размерами имеют более жесткие условия устойчивости, в дальнейших вычислениях мы будем игнорировать возможность такого расщепления.

Решая уравнения (5.12) и (5.13) получаем

$$\cos \mu_x = \frac{\cos \mu_0 - B\sqrt{B^2 + \sin^2 \mu_0}}{1 + B^2}, \quad k\pi \leq \mu_0 \leq k\pi + \pi, \quad (5.15)$$

$$\sin \mu_x = \frac{\beta_0}{\beta_1} \sin \mu_0 = \frac{B \cos \mu_0 + \sqrt{B^2 + \sin^2 \mu_0}}{(1 + B^2)} \quad (5.16)$$

где k – целое. Из этих соотношений следует:

$$\cos \mu_0 = \cos \mu_x + B \sin \mu_x. \quad (5.17)$$

Для малых значений ξ сдвиг частоты некогерентных бетатронных колебаний за счет взаимодействий сгустков в МВ равен ξ . С увеличением ξ величина этого сдвига отклоняется от ξ . Это особенно заметно при приближении частот ν_{x0} к параметрическим резонансам (рис. 10).

Отметим, что согласно (5.15) изменения частот невозмущенных колебаний в диапазоне $k/2 \leq \nu_{x0} \leq (k+1)/2$, где k – целое, вызывает изменения частот ν_x в области

$$\frac{k}{2} + \Delta_\xi \leq \nu_x \leq \frac{k+1}{2}, \quad (5.18)$$

где

$$\Delta_\xi = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{1 - B^2}{1 + B^2}. \quad (5.19)$$

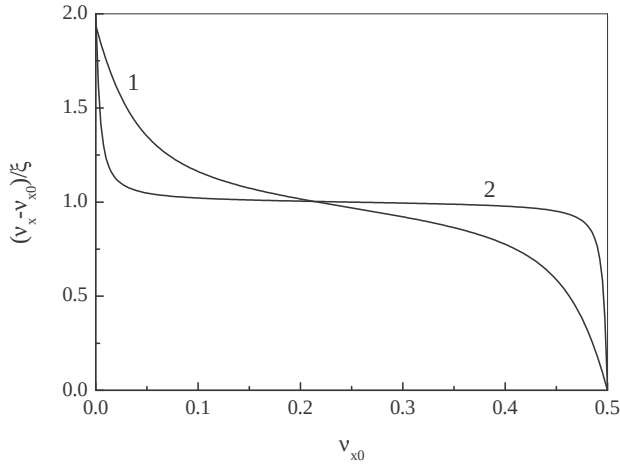


Рис. 10. Зависимость сдвига частоты линейных некогерентных колебаний из-за эффектов встречи от частоты невозмущенных колебаний (ν_0); линия 1 – $\xi = 0.05$, линия 2 – $\xi = 0.005$

Это означает, что при заданной величине ξ спектры малых некогерентных бетатронных колебаний частиц сталкивающихся сгустков имеют вдоль оси ν_x щель, расположенную сразу за параметрическим резонансом. Ширина этой щели равна Δ_ξ (рис. 11).

Поскольку положение верхней границы в (5.18) не зависит от ξ , бетатронные колебания частиц в сталкивающихся пучках не могут возмущаться резонансами $\nu_x = n/(2m)$, где натуральные числа n и m , удовлетворяющие условию

$$\frac{k}{2} \leq \frac{n}{2m} \leq \frac{k}{2} + \Delta_\xi. \quad (5.20)$$

Как уже говорилось, нелинейные зависимости полей в МВ от координат частиц приводят к появлению разбросов частот бетатронных колебаний в сталкивающихся сгустках. В используемой модели, для малых значений ξ и вдали от параметрических резонансов простые вычисления частот горизонтальных бетатронных колебаний частиц в первом приближении метода усреднений приводят к формуле

$$\nu_x^{(1,2)}(I) = \nu_{x0} + \frac{Ne^2}{2\pi cI} \int_0^I dI_1 f_0^{(1,2)}(I_1). \quad (5.21)$$

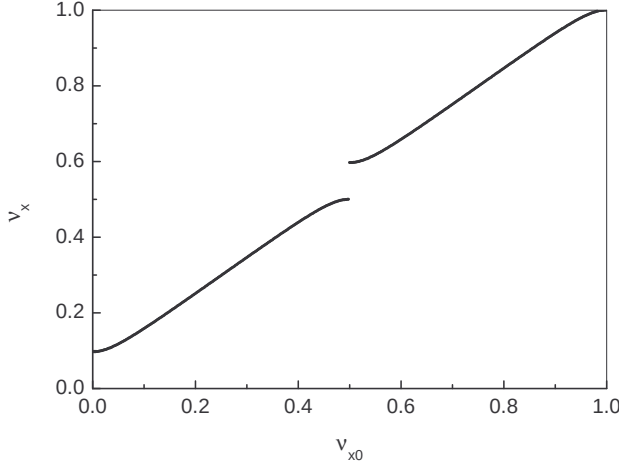


Рис. 11. Зависимость ν_x от частоты невозмущенных колебаний (ν_{x0}). Горизонтальные бетатронные колебания, $\xi = 0.05$. На рисунке изображен лишь квадрат, в котором $0 \leq \nu_{x0} \leq 1$ и $0 \leq \nu_x \leq 1$. Зависимости при больших значениях частот получают периодическим продолжением вдоль диагонали рисунка

В более широких областях ξ и ν_{x0} численное моделирование колебаний частиц с использованием в МВ силы, определенной в (5.8), приводит к выражению для $\nu_x(I)$, которое может быть записано аналогично формуле (5.21):

$$\nu_x(I) = \nu_{x0} + \Delta\nu_x(0) \frac{p\epsilon}{I} \int_0^I dI_1 f_0(I_1). \quad (5.22)$$

Здесь $\Delta\nu_x(0)$ – сдвиг частоты линейных бетатронных колебаний, вычисляемый по формуле (5.15).

5.3. Дисперсионные уравнения и моды

Мы упростим описание затухания Ландау симметричных встречных пучков предположив, что невозмущенные функции распределения сгустков экспоненциально зависят от переменной действие гори-

зонтальных колебаний:

$$f_0 = \frac{1}{p\epsilon} e^{-x}, \quad x = \frac{I}{p\epsilon}, \quad (5.23)$$

где ϵ – горизонтальный эмиттанс сгустка. Подставив это выражение в (5.22), пишем

$$\nu_x(I) = \nu_{x0} + \Delta\nu_x(0) \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad (5.24)$$

или

$$\nu_x(I) = \nu_x - \Delta\nu_x(0) \left(1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}\right). \quad (5.25)$$

Теперь, подставив в уравнение (5.7) последовательно f_0 из (5.23),

$$f_m^{(\pm)} = e^{-i\nu\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{m,n}^{(\pm)} e^{-in\theta} \quad (5.26)$$

и

$$f_{m,n}^{(\pm)} = \frac{X_m^{(\pm)}(I)}{\nu + n - m\nu_x(I)}, \quad f_{-m,n}^{(\pm)} = \frac{X_{-m}^{(\pm)}(I)}{\nu + n + m\nu_x(I)}, \quad (5.27)$$

находим, что амплитуды $X_m^{(\pm)}$ удовлетворяют условию $X_{-m}^{(\pm)} = -X_m^{(\pm)}$ и вычисляются решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} X_m^{(\pm)} &= \mp m\xi e^{-x} \int_0^\infty dx_1 \sum_{m_3=1}^{\infty} i^{m-m_3} K_{m,m_3}(x, x_1) \\ &\times X_{m_3}^{(\pm)}(x_1) (S_{m_3} - S_{-m_3}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Здесь

$$S_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu + n - m\nu_x(x)}. \quad (5.29)$$

Напомним, что для частот ν , расположенных в нижней полуплоскости комплексной переменной ν , правая часть уравнения (5.28) должна вычисляться ее аналитическим продолжением в эту полуплоскость (см., например, в [1] или [17]).

Мы уже обсуждали особенности решения подобного интегрального уравнения для описания вертикальных когерентных колебаний

встречных, ленточных пучков. Напомним, что согласно общим правилам теории линейных когерентных колебаний при малых значениях параметра пространственного заряда ξ ² значение собственной частоты ν в (5.28) для моды с мультипольностью m ожидается близким к частоте $m\nu_x$. С другой стороны, поскольку взаимодействие сгустков в МВ осуществляется посредством сил пространственного заряда, моды когерентных колебаний могут оказаться неустойчивыми только в тех случаях, когда частоты ν_x приближаются к значениям, которые соответствуют суммовым резонансам когерентных колебаний $\nu_x \simeq n/(2m)$, где n и m – целые числа. Предполагая как и прежде, что при малых ξ резонансы когерентных колебаний встречных сгустков с отличающимися номерами мультипольности не интерферируют, мы пренебрежем в уравнениях (5.28) вкладами недиагональных слагаемых $m_3 \neq m$. После отбрасывания в правой части (5.28) недиагональных и нерезонансных слагаемых:

$$\begin{aligned} X_m^{(\pm)} &\simeq \mp m\xi e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_{m,m}(x, x_1) X_m^{(\pm)}(x_1) \\ &\times \left(\sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{\nu + n - m\nu_x(x)} - \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{\nu + n + m\nu_x(x)} \right) \\ &\simeq \mp m\xi e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_{m,m}(x, x_1) X_m^{(\pm)}(x_1) \\ &\times \left(\frac{1}{\nu - m\nu_x(x)} - \frac{1}{\nu - n + m\nu_x(x)} \right), \end{aligned}$$

а также определив:

$$z_1 = \frac{1}{m\xi} \left(\nu - \frac{n}{2} \right), \quad \delta(x) = \frac{1}{\xi} \left(\nu_x(x) - \frac{n}{2m} \right), \quad (5.30)$$

где n – азимутальный номер резонансной гармоники, приходим к уравнению

$$X_m^{(\pm)}(x) = \mp e^{-x} \int_0^\infty dx_1 V(x_1) K_m(x, x_1) X_m^{(\pm)}(x_1), \quad (5.31)$$

² В нашей задаче мы можем определить верхнюю границу ξ неравенством $B < 1$, где $B = 2\pi\xi$.

где ($m > 0$)

$$K_m(x, x_1) = 2 \int_0^\infty \frac{J_m(k\sqrt{x}) J_m(k\sqrt{x_1})}{k} dk, \quad (5.32)$$

а

$$V(x) = \frac{2\delta(x)}{z_1^2 - \delta^2(x)}, \quad \text{Im} z_1 > 0. \quad (5.33)$$

Один из способов вычисления интеграла в (5.32) приведен в Приложении А формулы (A17 – A19). Мы, тем не менее, обсудим еще один метод вычисления этого интеграла, который основывается на применении теоремы сложения для функций Бесселя. Обозначив, например, $b = \sqrt{x_1/x}$, пишем

$$J_m(k) J_m(kb) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-im\alpha} J_0(kr),$$

где $r = \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}$. После этого ядро K_m записывается в виде

$$K_m(1, b) = 2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-im\alpha} J_0(kr).$$

Интегрируя здесь по α по частям, получим

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{2}{-im} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-im\alpha} \frac{dJ_0(kr)}{d\alpha} \\ &= \frac{2}{im} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-im\alpha} \frac{b \sin \alpha}{\sqrt{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}} \int_0^\infty J_1(kr) dk. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty J_1(kr) dk = \frac{1}{r},$$

пишем

$$K_m = \frac{2}{im} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{-im\alpha} \frac{b \sin \alpha}{1 + b^2 - 2b \cos \alpha}.$$

Последний интеграл вычисляется элементарно. Используя подстановку $z = e^{-i\alpha}$, перепишем ядро K_m в виде

$$K_m(1, b) = -\frac{1}{m} \int_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} z^{m-1} \frac{1 - z^2}{z^2 - \frac{1+b^2}{b}z + 1}.$$

В этом выражении интегрирование ведется вдоль контура $|z| = 1$, который обходится в положительном направлении. Значение интеграла определяется вычетами подынтегрального выражения в простых полюсах:

$$z_{1,2} = \frac{1+b^2}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{1+b^2}{2b}\right)^2 - 1} = \frac{1+b^2 \pm |b-1|(b+1)}{2b}.$$

Если, например, $x_1 < x$ и поэтому $b < 1$, полюс в точке $z_1 = 1/b$ попадает вне контура интегрирования, а плюс в точке $z_2 = b$ находится внутри контура интегрирования. Вычисляя вычет в точке z_2 , пишем

$$K_m(1, b) = -\frac{2\pi i}{m} \frac{b^{m-1}}{2\pi i} \frac{1-b^2}{2b - \frac{1+b^2}{b}} = \frac{b^m}{m} = \frac{(x_1/x)^{m/2}}{m}, \quad x > x_1. \quad (5.34)$$

Аналогично, если $x < x_1$, то внутрь контура интегрирования попадает полюс в точке $z_1 = 1/b$. Повторение уже описанных вычислений K_m приводит к результату:

$$K_m(x, x_1) = \frac{(x/x_1)^{m/2}}{m}, \quad x < x_1. \quad (5.35)$$

Объединяя формулы (5.34) и (5.35), получаем

$$K_m(x, x_1) = \frac{1}{m} \begin{cases} (x/x_1)^{m/2}, & x < x_1, \\ (x_1/x)^{m/2}, & x > x_1. \end{cases} \quad (5.36)$$

Подставив (5.36) в (5.31) и записывая решения этого уравнения, например, для моды $X_m^{(-)}$ в виде

$$X_m^{(-)} = e^{-x} x^{m/2} p_m^{(-)}(x), \quad (5.37)$$

получим интегральное уравнение для новой неизвестной функции $p_m^{(-)}(x)$:

$$\begin{aligned} p_m^{(-)}(x) &= \frac{1}{m} \int_0^x dx_1 \frac{x_1^m}{x^m} e^{-x_1} V(x_1) p_m^{(-)}(x_1) \\ &+ \frac{1}{m} \int_x^\infty dx_1 e^{-x_1} V(x_1) p_m^{(-)}(x_1), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p_m^{(-)}(x) &= \frac{1}{m} \int_0^\infty dx_1 e^{-x_1} V(x_1) p_m^{(-)}(x_1) \\ &+ \frac{1}{mx^m} \int_0^x dx_1 e^{-x_1} x_1^m V(x_1) p_m^{(-)}(x_1) \\ &- \frac{1}{m} \int_0^x dx_1 e^{-x_1} V(x_1) p_m^{(-)}(x_1). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Согласно уравнению (5.38) имеем

$$p_m^{(-)}(0) = \frac{1}{m} \int_0^\infty dx_1 e^{-x_1} V(x_1) p_m^{(-)}(x_1).$$

Поскольку собственные функции задачи определены с точностью до множителя, мы можем выбрать условие их нормировки так, чтобы выполнялось условие $p_m^{(-)}(0) = 1$. В результате, однородное уравнение (5.38) заменяется неоднородным интегральным уравнением для $p_m^{(-)}(x)$

$$\begin{aligned} p_m^{(-)}(x) &= 1 + \frac{1}{mx^m} \int_0^x dx_1 e^{-x_1} x_1^m V(x_1) p_m^{(-)}(x_1) \\ &- \frac{1}{m} \int_0^x dx_1 e^{-x_1} V(x_1) p_m^{(-)}(x_1) \end{aligned} \quad (5.39)$$

и дисперсионным уравнением задачи:

$$1 = \frac{1}{m} \int_0^\infty dx e^{-x} V(x) p_m^{(-)}(x). \quad (5.40)$$

Для нахождения собственных функций и собственных значений мод уравнения (5.39) и (5.40) должны решаться совместно. Входящая в них функция $p_m^{(-)}(x)$ зависит не только от x , но и от значения собственной частоты (z_1), как от параметра. Иногда, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы будем писать $p_m^{(-)}(z_1, x)$ вместо $p_m^{(-)}(x)$.

Для удобства вычислений преобразуем интегральное уравнение (5.39) в дифференциальное уравнение для $p_m^{(-)}(x)$. Дифференцируя (5.39) один раз по x , находим

$$\frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} = -\frac{1}{x^{m+1}} \int_0^x dx_1 e^{-x_1} x_1^m V(x_1) p_m^{(-)}(x_1). \quad (5.41)$$

После еще одного дифференцирования функции $\left(x^{m+1} dp_m^{(-)}(x)/dx\right)$ получим искомое уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(x^{m+1} \frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} \right) = -e^{-x} x^m V(x) p_m^{(-)}(x). \quad (5.42)$$

Используя подстановку

$$p_m^{(-)}(x) = \frac{w(x)}{x}, \quad (5.43)$$

получаем ($w' = dw/dx$)

$$w'' + \frac{(m-1)}{x} w' - \frac{(m-1)}{x^2} w = -\frac{e^{-x}}{x} V(x) w(x). \quad (5.44)$$

Для обеспечения граничного условия $p_m^{(-)}(0) = 1$, функция w в этом уравнении должна удовлетворять условиям:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1. \quad (5.45)$$

Вычисление интеграла в дисперсионном уравнении (5.40) требует знания функции $p_m^{(-)}(x)$, которая находится численным решением уравнения (5.44). Последняя процедура должна выполняться с точностью, которая будет достаточной для вычисления дисперсионного интеграла и для последующего численного решения дисперсионного уравнения. При этом нужно иметь в виду, что точность решений на последующих шагах этой цепочки вычислений будет уменьшаться. Этих усложнений решения дисперсионного уравнения (5.40) удастся избежать используя преобразования правой части в (5.40), которые аналогичны найденным в работе [20]. Для этого заметим, что согласно (5.42), выполняются равенства:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{m} \int_0^\infty dx e^{-x} V(x) p_m^{(-)}(x) = -\frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{dx}{x^m} \frac{d}{dx} \left(x^{m+1} \frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} \right) \\ &= -\frac{1}{m} \left(x \frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} \right)_{x=\infty} - \int_0^\infty dx \frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} \\ &= -\frac{1}{m} \left(x \frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} \right)_{x=\infty} - p_m^{(-)}(\infty) + 1. \end{aligned}$$

При больших амплитудах колебаний ($x \rightarrow \infty$) правая часть уравнения (5.42) стремится к нулю. Поэтому его решения в такой асимптотической области записываются в виде

$$\frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} = \frac{C}{x^{m+1}}, \quad p_m^{(-)}(x) = C_1 + \frac{C}{(m+1)x^m},$$

где C и C_1 – произвольные функции z_1 . Используя эти асимптотики, находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{dp_m^{(-)}(x)}{dx} \right) = 0. \quad (5.46)$$

Это позволяет записать дисперсионное уравнение (5.40) в более простой форме:

$$p_m^{(-)}(z_1, \infty) = 0. \quad (5.47)$$

Таким образом, вычисление собственных частот z_1 сводится к поиску корней собственных функций задачи, рассматриваемых как функции z_1 и x , в бесконечно удаленной точке $x \rightarrow \infty$. Это обстоятельство существенно облегчает процедуру определения собственных частот и условий устойчивости когерентных колебаний встречных сгустков в рамках описанной модели.

Аналогичные вычисления для моды (+) приводят к дисперсионному уравнению

$$p_m^{(+)}(z_1, \infty) = 0, \quad (5.48)$$

в котором $p_m^{(+)}(x) = w^{(+)}(x)/x$, а функция $w^{(+)}(x)$ удовлетворяет уравнениям, получающимся после замены в (5.44), (5.45) функции $V(x)$ на $-V(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w^{(\pm)}}{dx^2} + \frac{(m-1)}{x} \frac{dw^{(\pm)}}{dx} - \frac{(m-1)}{x^2} w^{(\pm)} \\ = \mp \frac{e^{-x}}{x} V(x) w^{(\pm)}(x). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Согласно уравнениям (5.39), или (5.49) и (5.45) для функций $p_m^{(\pm)}(z_1, x)$ выполняется асимптотическое условие

$$\lim_{|z_1| \rightarrow \infty} p_m^{(\pm)}(z_1, \infty) = 1. \quad (5.50)$$

Оно означает, что корни дисперсионных уравнений (5.47) и (5.48) могут находиться только внутри ограниченной области, окружающей начало координат плоскости комплексной переменной z_1 .

Отметим, что для собственных значений z_1 , находящихся вне спектров некогерентных колебаний частиц ($z_1^2 > \delta^2(0)$), уравнения (5.49), (5.48) и (5.47) могут иметь решения с собственными значениями такими, что $\text{Re} z_1 \neq 0$, а $\text{Im} z_1 = 0$. Они описывают незатухающие когерентные колебания встречных сгустков. Отсутствие затухания Ландау мод в указанной области параметров заранее очевидно. Оно связано с отсутствием в спектрах сгустков частиц, которые могли бы обеспечивать резонансное взаимодействие коллективных мод сгустков и некогерентных колебаний частиц. Других собственных решений в области $z_1^2 > \delta^2(0)$ нет. Напомним, что это утверждение справедливо только при условии, что в окрестности частоты ν_x , соответствующей собственному значению z_1 нет других, в том числе и неустойчивых, мод колебаний. В противном случае связь мод изменит картину колебаний и условия устойчивости мод. Выполнение этого условия облегчается при уменьшении интенсивностей (параметров ξ) сталкивающихся сгустков.

Мы ограничились вычислениями, предполагающими решение задач нахождения собственных частот и собственных функций когерентных колебаний встречных пучков. Этого достаточно для изучения условий устойчивости мод. Возможна и другая постановка задачи, когда для заданных начальных условий требуется найти зависимости амплитуд колебаний от времени. Для симметричных встречных пучков этот круг вопросов выясняется вычислениями, аналогичными описанным в работе [20].

5.4. Запрещенные полосы немонахроматических сгустков

В работе [10] с использованием методов качественного анализа решений дифференциальных уравнений было показано, что вблизи резонансов $\nu_x \simeq n/(2m)$ уравнение (5.31) всегда имеет решения с собственными значениями такими, что $\text{Re}(z_1) = 0$ и $\text{Im}(z_1) \neq 0$. Согласно уравнениям (5.42) и (5.33) собственные решения $p_m^{(\pm)}(z_1, \infty)$ яв-

ляются функциями z_1^2 . Это означает, что решения уравнений (5.49), (5.48) и (5.47) с собственными значениями $\text{Re}(z_1) = 0$ и $\text{Im}(z_1) \neq 0$ описывают неустойчивые моды. Подставив в (5.33) выражение $z_1 = \pm ir$, находим, что в таких случаях $V(x)$ является действительной функцией

$$V(x) = -\frac{2\delta(x)}{r^2 + \delta^2(x)}, \quad r = \frac{\text{Im}(\nu)}{m\xi}. \quad (5.51)$$

Соответствующие собственные функции $w^{(\pm)}(r, x)$ также являются действительными величинами. Поскольку решения уравнений (5.49), (5.47) и (5.48) не удастся найти в аналитической форме, эти уравнения должны решаться численно. Это позволяет вычислить инкременты неустойчивых мод, ширины запрещенных полос и их положения на оси частот колебаний частиц. Коэффициенты в (5.49) расходятся в точке $x = 0$. По этой причине решения уравнения (5.49) вблизи начала координат ($x \leq x_0 = 10^{-10}$) находились их разложением в ряды по степеням x . Совместно с требованием выполнения граничных условий (5.45) это позволило записать

$$\begin{aligned} w^{(\pm)}(x) = x \mp \frac{2\delta}{(r^2 + \delta^2)} \frac{x^2}{(1 + m)} \\ + \frac{4\delta^2 \pm (1 + m)(b(r^2 - \delta^2) + 2\delta(r^2 + \delta^2))}{2(r^2 + \delta^2)^2(m + 2)(1 + m)} x^3, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где $b = \Delta\nu_x(0)/\xi$. Решения уравнений (5.49) справедливые в более широкой области ($x \geq x_0$) вычислялись численным интегрированием этих уравнений с граничными значениями $w^{(\pm)}(x_0)$ и $(dw^{(\pm)}/dx)_{x=x_0}$, находившихся по формуле (5.52). Испробовав несколько больших значений x , можно найти, что решения входят в асимптотическую область $x \rightarrow \infty$, если $x \geq 80$. Изучая зависимости $p_m^{(-)}(z_1, \infty)$ от z_1 (рис. 12), можно установить, что при заданных значениях ξ и ν_x внутри запрещенной полосы дисперсионные уравнения (5.47), (5.48) могут иметь один, или несколько корней z_1 . В этой связи, для вычисления параметров запрещенных полос частот ν_x использовалась программа, которая ограничивалась вычислением мод с максимальными инкрементами. Результаты таких вычислений для мод $(\pm)$ с номерами мультипольности в диапазоне $1 \leq m \leq 5$ и номерами резонансных

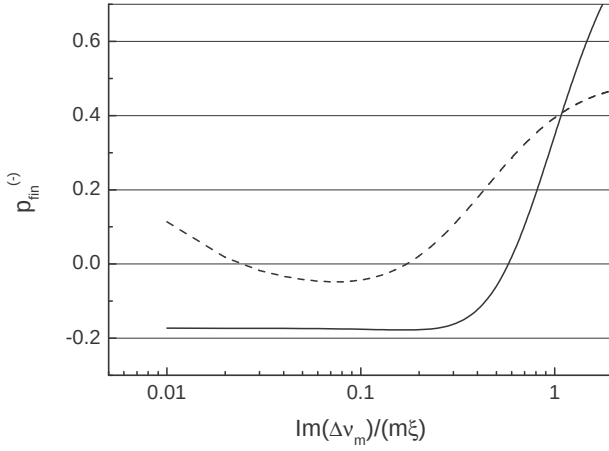


Рис. 12. Зависимость $p^{(-)}(z_1, \infty)$ от z_1 . Сплошная линия – $m = 1$, пунктирная – $m = 2$; $\xi = 0.05$. Обе кривые вычислялись для значений ν_x , которые соответствовали точке максимального инкремента

азимутальных гармоник $1 \leq n \leq 4$ изображены на рис. 13. На этом рисунке инкременты мод колебаний, начиная с нулевого значения при некотором $\nu_{x,in}^{(m,n)}$, проходят свой максимум и затем уменьшаются до нуля при некотором $\nu_{x,f}^{(m,n)}$. Разности $\Delta\nu_x^{(m,n)} = \nu_{x,f}^{(m,n)} - \nu_{x,in}^{(m,n)}$ определяют ширины запрещенных полос мод с номерами m и n , а сами кривые изображают изменения инкрементов мод внутри запрещенной полосы. Видно, что для принятого в этих вычислениях значения $\xi = 0.05$ отсутствуют запрещенные моды, которые могли бы попасть внутрь области щели в спектре частот пучка ($0 \leq \nu_x \leq 0.1$).

Кроме того, видно, что запрещенные полосы части мод на рис. 13 перекрываются. Перекрывание запрещенных полос частот мод (+) и (–) одинаковой мультипольности не нарушает исходных предположений, использовавшихся в вычислениях. То же относится к запрещенным полосам мод с номерами мультипольности отличающимися на нечетное число. В тех случаях, когда соответствующие запрещенным полосам номера мультипольности мод отличаются на четное число, такое перекрывание нарушает исходное предположение о доминантности взаимодействия диагональных гармоник когерентных

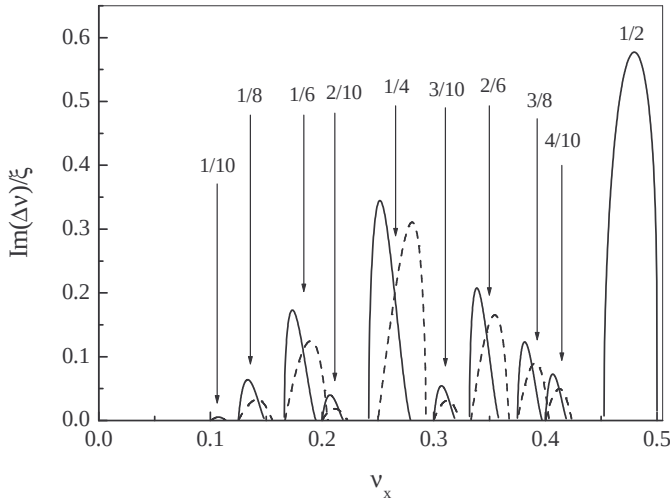


Рис. 13. Зависимости инкрементов когерентных колебаний встречных пучков от частоты горизонтальных бетатронных колебаний частиц (ν_x). Моды $1 \leq m \leq 5$, стрелки показывают положения запрещенных полос вблизи резонансов, сплошные линии – моды (-), пунктирные – моды (+), $\xi = 0.05$

колебаний сгустков. Непосредственно на рис. 13 это запрещенные полосы вблизи резонансов 1/6 и 2/10. Поэтому следует заключить, что значение $\xi = 0.05$ несколько велико для получения непротиворечивых предсказаний о устойчивости колебаний сгустков в описанном примере. Такие предсказания получаются, если мы уменьшим используемое в расчетах значение ξ . Пример деформации запрещенных полос при уменьшении величины ξ приведен на рис. 14.

Данные на рис. 13 позволяют вычислить зависимость максимальных инкрементов мод от номера мультипольности колебания. Отбирая, например, на рис. 13 полосы 1/(2m) мод (-), получаем данные, изображенные на рис. 15 точками. На этом же рисунке для сравнения приведена аналогичная зависимость, вычисленная для монохроматических встречных пучков (детали этих вычислений описаны в следующем разделе). Сравнение данных на рис. 15 позволяет заключить, что разбросы частот бетатронных колебаний, вносимые взаимодействием сгустков, а также приближение запрещенной по-

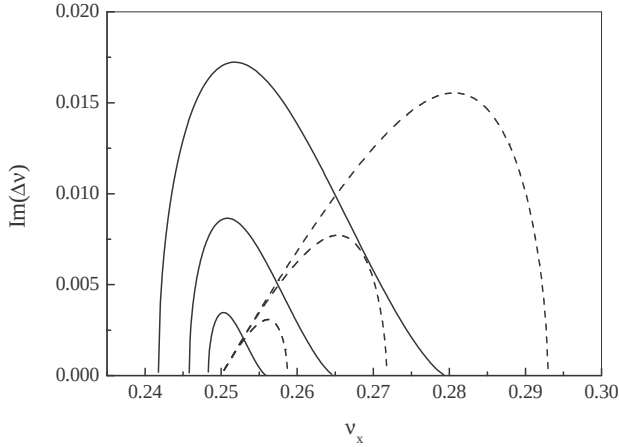


Рис. 14. Деформация запрещенных полос вблизи резонанса $\nu_x = 1/4$ при уменьшении величины параметра пространственного заряда ξ . Сплошные линии – моды $(-)$, пунктир – моды $(+)$. В каждой группе кривых сверху вниз $\xi = 0.05, 0.025$ и 0.01

лосы к щели в спектре частот некогерентных колебаний частиц, существенно уменьшают инкременты мод высокой мультипольности. Вместе с тем, обращает на себя внимание близость значений максимальных инкрементов дипольных мод, вычисленных для монохроматических и немонахроматических встречных сгустков.

Приведенный пример позволяет судить о характерных величинах инкрементов колебаний в запрещенных полосах. Вместе с тем, из рис. 13 видно, что при переходе от одной полосы к другой величины максимальных инкрементов зависят также от положения рабочей точки частот бетатронных колебаний и, вообще говоря, от номера резонансной гармоники.

На рис. 13 изображен только сегмент $0 \leq \nu_x \leq 1/2$. Запрещенные полосы для больших или меньших значений ν_x получаются периодическим переносом рисунка вдоль оси ν_x с периодом $\Delta\nu_x = 1/2$. Для дипольной ($m = 1$) моды $(+)$ не удастся найти ни одного корня дисперсионного уравнения (5.48), который бы располагался в области $0 \leq \nu_x \leq 1/2$. Это означает, что только дипольная мода $(-)$ имеет запрещенную полосу расположенную ниже резонанса $\nu_x = 1/2$. За-

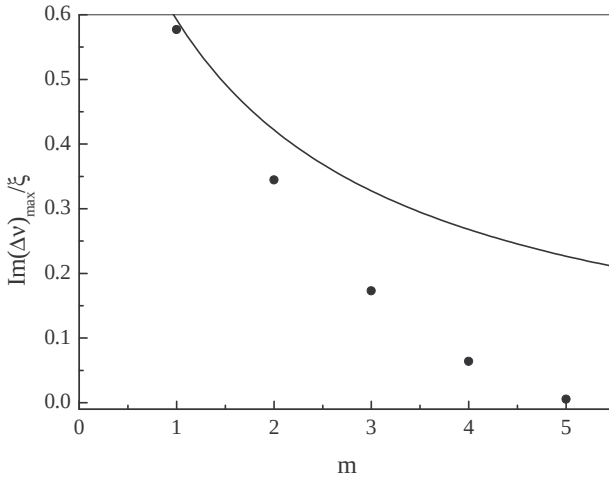


Рис. 15. Зависимость максимальных инкрементов мод от номера мультипольности моды (точки). Сплошная линия – то же для монохроматических сгустков, $\xi = 0.05$

препущенная полоса моды $(-, 2)$ начинается немного ниже резонанса $\nu_x = 1/4$. Положения нижних границ всех остальных запрещенных полос оказались близкими положению резонансов $\nu_x = n/(2m)$.

В согласии с формулой (5.30) численное изучение показало, что уменьшение параметра пространственного заряда ξ вызывает уменьшение инкрементов мод колебаний ($\text{Im}\nu$) и ширин запрещенных полос вдоль оси ν_x . Тем не менее отношения $\text{Im}\nu/\xi$ и ширин к ξ остаются неизменными.

5.5. Запрещенные полосы монохроматических сгустков

Влияние затухания Ландау на устойчивость когерентных колебаний встречных пучков изучалось сравнением запрещенных полос по частотам ν_x , вычисленными для немонахроматических сгустков, с теми, что получаются при расчете с использованием функций распределения f_0 , определенных формулой (5.23), и предположения о равенстве нулю разброса частот бетатронных колебаний за счет нелинейности полей пространственного заряда встречных сгустков.

Легко видеть, что моды такого монохроматического пучка описываются интегральным уравнением (5.31):

$$X_m^{(\pm)}(x) = \mp e^{-x} \int_0^\infty dx_1 V(x_1) K_m(x, x_1) X_m^{(\pm)}(x_1), \quad (5.53)$$

в котором следует положить

$$V(x) = \frac{1}{z_1 - \delta} - \frac{1}{z_1 + \delta}. \quad (5.54)$$

Величина z_1 определена формулой (5.30), а значение расстройки от резонанса

$$\delta = \frac{1}{\xi} \left(\nu_x - \frac{n}{2m} \right) \quad (5.55)$$

не зависит от x . Ядро $K_m(x, x_1)$ в (5.53) определено формулой (5.36). Обозначив в качестве нового собственного значения выражение

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{z_1 - \delta} - \frac{1}{z_1 + \delta} \quad (5.56)$$

и используя подстановку

$$X_m^{(\pm)}(x) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right) P_m^{(\pm)}(x), \quad (5.57)$$

преобразуем (5.53) в интегральное уравнение с симметричным ядром

$$\begin{aligned} \Lambda P_m^{(\pm)}(x) &= \mp e^{-x/2} \int_0^\infty dx_1 e^{-x_1/2} P_m^{(\pm)}(x_1) \\ &\times 2 \int_0^\infty \frac{J_m(k\sqrt{x}) J_m(k\sqrt{x_1})}{k} dk. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Поскольку выполнено неравенство

$$2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left(\int_0^\infty dx e^{-\frac{x}{2}} J_m(k\sqrt{x}) P_m^{(\pm)}(x) \right)^2 > 0,$$

собственные значения Λ уравнения (5.58) являются действительными, положительными числами для мод $(-)$. Для мод $(+)$ собственными числами являются отрицательные величины $-\Lambda$. Поэтому для

монохроматических встречных пучков собственные частоты коллективных мод определяются уравнениями:

$$z_1^2 = \delta^2 \pm 2\Lambda\delta = (\delta \pm \Lambda)^2 - \Lambda^2, \quad (5.59)$$

в которых знак $+$ берется для моды $(-)$, а Λ – одно из собственных чисел интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \Lambda P_m^{(-)}(x) = e^{-\frac{x}{2}} \int_0^\infty dx_1 e^{-\frac{x_1}{2}} P_m^{(-)}(x_1) \\ \times 2 \int_0^\infty \frac{J_m(k\sqrt{x}) J_m(k\sqrt{x_1})}{k} dk. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Используя формулу (5.36) и подстановку $P_m^{(-)}(x) = e^{-x/2}P(x)$, пишем

$$\begin{aligned} \Lambda P(x) = \frac{1}{mx^{m/2}} \int_0^x dx_1 x_1^{m/2} e^{-x_1} P(x_1) \\ + \frac{x^{m/2}}{m} \int_x^\infty dx_1 \frac{e^{-x_1} P(x_1)}{x_1^{m/2}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Подставляя в (5.61) $P(x) = x^{m/2}p(\Lambda, x)$, находим, что функция $p(\Lambda, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Lambda p(\Lambda, x) = \frac{1}{mx^m} \int_0^x dx_1 x_1^m e^{-x_1} p(\Lambda, x_1) \\ + \frac{1}{m} \int_x^\infty dx_1 e^{-x_1} p(\Lambda, x_1), \end{aligned} \quad (5.62)$$

а собственные значения Λ вычисляются решением дисперсионного уравнения

$$p(\Lambda, \infty) = 0, \quad (5.63)$$

Используя подстановку $p(\Lambda, x) = w(x)/x$, находим, что $w(x)$ вычисляется решением следующего дифференциального уравнения:

$$w'' + \frac{m-1}{x}w' - \frac{m-1}{x^2}w = -\frac{e^{-x}}{\Lambda x}w(x), \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1. \quad (5.64)$$

Отметим, что согласно (5.61) при заданном значении m сумма всех собственных значений Λ равна $1/m$.

Величины Λ находятся численным интегрированием уравнения (5.64) и последующим численным решением дисперсионного уравнения (5.63). Результаты этих вычислений ясно указывают на существование у уравнения (5.62) хорошо определенной моды основного состояния, которому соответствует максимальное собственное значение Λ (рис. 16). Этот же рисунок ясно показывает, что у мо-

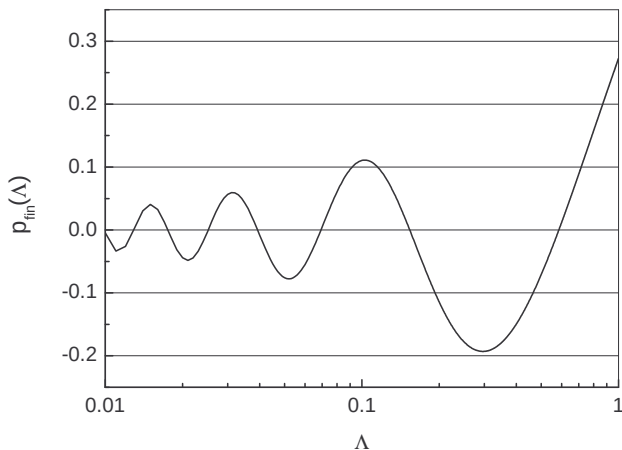


Рис. 16. Зависимость $p(\Lambda, \infty)$ от Λ для, например, $m = 1$, первый корень функции $p(\Lambda, \infty)$ определяет собственное значение $\Lambda_{\max}$

нохроматического пучка с гладким распределением по амплитудам бетатронных колебаний кроме основной моды имеются моды более высокого порядка (т. н. высшие радиальные моды в пространстве амплитуд бетатронных колебаний). Мы пронумеруем эти моды номером k так, что значение $k = 0$ будет обозначает основную моду, а следующие значения $k = 1, 2, \dots$ будут обозначать более высокие моды в порядке убывания величин собственных значений Λ_k . Хотя мы и не приводим соответствующие графики, но согласно общим теоремам анализа (например, в [21]) можно утверждать, что номер моды k определяет число корней собственной функции моды на интервале $0 \leq x < \infty$. Так, мода $k = 0$ не имеет таких корней, мода $k = 1$ имеет один корень и т. д.

Используя данные, приведенные на рис. 16, можно восстановить зависимость собственных значений Λ (для дипольных колебаний) от номера радиальной моды k (рис. 17). Простая подгонка показывает,

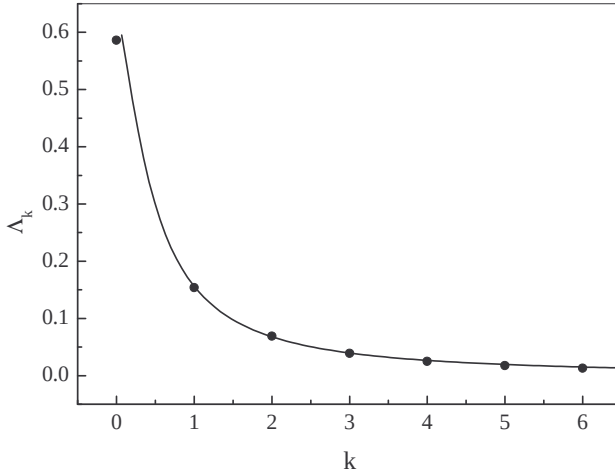


Рис. 17. Зависимость собственных значений Λ_k от номера радиальной моды k для первых 6-ти мод (точки). Сплошная линия – подгонка по формуле (5.65), $m = 1$

что уменьшение Λ_k с ростом k с хорошей точностью описывается формулой

$$\Lambda_k = \frac{0.63}{1 + (k/0.466)^{1.45}}. \quad (5.65)$$

При вычислении параметров запрещенных полос частот эти детали не очень важны, поскольку оказывается, что все запрещенные полосы высших мод оказываются вложенными в запрещенную полосу основной моды.

Для частот вне запрещенной полосы амплитуды колебаний монохроматических сгустков не нарастают. В таком случае благодаря вкладам высших мод в спектры когерентных колебаний встречных пучков когерентные сигналы становятся многочастотными с концентрацией собственных частот колебаний вблизи центральной частоты моды $m\nu_x$. Такие спектры могут наблюдаться, например, в коллайдерах с компенсированными встречными пучками. Мы еще вернемся

к обсуждению такой возможности. Появление высших радиальных мод колебаний является основным признаком структуры мод когерентных колебаний пучков с гладкими распределениями по амплитудам колебаний частиц.

Уравнения (5.60) или (5.61) являются однородными интегральными уравнениями с симметричными и положительно определенными ядрами. Собственные числа и собственные функции таких уравнений обладают свойством экстремальности [21]. Это означает, что, если, например, выбрать функции $P(x)$ так, чтобы они были нормированы на единицу:

$$\int_0^\infty dx P^2(x) = 1 \quad (5.66)$$

и составить функционал

$$D = 2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left(\int_0^\infty dx e^{-\frac{x}{2}} J_m(k\sqrt{x}) P(x) \right)^2, \quad (5.67)$$

то при вариациях $P(x)$ значение функционала D достигает максимального значения в том случае, когда $P(x)$ совпадает с одной из собственных функций уравнения (5.60). Значение D в этом случае совпадает с соответствующим собственным числом Λ .

Для приближенного вычисления $\Lambda_{\max}$ основного состояния выберем в качестве пробной функции этого состояния выражение:

$$P(x) = \sqrt{\frac{a}{m!}} (ax)^{m/2} e^{-\frac{ax}{2}}. \quad (5.68)$$

где a – параметр поиска. При выборе этой функции мы учитывали ожидаемые асимптотические свойства решений уравнения (5.60), а также то обстоятельство, что искомая функция не должна иметь корней в области $0 < x < \infty$. Подставив (5.68) в (5.67) и вычисляя

пробное собственное значение ³

$$\begin{aligned}
 \Lambda(a) &= \frac{2a^{m+1}}{m!} \int_0^\infty dx x^{m/2} e^{-x(a+1)/2} \\
 &\times \int_0^\infty dx_1 x_1^{m/2} e^{-x_1(a+1)/2} \int_0^\infty \frac{J_m(k\sqrt{x}) J_m(k\sqrt{x_1})}{k} dk \\
 &= \frac{4}{m} \frac{a^{m+1}}{(a+1)^{m+2}}, \tag{5.69}
 \end{aligned}$$

выберем величину a так, чтобы функция $\Lambda(a)$ достигала максимума. Поскольку

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Lambda}{da} &= \frac{4}{m} \frac{a^m}{(a+1)^{m+3}} ((m+1)(a+1) - (m+2)a) \\
 &= \frac{4}{m} \frac{a^m}{(a+1)^{m+3}} ((m+1) - a) = 0,
 \end{aligned}$$

функция $\Lambda(a)$ максимальна в точке

$$a = m + 1. \tag{5.70}$$

Само значение $\Lambda_{\max}$ при этом равно

$$\Lambda_{\max} = \frac{4}{m} \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+2)^{m+2}},$$

или

$$\Lambda_{\max} = \frac{4}{m(m+2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}. \tag{5.71}$$

Заметим, что при больших значениях номеров мультипольности ($m \gg 1$) величина $\Lambda_{\max}$ уменьшается пропорционально $1/m^2$. Такие значения $\Lambda_{\max}$ хорошо согласуются с результатами, полученными численным решением уравнений (5.64) и (5.63) (например, на рис. 18).

По этой причине ширины запрещенных полос частот ν_x и максимальные инкременты неустойчивых мод вычислялись подставляя в

³Для этого можно воспользоваться, например, формулой (5.36).

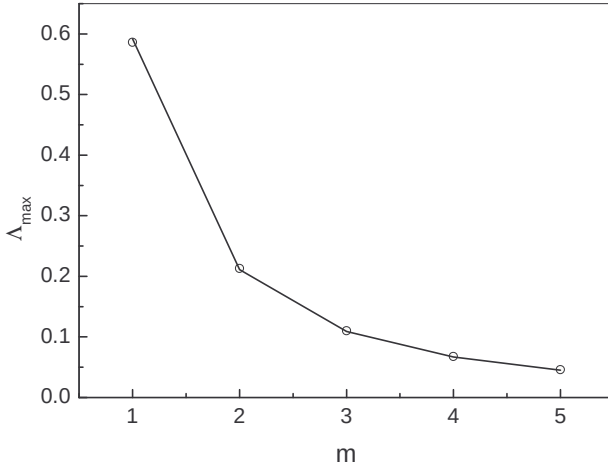


Рис. 18. Зависимость $\Lambda_{\max}$ от номера мультипольности когерентных колебаний m ; окружности – используя численное решение уравнений (5.64) и (5.63), сплошная линия – используя уравнение Eq.(5.71)

(5.59) значения $\Lambda_{\max}$, полученные по формуле (5.71). Инкременты колебаний $r = \text{Im}\nu/\xi$ достигают максимальных значений $r_{\max} = m\Lambda_{\max}$ для величин относительных расстройек (δ) равных $\delta = -\Lambda_{\max}$ для мод (–) и для $\delta = \Lambda_{\max}$ для мод (+). Для мод (–) запрещенные полосы частот ν_x лежат ниже резонансов $-2\Lambda_{\max} \leq \delta \leq 0$, а для мод (+) – выше резонансов $0 \leq \delta \leq 2\Lambda_{\max}$. Согласно уравнениям (5.59), (5.71) и (5.19) дипольная мода (+) устойчива, если величина ξ имеет реалистичное значение (именно, если $\xi < 0.2872$).

5.6. Антизатухание Ландау коллективных мод встречных пучков

Сравнение запрещенных полос немонохроматических и монохроматических встречных сгустков позволяет выяснить нетривиальный характер действия разброса частот бетатронных колебаний частиц на устойчивость когерентных колебаний встречных пучков. В традиционных условиях мы могли бы ожидать подавления неустойчивостей, или уменьшения их инкрементов затуханием Ландау мод (см., например, в [17]) тем более, что величины когерентных сдвигов ча-

стот мод в динамических неустойчивостях равны нулю. В случае

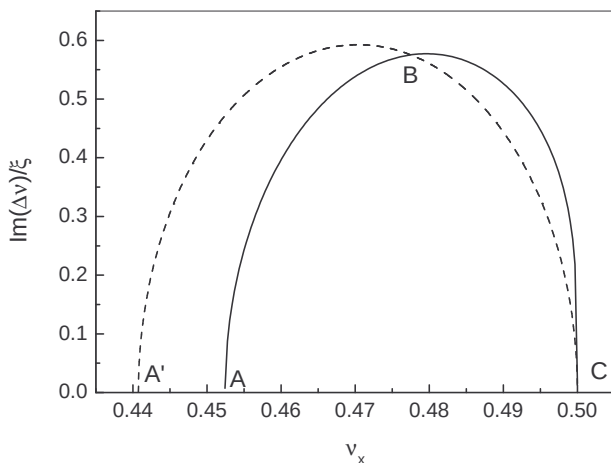


Рис. 19. Зависимость инкремента дипольной моды (—) от частот горизонтальных некогерентных колебаний ν_x . Сплошная линия – немонохроматические сгустки, пунктир – монохроматические сгустки

когерентных колебаний встречных пучков это, вообще, не так. Оказывается [10], что при сколь угодно малых значениях параметра пространственного заряда ξ среди мод колебаний обязательно находятся неустойчивые.

Как и для традиционных неустойчивостей, действие разброса частот на когерентные колебания зависит от номера мультипольности моды. Изучая поведения кривых, изображенных на рис. 19, мы обнаруживаем, что для дипольной моды встречных пучков (—) затухание Ландау весьма слабо изменяет ширину запрещенной полосы и инкременты по сравнению с соответствующими величинами, вычисленными для столкновений монохроматических сгустков. Так, величины максимальных инкрементов почти совпадают. Затухание Ландау подавляет когерентные колебания в узкой полосе частот $A'A$ и уменьшает инкременты колебаний в сегменте AB . В сегменте BC разброс частот из-за нелинейностей полей встречных сгустков несколько увеличивает инкременты неустойчивых мод, что указывает на по-

явление некоторого антизатухания Ландау когерентных колебаний сталкивающихся сгустков в этой области частот.

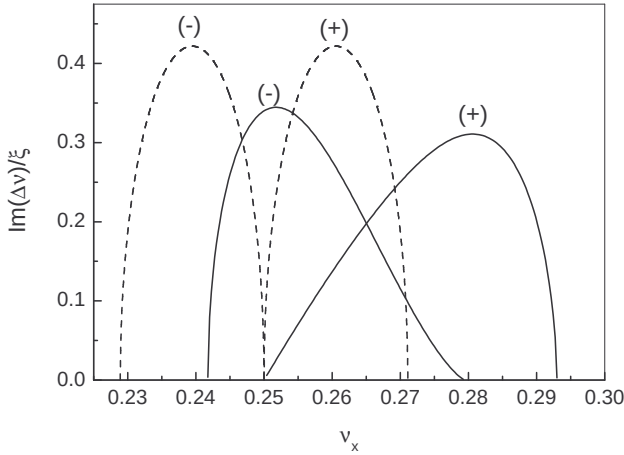


Рис. 20. Запрещенные полосы вблизи резонанса $1/4$. Сплошная линия – немонохроматические сгустки, пунктир – монохроматические сгустки; символы $(\pm)$ отмечают кривые, относящиеся к модам $(\pm)$

Более сильное антизатухание Ландау проявляют моды с большей мультипольностью бетатронных когерентных колебаний ($m \geq 2$). В качестве иллюстрации рассмотрим два примера распределения инкрементов мод в запрещенных полосах частот показанные на рис. 20 и 21. Видно, что уменьшение максимальных инкрементов мод разбросом частот, вообще, невелико. Оно составляет примерно 25% для квадрупольных мод ($m = 2$) и примерно 50% для секступольных ($m = 3$). Главным результатом действия разброса частот на колебания является смещение положений нижних границ запрещенных полос вдоль оси ν_x к резонансам $n/(2m)$ и существенное увеличение ширин запрещенных полос. Исключая случай $m = 2$, запрещенные полосы мультипольных мод немонохроматических сгустков почти полностью располагаются выше резонансных значений частот. Отсюда можно заключить, что разбросы частот из-за нелинейностей полей в МВ, подавляя моды монохроматических встречных пучков, определяют новые широкие области частот ν_x , в которых когерентные колебания сгустков оказываются неустойчивыми. Таким обра-

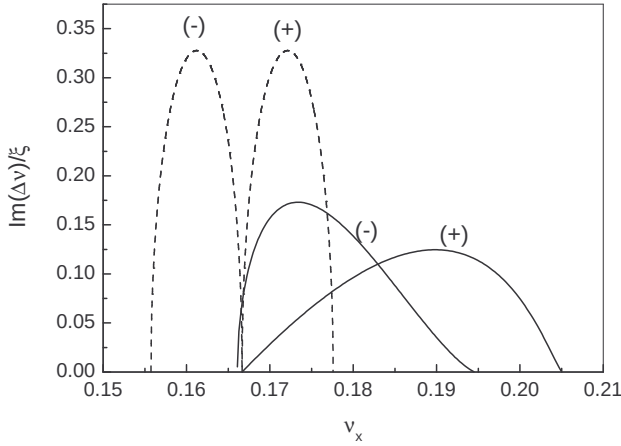


Рис. 21. То же, что на рис. 20, но вблизи резонанса $1/6$

зом, разброс частот бетатронных колебаний в сгустках вместо затухания приводит к антизатуханию Ландау когерентных колебаний.

Описанное явление антизатухания Ландау внутренне присуще когерентным эффектам встречи. Эти неустойчивости появляются из-за связи мод сгустков с мультипольностями m и $-m$ вблизи суммового резонанса $m(\nu_x^{(1)} + \nu_x^{(2)}) = 2m\nu_x = n$. В соответствии с общими свойствами таких неустойчивости [22] они могут подавляться только такими механизмами, которые обеспечивают достаточно сильное затухание обеих связанных мод. В противном случае вносимое демпфирование будет приводить к раскачке когерентных колебаний [22].

Смещения положений запрещенных полос частот колебаний разбросами частот встречных сгустков, в определенном смысле, предсказывается формулами (4.76). Для столкновений симметричных сгустков в этих формулах следует положить $m_1 = m$, $m_2 = -m$ и $\nu_y^{(1)} = \nu_y^{(2)} = \nu_y$. Отметим, что вне запрещенной полосы сдвиги частот мод $(\pm)$ в (4.76) отрицательны относительно частоты $m\nu_y$ и положительны относительно частоты $-m\nu_y$. Поскольку некогерентные сдвиги частот положительны ($e^+e^- = -e^2$), для сгустков с гладкими распределениями по амплитудам колебаний частиц частоты мод вне запрещенной полосы монохроматических сгустков попадают в спек-

тры их некогерентных колебаний. Это может приводить к затуханию Ландау мод при условии, что вносимые декременты затухания Ландау достаточно велики. Если же декременты затухания Ландау колебаний с номерами мультипольности $\pm m$ оказываются малыми, то согласно, например, формуле (4.82) разбросы частот некогерентных колебаний будут приводить к антизатуханию мод.

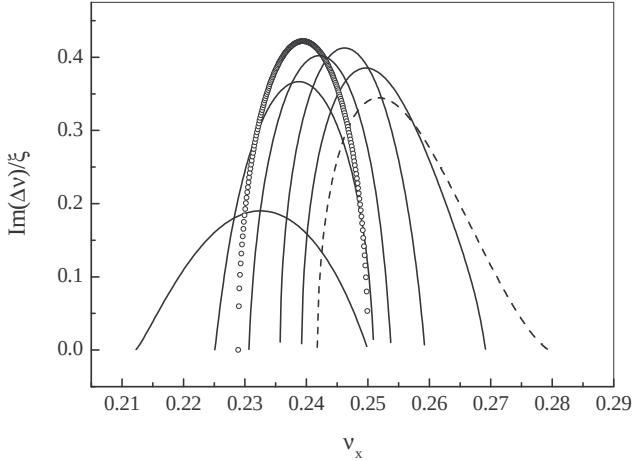


Рис. 22. Изменения запрещенных полос моды (—) оступольными полями вблизи частоты $\nu_x = 1/4$. Сплошные линии справа на лево: $a/\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.8$; пунктир — $a = 0$, окружности — запрещенная полоса монохроматических сгустков, $\xi = 0.05$

В реальных машинах нелинейности полей сгустков в МВ обычно сопутствуют нелинейные зависимости фокусирующих сил от поперечных координат частиц. В общем случае, они изменяют разбросы частот в сгустках и могут влиять на затухание Ландау мод встречных пучков.

Для демонстрации значимости этих эффектов мы рассмотрим простейший случай, когда действие таких нелинейностей может быть описано заменой частот $\nu_x(x)$ на $\nu_x(x) + ax$, где добавка ax может, например, описывать действие на частицы октупольных полей фокусирующей системы. Численное исследование влияния такой замены на спектры когерентных колебаний встречных пучков показывает, что октупольные поля, вообще, не уничтожают обсуждавшееся ан-

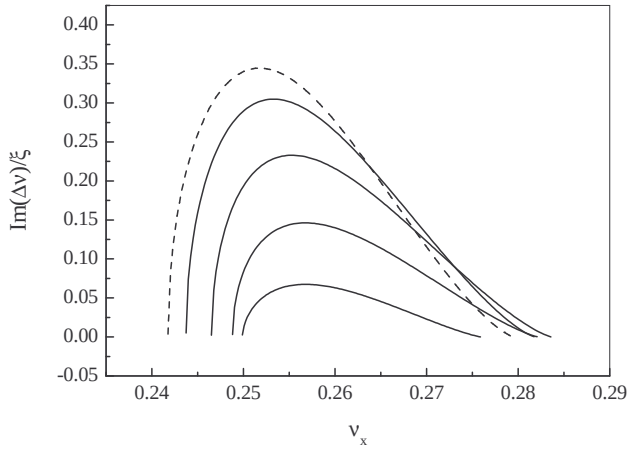


Рис. 23. То же, что на рис. 22, но сверху вниз $a/\xi = -0.1, -0.3, -0.6, -1$; пунктир — $a = 0$

тизатухание Ландау (рис. 22 и 23). Однако, они могут уменьшать инкременты неустойчивых мод при правильном выборе знака величины a . Для обсуждаемого здесь случая $e_1 e_2 = -e^2$ такая зависимость инкрементов когерентных колебаний от знака a не является неожиданной. Легко видеть, что для накопителей с фокусировкой, обеспечивающей $a > 0$, частоты некогерентных колебаний частиц являются немонотонными функциями их амплитуд бетатронных колебаний. При таком ходе кривой $\nu_x(x)$ в спектрах сгустков есть области частот, в которых моды одновременно оказываются в резонансе с частицами больших и малых амплитуд. Обмен энергиями таких групп частиц, вообще, может приводить к дополнительному антизатуханию Ландау [22].

Если величина a отрицательна, то частота $\nu_x(x)$ монотонно убывает с ростом амплитуд колебаний частиц. Такой ход зависимости $\nu_x(x)$ не приводит к дополнительному антизатуханию Ландау когерентных колебаний.

6. Компенсированные встречные пучки

Борьба с ограничениями из-за неустойчивостей встречных пучков, всегда занимала, да и теперь занимает, умы исследователей, занятых физикой и техникой коллайдеров. Одно из решений, которое, как ожидалось, могло бы позволить снять эти ограничения, было предложено в работе [23]. Оно предполагало, что главное ограничение светимости установок со встречными пучками обусловлено неустойчивостями некогерентных колебаний частиц сгустков, которое появляется в МВ за счет полей пространственного заряда встречного пучка. В таком случае, действие на колебания нелинейных резонансов в конечном счете приводит к транспортировке частиц в области больших амплитуд колебаний и к соответствующему снижению светимости установки. Поэтому в работе [23] предлагалось кардинально решить проблему – устранить возмущение сведением в МВ двух пар сгустков так, чтобы с каждой стороны в столкновении участвовали бы, например, электронный и позитронный сгустки (рис. 24). При равенстве чисел частиц и размеров сгустков в МВ их

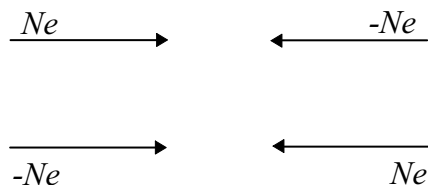


Рис. 24. Схематическое изображение сведения сгустков для компенсации их полей пространственного заряда в МВ. Числа частиц и размеры сгустков каждой пары совпадают; разведения сгустков пар в МВ, показанное здесь для наглядности, в реальных схемах отсутствуют

пространственные заряды взаимно компенсируют друг друга. Точная компенсация полей сгустков в МВ полностью устраняет ограничения параметров сгустков из-за неустойчивостей некогерентных колебаний частиц и тем решает проблему увеличения светимости установки. Более того, поскольку в столкновениях участвуют сгустки частиц и античастиц, то для реакций, вероятности которых нечув-

ствительны к знакам зарядов сталкивающихся частиц, в установках с компенсированными встречными пучками можно было бы ожидать удвоения полной светимости.

Это предложение вызвало значительный интерес ускорительного сообщества. Для проверки метода в исследовательском центре ORSE (Франция) была построена установка, получившая название DCI. Несколько раньше Я. С. Дербеневым было указано, что производительность такого коллайдера может ограничиваться спонтанным разведением сгустков в МВ, то есть неустойчивостью их когерентных колебаний [7]. Последующий запуск установки DCI и изучение на ней эффектов встречи, по существу, подтвердил предсказания работы [7]. Ожидавшегося заметного увеличения светимости на установке DCI достигнуто не было. Тем не менее, до сих пор время от времени появляются работы по изучению различных возможностей компенсации неустойчивостей встречных пучков.

К настоящему времени у этой задачи появилось еще одно несколько неожиданное и, в определенном смысле, дидактическое приложение. Компенсация в МВ полей пространственного заряда сталкивающихся сгустков устраняет неоднозначности в описании их стационарных состояний. Это позволяет провести расчет устойчивости линейных когерентных колебаний без дополнительных предположений.

6.1. Вертикальные когерентные колебания компенсированных ленточных пучков

Для упрощения вычислений мы предположим, что, за исключением зарядов, равны параметры всех сталкивающихся сгустков. Это означает, что мы снова будем изучать столкновения симметричных сгустков. С той же целью, мы предположим, что сгустки имеют в МВ ленточную геометрию, а функции распределения их стационарных состояний определяются формулами (4.30) и (4.31):

$$f_0(I_y) = \frac{\delta(p_x)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x I_0} \begin{cases} 1, & I_y \leq I_0, \\ 0, & I_y > I_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Повторяя вычисления раздела 4.1.2., убеждаемся в том, что в пренебрежении вкладами недиагональных номеров мультипольности

амплитуды вертикальных когерентных колебаний сталкивающихся сгустков находятся решением уравнений:

$$X_m^{(1,1)} = K_m \frac{2\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} \left(X_m^{(2,1)} - X_m^{(2,2)} \right), \quad (6.2)$$

$$X_m^{(1,2)} = -K_m \frac{2\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} \left(X_m^{(2,1)} - X_m^{(2,2)} \right), \quad (6.3)$$

$$X_m^{(2,1)} = K_m \frac{2\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} \left(X_m^{(1,1)} - X_m^{(1,2)} \right), \quad (6.4)$$

$$X_m^{(2,2)} = -K_m \frac{2\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} \left(X_m^{(1,1)} - X_m^{(1,2)} \right). \quad (6.5)$$

Здесь $X_m^{(i,j)}$ – приведенные амплитуды колебаний сгустков i и j , учтено, что заряды сгустков попарно имеют противоположные знаки, а

$$K_m = \frac{8/\pi}{(4m^2 - 1)}. \quad (6.6)$$

Из этих уравнений следует, что $X_m^{(1,1)} = -X_m^{(1,2)}$, а $X_m^{(2,1)} = -X_m^{(2,2)}$. Поэтому пишем

$$X_m^{(1,1)} = K_m \frac{4\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} X_m^{(2,1)}$$

$$X_m^{(2,1)} = K_m \frac{4\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} X_m^{(1,1)}.$$

Определив теперь

$$X_m^{(\pm)} = X_m^{(1,1)} \pm X_m^{(2,1)}, \quad (6.7)$$

убеждаемся, что амплитуды $X_m^{(\pm)}$ удовлетворяют несвязанным уравнениям

$$X_m^{(\pm)} = \pm K_m \frac{4\pi\xi_y m \sin(2\pi m\nu_y)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_y)} X_m^{(\pm)},$$

а собственные частоты мод определяются формулами ($m > 0$)

$$\cos 2\pi\nu_m^{(\pm)} = \cos(2\pi m\nu_y) \pm \frac{8}{\pi} \frac{4\pi\xi_y m}{4m^2 - 1} \sin(2\pi m\nu_y). \quad (6.8)$$

Поскольку речь идет о компенсированных встречных пучках, во всех этих уравнениях ν_y – значение частоты невозмущенных бетатронных колебаний частиц. Границы области устойчивости мод определяются условием $|\cos 2\pi\nu_m^{(\pm)}| \leq 1$. Причем знак равенства выполняется на пороге неустойчивости. Используя (6.8) устанавливаем, что условие $\cos 2\pi\nu_m^{(\pm)} < 1$ выполняется для обеих мод при всех значениях ξ_y и ν_y , а условие $-1 \leq \cos 2\pi\nu_m^{(\pm)}$ выполняется лишь для тех значений ξ_y , которые не превышают пороговые значения. Для моды (+) порог неустойчивости когерентных колебаний достигается, когда

$$\xi_y = \xi_{th}^{(+)} = \frac{\pi}{8} \frac{4m^2 - 1}{4\pi m} \tan(\pi m \nu_y), \quad (6.9)$$

а для моды (–), когда

$$\xi_y = \xi_{th}^{(-)} = \frac{\pi}{8} \frac{4m^2 - 1}{4\pi m} \cot(\pi m \nu_y). \quad (6.10)$$

Обращает на себя внимание подобие граничных кривых $\xi_y^{(\pm)}(\nu_y)$ с теми, которые получаются при изучении, например, устойчивости колебаний электрон-электронных и электрон-позитронных встречных пучков. Этот факт, сам по себе, не удивителен, поскольку в пренебрежении взаимодействием сгустков в каждой из пар, когерентные колебания в компенсированных пучках развиваются так, как если бы каждый из сгустков пары одновременно взаимодействовал с одноименно заряженным и с противоположно заряженным сгустком. В первом случае и при компенсации сдвигов частот частиц пороговое условие определяется выражением (6.9), во втором – выражением (6.10) (рис. 25). Даже если бы мы могли ограничиться изучением лишь дипольных колебаний сгустков (например, если бы задача решалась в модели жестких сгустков), то как видно из рис. 25, требование одновременной устойчивости мод (+) и (–) сразу исключает из возможных большие области частот бетатронных колебаний. Таких как область ВЕ для сгустков с противоположными зарядами и область ВС для одноименно заряженных сгустков. Таким образом, требование компенсации пространственного заряда сгустков сужает область устойчивости дипольных когерентных колебаний до обла-

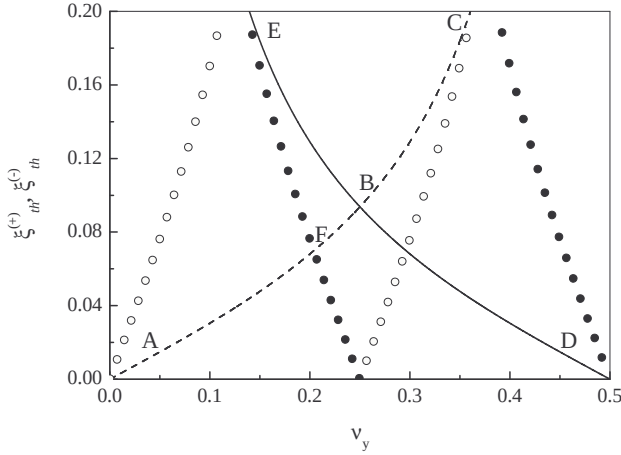


Рис. 25. Примеры зависимостей пороговых значений ξ от частоты бета-тронных колебаний частиц. Сплошная и пунктирная линии – дипольные когерентные колебания, точки и окружности – квадрупольные колебания

сти, обозначенной на рис. 25 буквами ABD. Максимально допустимое значение ξ в этой области приходится на точку В и составляет $\xi = 3/32 \simeq 0.094$. Сама по себе эта цифра довольно велика. Она сравнима с достигнутыми величинами параметра пространственного заряда на установке КЕКВ (Цукуба, Япония; некомпенсированные встречные пучки). Однако, если вспомнить, что одновременно с дипольными следует также удовлетворить условия устойчивости квадрупольных мод (например, на рис. 25) и других мод более высокой мультипольности, то общее пороговое значение ξ уменьшится. Например, на рис. 25 совпадение порогов дипольной моды (+) и квадрупольной моды (−) приходится на частоту $\pi\nu_y = \arctan(\sqrt{5}/3)$ (точка F на рис. 25). В этом случае пороговое значение ξ равно $\sqrt{5}/32 \simeq 0.07$. Суммарная диаграмма устойчивости для мод (+) и (−) с номерами мультипольности, не превышающими некоторое значение m_0 , представляет собой череду провалов от диаграммы дипольных колебаний (рис. 26) Ширины этих провалов убывают с ростом номера мультипольности. Напомним, что в центре каждого такого провала пороговое значение ξ равно нулю. Воспользовавшись уравнением (4.95) можно установить, что с увеличением номера мульти-

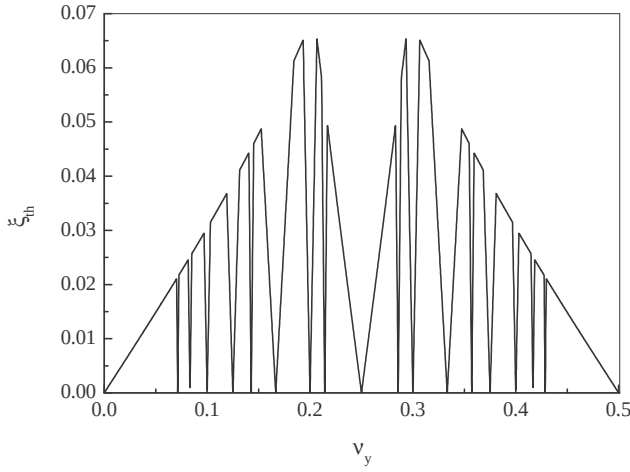


Рис. 26. Суммарная диаграмма устойчивости мод когерентных колебаний с номерами мультипольности до $m_0 = 7$

польности величины максимальных инкрементов мод убывают согласно

$$\text{Im} \left(\Delta \nu_m^{(\pm)} \right)_{\max} = \frac{8}{\pi} \frac{m \xi_y}{(4m^2 - 1)}. \quad (6.11)$$

В компенсированных встречных пучках, движущихся в кольцах с идеально линейной фокусировкой, отсутствует затухание Ландау за счет нелинейностей полей встречных сгустков. В таких условиях стабилизация когерентных колебаний может быть обусловлена охлаждением сгустков, нелинейным ограничением амплитуд когерентных колебаний, или использованием демпфирующих обратных связей. Мы обсудим возможность демпфирования мод линейных колебаний с использованием охлаждения сгустков. Если (безразмерные) декременты затухания вертикальных бетатронных колебаний частиц определяются величиной λ , то вертикальные когерентные колебания мультипольности m затухают с декрементами $m\lambda$. Это затухание будет стабилизировать неустойчивые моды сгустков, если $m\lambda$ превышает величины максимальных инкрементов мод $\text{Im}(\Delta \nu_m^{(\pm)})_{\max}$. При больших величинах декрементов все моды будут устойчивы. Обычно, однако, декременты охлаждения невелики. В таком случае требование демпфирования мод определяет граничный номер мультиполь-

ности колебаний m_0 , после которого все моды затухают. Используя (6.11), пишем

$$m_0 \simeq \sqrt{\frac{\xi_y}{\lambda}}, \quad \lambda \ll \xi_y. \quad (6.12)$$

Например, если ξ_y в сто раз превышает λ , граница области устойчивости, аналогичная изображенной на рис. 26, должна учитывать первые 9 мод.

6.2. Горизонтальные когерентные колебания компенсированных ленточных пучков

Мы упростим изучение этого случая предположив, что стационарные состояния сгустков описываются формулами (5.1) и (5.23):

$$f_0 = \frac{\delta(I_y)}{(2\pi)^2 p\epsilon} e^{-x}, \quad x = \frac{I_x}{p\epsilon}.$$

Предполагая также столкновения симметричных компенсированных пучков и пренебрегая, как прежде, в уравнениях для амплитуд когерентных колебаний вкладами недиагональных номеров мультипольности приходим к интегральным уравнениям:

$$X_m^{(1,2)}(x) = B_m e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_m(x, x_1) \left(X_m^{(2,1)} - X_m^{(2,2)} \right), \quad (6.13)$$

$$X_m^{(2,1)}(x) = -B_m e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_m(x, x_1) \left(X_m^{(2,1)} - X_m^{(2,2)} \right), \quad (6.14)$$

$$X_m^{(2,1)}(x) = B_m e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_m(x, x_1) \left(X_m^{(1,1)} - X_m^{(1,2)} \right), \quad (6.15)$$

$$X_m^{(2,2)}(x) = -B_m e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_m(x, x_1) \left(X_m^{(1,1)} - X_m^{(1,2)} \right). \quad (6.16)$$

Здесь амплитуды $X_m^{(i,j)}$ связаны с гармониками функций распределения сгустков $f_{m,n}^{(i,j)}$ соотношениями, аналогичными записанным в (5.27),

$$B_m = \frac{2\pi \xi_x m \sin(2\pi m \nu_x)}{\cos 2\pi \nu - \cos(2\pi m \nu_x)}, \quad (6.17)$$

величина ξ_x определяется формулой (5.11), а ядро $K_m(x, x_1)$ определено в формуле (5.36):

$$K_m(x, x_1) = \frac{1}{m} \begin{cases} (x/x_1)^{m/2}, & x < x_1, \\ (x_1/x)^{m/2}, & x > x_1. \end{cases}$$

Как и в предыдущем разделе убеждаемся в том, что амплитуды $X_m^{(i,j)}$ удовлетворяют соотношениям

$$X_m^{(1,2)}(x) = -X_m^{(2,1)}(x), \quad X_m^{(2,1)}(x) = -X_m^{(2,2)}(x),$$

а моды колебаний определяются комбинациями

$$X_m^{(\pm)} = X_m^{(1,1)} \pm X_m^{(2,1)},$$

которые находятся решением интегральных уравнений

$$X_m^{(\pm)}(x) = \pm \frac{4\pi\xi_x m \sin(2\pi m\nu_x)}{\cos 2\pi\nu - \cos(2\pi m\nu_x)} e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_m(x, x_1) X_m^{(\pm)}(x_1). \quad (6.18)$$

Мы уже исследовали аналогичное уравнение в связи с задачей о спектрах горизонтальных когерентных колебаний встречных монохроматических сгустков. Поэтому заметим, что если амплитуды $X_m^{(\pm)}(x)$ являются собственными функциями интегрального уравнения

$$\Lambda_m X_m^{(\pm)}(x) = e^{-x} \int_0^\infty dx_1 K_m(x, x_1) X_m^{(\pm)}(x_1), \quad (6.19)$$

а Λ_m соответствующее $X_m^{(\pm)}(x)$ собственное значение, то собственные частоты горизонтальных мод компенсированных встречных сгустков определяются формулой

$$\cos 2\pi\nu_m^{(\pm)} = \cos(2\pi m\nu_x) \pm 4\pi\xi_x m \sin(2\pi m\nu_x) \Lambda_m. \quad (6.20)$$

Напомним, что поскольку (6.19) является симметризуемым интегральным уравнением с положительно определенным ядром, все собственные значения Λ_m являются положительными числами. Если k нумерует собственные числа уравнения (6.19), то с ростом k величины $\Lambda_{m,k}$ убывают быстрее, чем $1/k$. Так, для дипольных колебаний

пучков с экспоненциальными зависимостями функций распределения от амплитуд горизонтальных бетатронных колебаний частиц зависимость $\Lambda_{1,k}$ от номера радиальной моды k определяется формулой (5.65). Все это означает, что собственные решения (6.19) имеют хорошо определенное основное состояние (см. также на рис. 16). Ширины запрещенных полосы частот колебаний ν_x пропорциональны $\Lambda_{m,k}$. При этом все запрещенные полосы мод с большими значениями k оказываются вложенными в запрещенные полосы мод основного состояния. Из рис. 18 видно, что для основного состояния величина Λ_m хорошо описывается формулой (5.71). Подставляя это выражение в (6.20), находим выражения для пороговых величин ξ_x

$$\xi_x < \xi_{th}^{(+)} = \frac{(m+2) \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{16\pi} \tan(\pi m \nu_y) \quad (6.21)$$

и

$$\xi_x < \xi_{th}^{(-)} = \frac{(m+2) \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{16\pi} \cot(\pi m \nu_y). \quad (6.22)$$

Эти выражения предсказывают несколько меньшие пороги (рис. 27) по сравнению с значениями для вертикальных колебаний. Впрочем,

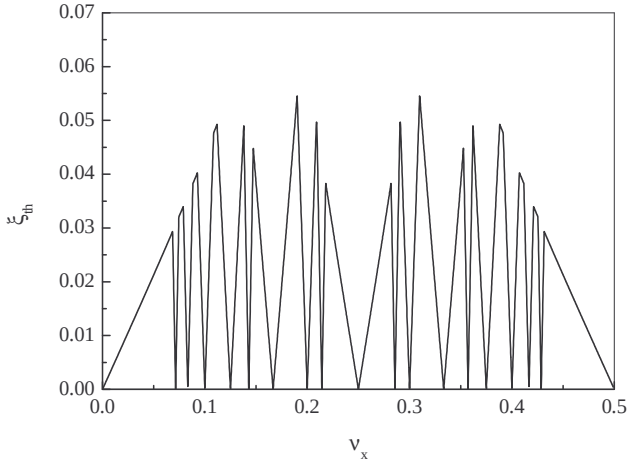


Рис. 27. То же, что на рис. 26, но для горизонтальных когерентных колебаний компенсированных встречных сгустков

такое различие может быть связано с различием использованных функций распределения стационарных состояний сгустков.

Несмотря на некоторые различия, приведенные примеры, в целом, подтверждают общие предсказания работы [7] по поводу перспектив увеличения достижимых значений параметров пространственного заряда ξ в установках с компенсированными встречными пучками. Возможные неустойчивости когерентных колебаний компенсированных встречных пучков покрывают рабочую область частот колебаний частиц густой сетью чередующихся полос, в которых колебания последовательно оказываются устойчивыми или неустойчивыми. К тому же, самосогласованные изменения размеров таких сгустков могут спонтанно нарушать выполнения желаемых условий компенсации их пространственных зарядов. Эти предсказания не противоречат результатам, полученным при запуске, настройке и эксплуатации упоминавшейся установки DCI.

7. Заключительные замечания

Мы ограничились описанием небольшого числа задач о устойчивости когерентных колебаний встречных пучков. Все они так, или иначе, появлялись в связи с попытками лучшего понимания ограничений достижимых значений светимости в коллайдерах. Следует подчеркнуть, что неустойчивости встречных пучков, обычно, являются очень быстрыми. Характерные инкременты нарастания амплитуд таких когерентных колебаний могут составлять заметную долю параметра пространственного заряда сгустков ξ . В современных машинах величина ξ приближается к 0.1. Это означает возможность развития наиболее быстрых мод колебаний за десятки или сотни оборотов пучков в машине. Вместе с тем, результаты вычислений указывают на то, что темпы развития неустойчивостей колебаний встречных пучков могут заметно уменьшаться при приближении частот колебаний частиц к параметрическим резонансам. Это обстоятельство позволяет находить приемлемые области параметров пучков и машин для обеспечения работы коллайдеров с желаемым значением светимости. Увеличение достижимых значений светимости установок с встречными пучками при приближении рабочей точки частот

к параметрическому резонансу многократно наблюдалась экспериментально.

Кулоновский характер сил, действующих на частицы в МВ подчеркивает роль когерентных колебаний высокой мультипольности, а также приводит к существенной зависимости инкрементов неустойчивостей и условий устойчивости колебаний от размеров сталкивающихся сгустков. Уменьшение инкрементов с ростом размеров сгустка может стабилизировать колебания встречных пучков. В измерениях это будет проявляться как достижение некоторого предельного значения параметра пространственного заряда ξ . В практически интересных областях частот бетатронных колебаний прямое наблюдение неустойчивых мод встречных пучков требует измерения мультипольных когерентных колебаний сгустков.

Важность изучения этих проблем постоянно возрастает с увеличением желаемых величин светимости установок. Все большую роль в проектировании современных коллайдеров приобретают исследования, включающие изучение самосогласованных изменений функций распределения сталкивающихся сгустков. В тех случаях, когда такие исследования осуществляются численным моделированием процессов, происходящих в МВ, описанные в пособии простые методы и подходы оказываются полезны для правильной интерпретации численных данных. Постановка и проведение измерений параметров встречных пучков также становится более осмысленной с использованием описанных в пособии методов.

Вместе с тем, следует помнить, что взаимодействие встречных пучков в МВ не является единственным механизмом, вызывающим неустойчивости сгустков. Как описано, например, в пособии [1] диссипативное окружение сгустков при движении между МВ может приводить к многочисленным неустойчивостям когерентных колебаний сгустков. Хотя такие неустойчивости, как правило, заметно медленнее резонансных неустойчивостей встречных пучков, пороговые токи диссипативных неустойчивостей монохроматических сгустков имеют нулевые значения. Нелинейные зависимости полей пространственного заряда сгустков в МВ от координат частиц увеличивают разбросы частот некогерентных колебаний. При благоприятных знаках когерентных сдвигов частот коллективных мод они могут попа-

дать в спектр некогерентных колебаний и тем вызывать затухание Ландау таких мод. Если же собственные частоты мод не попадают в спектр некогерентных колебаний пучка, дополнительные дисперсии частот, вносимые взаимодействием сгустков в МВ, не вызывают затухания Ландау мод. Более того, оказывается, что для встречных пучков такое увеличение разброса может приводить как к затуханию, так и к антизатуханию Ландау, характерному для резонансных неустойчивостей и неустойчивостей когерентных колебаний из-за связи мод (например, в [22], или в [1]).

Мы посчитали уместным включить в пособие упрощенное описание дипольных когерентных колебаний встречных пучков в рамках модели жестких сгустков. Исторически, эта модель одной из первых использовалась для изучения когерентных эффектов встречи (например, в [5] и [6]). Этому способствовала значительная простота описания когерентных колебаний сгустков в модели. Значительная часть предсказаний такой модели и их следствий сохраняется и при использовании более адекватных подходов. При определенной осмотριтельности, все это увеличивает дидактическую привлекательность подхода к описанию когерентных колебаний, основанного на предположении об отсутствии у сгустков внутренних степеней свободы. Напомним, что такая модель позволяет установить любопытную, хотя и довольно естественную, связь неустойчивостей дипольных когерентных колебаний сгустков с неустойчивостями колебаний частиц этих сгустков, рассчитанными в рамках модели слабого и сильного сгустков. В свою очередь, это позволяет перенести большое количество накопленных к настоящему времени "слабо-сильных" предсказаний на описание нелинейных дипольных когерентных колебаний встречных пучков. В частности, в модели жестких сгустков все запрещенные полосы частот линейных и нелинейных когерентных колебаний расположены по одну сторону от резонансного значения частоты (бетатронных) колебаний. Например, для электрон-позитронных коллайдеров это области частот невозмущенных бетатронных колебаний частиц, которые находятся ниже их резонансных значений.

Последовательное описание самосогласованного изменения состояний встречных пучков из-за их взаимодействия в МВ достигается с использованием кинетического подхода. Осуществление такой

программы в полном объеме требует решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и, по-видимому, может быть достигнуто лишь численным моделированием. Описание начальных этапов взаимодействия встречных пучков сводится к исследованию устойчивости их линейных когерентных колебаний. Хотя вычисления точных решений таких задач может быть осложнено, удастся найти упрощающие модели, в которых условия устойчивости и моды когерентных колебаний встречных пучков могут быть получены аналитическими, или полу-аналитическими методами. Основные особенности таких решений в значительной мере определяются кулоновским характером полей сгустков и резонансностью их взаимодействия.

Для сгустков с малыми величинами параметра пространственно-го заряда ξ собственные моды когерентных колебаний близки к гармоникам функций распределения по фазам колебаний частиц и, в этом смысле, характеризуются определенной мультипольностью колебаний. В виду бездиссипативности, взаимодействие пучков в МВ может приводить к неустойчивости колебаний при приближении частот колебаний частиц сгустков к суммовым резонансам. Например, если $\nu_y^{(1)}$ и $\nu_y^{(2)}$ – частоты колебаний частиц, а m_1 , m_2 и n – целые числа такие, что $m_1 m_2 > 0$, то неустойчивы моды, для которых выполняется условие $m_1 \nu_y^{(1)} + m_2 \nu_y^{(2)} = n$. В таких случаях, когерентные колебания пучков раскачиваются из-за их связи с движением частиц вдоль замкнутых орбит сгустков. Формально, этот факт описывается невозможностью выполнения резонансного условия при нулевом значении номера азимутальной гармоники возмущения n . Демпфирование когерентных колебаний вблизи суммового резонанса возможно лишь при одновременном демпфировании связанных мод. По этой причине разбросы частот колебаний частиц в сгустках могут приводить как к затуханию, так и к антизатуханию Ландау когерентных колебаний встречных пучков. Эффект антизатухания проявляется в такой деформации областей устойчивости и запрещенных полос разбросами частот колебаний частиц, при которой моды, бывшие устойчивыми при нулевых разбросах частот, оказываются неустойчивыми для немонахроматических сгустков.

Резонансные условия, описывающие связь колебаний симметричных сгустков $\nu_y^{(1)} = \nu_y^{(2)} = \nu_y$, напоминают условия нелинейных резонансов, например, $\nu_y = n/(2m)$. Однако, процессы, протекающие в сталкивающихся сгустках в окрестности этой частоты и описываемые теорией линейных когерентных колебаний в корне отличны от тех, что предсказываются для этих условий, например, моделью жестких сгустков. В частности, такие процессы формируют мультипольные моды колебаний, обусловленные возбуждением внутренних степеней свободы сгустков, обмены энергией между модами колебаний и колебаниями частиц и сопутствующие затухания, или антитизатухания Ландау встречных пучков. Напомним, что амплитуды мультипольных колебаний сгустков рассчитанные в рамках теории линейных когерентных колебаний даже при приближении частот к резонансным значениям сами по себе, вообще, малы.

Приближение частот колебаний частиц к разностным резонансам $m_1\nu_y^{(1)} - m_2\nu_y^{(2)} = n$ приводит к обмену энергиями связанных мод. Это обстоятельство может быть использовано для демпфирования неустойчивых мод и для детектирования связи колебаний пучков в МВ.

7.1. Синхробетатронные когерентные колебания

Как уже говорилось, приведенные расчеты выполнялись предполагая лобовые столкновения сгустков. Если же в МВ средние скорости сгустков не точно антипараллельны, а между их направлениями имеется некоторый угол $\pi - 2\phi$, то говорят о пересечении сгустков под углом 2ϕ . Одной из причин использования такого пересечения замкнутых орбит в коллайдерах является желание добиться более плотного расположения сгустков в пучке и, соответственно, возможного увеличения светимости установки. Вместе с тем, поскольку поля пространственного заряда релятивистского сгустка направлены поперек его средней скорости, при использовании схем с пересечением под углом в МВ кроме поперечных отклоняющих сил появляются силы, направленные вдоль (или против) средней скорости сгустка-партнера. Эти силы возмущают синхротронные колебания частиц этого сгустка (например, в [4]).

Для когерентных колебаний сгустков это означает, что к обсуждавшимся выше резонансам бетатронных когерентных колебаний добавятся семейства синхробетатронных резонансов, которые также могут вызывать неустойчивости когерентных, но теперь уже синхробетатронных мод сгустков. Как и в описанных случаях, неустойчивы моды сгустков, находящиеся в суммовых резонансах. Для одномерных бетатронных колебаний с мультипольностью m и синхротронного колебания с мультипольностью m_s для столкновений симметричных сгустков резонансное условие записывается в виде $2(m\nu_b + m_s\nu_s) = n$. Здесь ν_b и ν_s – безразмерные частоты бетатронных и синхротронных колебаний частиц, n – номер азимутальной резонансной гармоники. Для коротких сгустков одним из способов подавления этих неустойчивостей является использование т.н. схем с краб-кроссингом (более подробно см., например, в [4]).

Еще одним источником неустойчивости синхробетатронных мод коротких встречных пучков ($\sigma_s \ll \beta$) могут быть хроматизмы фокусирующих колец, в которых движутся сгустки. Простой расчет показывает [8], что зависимости частот колебаний частиц от их энергии приводит к перераспределению декрементов (или инкрементов) между бетатронными и синхробетатронными модами когерентных колебаний. В определенных условиях это явление можно использовать для управления величинами инкрементов нежелательных мод.

При обсуждении мультипольных когерентных колебаний встречных пучков мы упрощали вычисления предположением о малой длине сталкивающихся сгустков. Если β – значение горизонтальной, или вертикальной β -функции в МВ, то для длин сгустков σ_s предполагалось выполнение условия $\beta \gg \sigma_s$. В таком случае МВ действует на колебания частиц как бесконечно тонкая линза. При вычислении изменений импульсов частиц в МВ можно считать, что фазы их бетатронных колебаний при прохождении участка встречи не изменяются. В современных коллайдерах желание увеличить достижимое значение светимости заставляет существенно уменьшать значения β . Поскольку сопутствующее уменьшение длин сгустков, обычно, ограничено, например, коллективными эффектами, параметры установок входят в области, где $\beta \simeq \sigma_s$. Максимально достижимое значение

светимости при этом несколько снижается. В такой области параметров работает, например, В-фабрика КЕКВ в Цукуба, Япония.

Вычисления собственных частот и условий устойчивости когерентных колебаний встречных сгустков в области $\beta \simeq \sigma_s$ становятся несколько более сложными по сравнению с теми, которые мы обсуждали в данном пособии (с техническими деталями таких вычислений можно ознакомиться, например, в [14], [15], или в [16]). В отличие от случаев столкновений коротких сгустков здесь становится необходимым учет конечности набега фаз бетатронных колебаний на длине МВ. Кроме того, может оказаться важным учет роли синхробетатронных когерентных колебаний сгустков в ограничении их достижимых плотностей. В последних случаях и, например, для вертикальных колебаний, семейства бетатронных когерентных резонансов $2m_y\nu_y = n$ дополняются резонансами $2m_y\nu_y + 2m_s\nu_s = n$, где ν_s – частота синхротронных колебаний частиц, а m_s – номер мультипольности синхротронной части моды когерентного колебания. При небольших величинах частот синхротронных колебаний частиц возможны также неустойчивости когерентных мод сталкивающихся сгустков из-за связи их синхробетатронных мод колебаний [16].

Интерференция толчков от разных участков траектории частицы в области взаимодействия сгустков приводит к уменьшению испытываемых частицами возмущений. Это уменьшение тем больше, чем больше набеги фаз бетатронных колебаний частиц на длине области взаимодействия. Соответствующие сдвиги частот, инкременты когерентных колебаний также уменьшаются. Это явление можно описать введением некоторого эффективного значения параметра пространственного заряда ξ_{eff} , который интегрально описывает влияние интерференции фаз на когерентные эффекты встречи. В области параметров, где $\beta \simeq \sigma_s$, обычно выполнено неравенство $\xi_{eff} \leq \xi$.

Поскольку величины гармоник лагранжиана, описывающего возмущения колебаний полями встречного сгустка определяются полным набегом фазы бетатронных колебаний на МВ, действие этих явлений на когерентные колебания сгустков тем сильнее, чем выше номера мультипольности мод бетатронных колебаний. Так, для дипольных колебаний ($m = 1$) отличия ξ и ξ_{eff} невелики ($\xi_{eff} \simeq 0.5\xi$; [14]). Для секступольной моды ($m = 3$) значение ξ_{eff} может умень-

паться до 0.1ξ [14]. Влияние таких и более высоких мод на уменьшение плотности сгустков ослабевает. Поэтому становится возможным выбор области параметров, обеспечивающих желаемое (и достаточно высокое) значение светимости установки.

Уменьшение эффективного значения параметров пространственного заряда сгустков зависит от геометрии поперечного сечения сталкивающихся пучков. Можно утверждать, что для сгустков с круглыми поперечными сечениями неустойчивости когерентных колебаний встречных пучков, вообще говоря, оказываются слабее неустойчивостей сгустков с плоскими поперечными сечениями (например, в [15]).

7.2. Электрон-ионные коллайдеры

Последние полтора – два десятка лет в мире появился заметный интерес к сооружению установок с встречными пучками с большой светимостью, в которых сталкиваются электроны и положительно заряженные ионы (реально, голые ядра элементов). В таких установках возможно получение величин светимости, скажем, 10^{30} $1/(\text{см}^2\text{с})$ для ионов урана, или 10^{33} $1/(\text{см}^2\text{с})$ для протонов, если ионный пучок формируется с использованием, например, метода электронного охлаждения [24]. Оказывается, что предельные величины светимости в таких электрон-ионных коллайдерах ограничиваются не только эффектами встречи, но и возмущениями колебаний ионов полями пространственного заряда ионных сгустков. В простейшем случае, действие полей пространственного заряда ионного пучка на составляющие его ионы можно характеризовать величиной т. н. кулоновского сдвига частоты бетатронных колебаний ионов. В этой связи определяют величину

$$\Delta\nu_L = \frac{Z^2}{A} \frac{N_i r_p}{4\pi\gamma_i^3 \epsilon_i} \frac{\Pi}{\sqrt{2\pi\sigma_{si}}}. \quad (7.1)$$

Здесь величины, помеченные индексом i относятся к ионам, Z и A – соответственно, заряд и атомный вес ионов. Поскольку поля пространственного заряда дефокусируют ионы, сдвиг частоты бетатронных колебаний ионов отрицателен и равен $(-\Delta\nu_L)$. С увеличением амплитуд бетатронных колебаний ионов величина кулоновского

сдвига частоты уменьшается. По этой причине, помимо дефокусировки поля пространственного заряда сгустка изменяют в нем разбросы частот бетатронных колебаний.

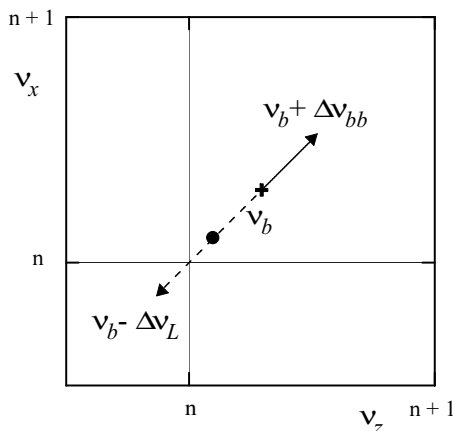


Рис. 28. Схематическое изображение смещения рабочей точки по частотам бетатронных колебаний ионов за счет эффектов встречи (сплошная линия) и за счет кулоновского расталкивания (пунктир). Жирным крестом показано положение невозмущенной рабочей точки, жирной точкой – ее общее смещение

Эти обстоятельства оказывают существенное влияние на принципы и процедуры выбора параметров для оптимизации светимости электрон-ионных коллайдеров с высокой светимостью. Одно из ограничений заранее очевидно. Взаимодействие электронного и ионного сгустков в МВ увеличивает частоты бетатронных колебаний частиц, а кулоновское расталкивание ионов уменьшает частоты их бетатронных колебаний (рис. 28). Если величина кулоновского сдвига $\Delta\nu_L$ превышает ξ , то суммарный сдвиг частот бетатронных колебаний ионов отрицателен. Это означает, что области устойчивости некогерентных колебаний ионов расположены ниже резонансных значений, например, $\nu_b \leq n/m$. Но в этой области будут неустойчивы, по крайней мере, дипольные когерентные колебания электронного и ионного сгустков из-за их взаимодействия в МВ. Требование одновременной устойчивости некогерентных и когерентных колебаний выполняется лишь в области, где $\Delta\nu_L < \xi$.

Для проверки реалистичности этого ограничения и для определения пороговой величины отношения $\chi = \Delta\nu_L/\xi$ в работе [24] было проведено численное моделирование самосогласованного взаимодействия электронного и ионного сгустков. Помимо прочего, результа-

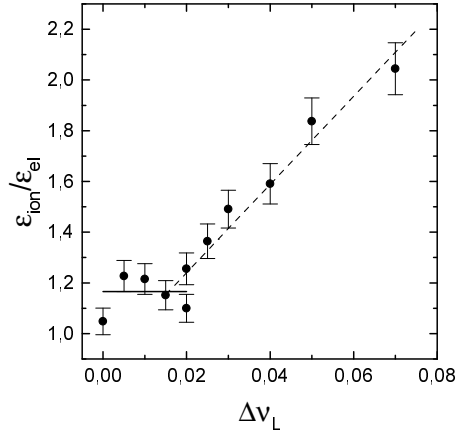


Рис. 29. Зависимость отношения эмиттансов ионного и электронного сгустков от величины кулоновского сдвига частоты $\Delta\nu_L$ (точки). Одно МВ на периметре, $\xi = 0.05$, $\nu_x = \nu_y = 7.1$; усы показывают 10% ширину вычисленных точек; сплошная и пунктирная линии – демонстрационная подгонка линейными функциями на двух группах точек

ты моделирования показали (рис. 29), что для $\xi = 0.05$ и, начиная с $\Delta\nu_L = 0.02$, взаимодействие сгустков в МВ сопровождается увеличением эмиттанта ионного пучка. Эмиттанс электронного сгустка также увеличивается. Светимость установки при этом уменьшается. Отсюда можно заключить, что предельное значение $\Delta\nu_L$ в электрон-ионных коллайдерах с сильными полями пространственного заряда ионных сгустков не превышает значение $\xi/2$, что не противоречит ожидаемому результату. Использование этого дополнительного ограничения позволяет оптимизировать достижимые значения светимостей электрон-ионных коллайдеров [24].

7.3. Особенности наблюдения колебаний сгустков

В подавляющем числе публикаций экспериментальное изучение когерентных колебаний встречных пучков сводится к наблюдению их дипольных колебаний. Сами дипольные колебания сгустков могут инициироваться, например, их внешней раскачкой. Распространенность таких исследований связана с тем, что измерения дипольных мод сгустков можно проводить используя дифференциальные пикап-электроды и обрабатывать полученные сигналы стандартными методами. Для пучков столь малой интенсивности, что в измеряемых областях частот не появляется неустойчивых мод колебаний, такой подход может дать вполне адекватные результаты. Конечно, при этом нужно помнить о влиянии на результаты измерений нелинейностей полей пространственного заряда сгустков. Поэтому используемые амплитуды раскачивающих сгустки полей должны быть ограничены, чтобы, например, избежать проявления в измерениях гистерезисных явлений, или эти эффекты должны быть явно учтены в обработке измеренных сигналов.

Непосредственное наблюдение мультипольных колебаний пучков может дать больше информации о взаимном влиянии сталкивающихся сгустков, но оно технически затруднено. Постановка таких измерений когерентных колебаний встречных пучков и интерпретация результатов этих экспериментов еще ждут своего развития.

В заключение отметим, что хотя изучение когерентных колебаний встречных пучков является непростой задачей, получаемые в этой области результаты полезны для проектирования и настройки машин. Это особенно относится к тем случаям, когда желаемые величины светимостей установок велики.

А Некоторые интегралы с функциями Бесселя

В этом пособии нам довольно часто приходилось вычислять интегралы вида:

$$K_{m,m_2}^{(\lambda)} = 2 \int_0^\infty J_m(kb) J_{m_2}(k) \frac{dk}{k^\lambda}, \quad (\text{A1})$$

где b – некоторое положительное число, m и m_2 разнятся на четное число, а значение параметра λ таково, что интеграл не расходится. Один из способов вычисления таких интегралов описан, например, в книге Ватсона [25]. Он основан на использовании предельного перехода

$$K_{m,m_2}^{(\lambda)} = 2 \lim_{c \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-ck} J_m(kb) J_{m_2}(k) \frac{dk}{k^\lambda}, \quad (\text{A2})$$

позволяющего заменить функции Бесселя рядами. Например, пишем

$$J_m(kb) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{bk}{2} \right)^{2n+m}. \quad (\text{A3})$$

Обозначив

$$A = \int_0^\infty e^{-ck} J_m(kb) J_{m_2}(k) \frac{dk}{k^\lambda} \quad (\text{A4})$$

и предполагая выполненным условие $b \leq 1$, пишем

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{b}{2} \right)^{2n+m} a_n, \quad (\text{A5})$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^\infty e^{-ck} J_{m_2}(k) k^{2n+m-\lambda} dk \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \int_0^\infty e^{-ck} k^{2n+2l+m+m_2-\lambda} dk}{l! \Gamma(m_2+l+1) 2^{2l+m_2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \int_0^\infty e^{-k} k^{2n+2l+m+m_2-\lambda} dk}{l! \Gamma(m_2+l+1) 2^{2l+m_2} c^{2n+2l+m+m_2-\lambda+1}}. \end{aligned}$$

Подставив сюда

$$\int_0^\infty e^{-k} k^{2n+2l+m+m_2-\lambda} dk = \Gamma(2n+2l+m+m_2-\lambda+1) \quad (\text{A6})$$

и воспользовавшись формулой удвоения Γ -функций

$$\begin{aligned} \Gamma(2n+2l+m+m_2-\lambda+1) &= \frac{2^{2n+2l+m+m_2-\lambda}}{\sqrt{\pi}} \\ &\times \Gamma\left(n+l+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(n+l+1+\frac{m+m_2-\lambda}{2}\right), \end{aligned}$$

пишем

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2^{2n+m-\lambda}}{\sqrt{\pi} c^{2n+m+m_2-\lambda+1}} \\
 &\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+l+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(n+l+1+\frac{m+m_2-\lambda}{2}\right)}{l! \Gamma(m_2+l+1) (-c^2)^l} \\
 &= \frac{\Gamma(m_2+1+m-\lambda+2n)}{\Gamma(m_2+1) 2^{m_2}} \\
 &\times \frac{F\left(n+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}, n+\frac{m+m_2-\lambda+2}{2}; m_2+1; -\frac{1}{c^2}\right)}{c^{2n+m+m_2-\lambda+1}},
 \end{aligned}$$

где

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{A7})$$

– гипергеометрический ряд. С помощью формулы преобразования

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{F\left(n+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}, n+\frac{m+m_2-\lambda+2}{2}; m_2+1; -\frac{1}{c^2}\right)}{c^{2n+m+m_2-\lambda+1}} \\
 &= \frac{F\left(n+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}, m_2-n-\frac{m+m_2-\lambda}{2}; m_2+1; \frac{1}{1+c^2}\right)}{c^{2n+m+m_2-\lambda+1} \left(1+\frac{1}{c^2}\right)^{n+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}}},
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\Gamma(m_2+1+m-\lambda+2n)}{\Gamma(m_2+1) 2^{m_2}} \\
 &\times \frac{F\left(n+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}, -n-\frac{m+m_2-\lambda}{2}; m_2+1; \frac{1}{1+c^2}\right)}{(1+c^2)^{n+\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{c \rightarrow 0} a_n = \frac{\Gamma(m_2 + 1 + m - \lambda + 2n)}{\Gamma(m_2 + 1) 2^{m_2}} \quad (\text{A8})$$

$$\times F\left(n + \frac{m + m_2 - \lambda + 1}{2}, -n - \frac{m - m_2 - \lambda}{2}; m_2 + 1; 1\right).$$

Поскольку

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

а

$$\frac{\Gamma(m_2 + 1)\Gamma(m_2 + 1 - n - \frac{m+m_2-\lambda+1}{2} + n + \frac{m-m_2-\lambda}{2})}{\Gamma(m_2 + 1 - n - \frac{m+m_2-\lambda+1}{2})\Gamma(m_2 + 1 + n + \frac{m-m_2-\lambda}{2})}$$

$$= \frac{m_2! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-n - \frac{m-m_2-\lambda-1}{2}\right) \Gamma\left(n + 1 + \frac{m+m_2-\lambda}{2}\right)},$$

мы можем переписать формулу (A8) в виде

$$\lim_{c \rightarrow 0} a_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(m_2 + 1 + m - \lambda + 2n)}{2^{m_2} \Gamma\left(-n - \frac{m-m_2-\lambda-1}{2}\right) \Gamma\left(n + 1 + \frac{m+m_2-\lambda}{2}\right)},$$

или учитывая, что

$$\sqrt{\pi} \Gamma(m_2 + 1 + m - \lambda + 2n) = 2^{m_2+m-\lambda+2n}$$

$$\times \Gamma\left(n + \frac{m_2 + m - \lambda + 1}{2}\right) \Gamma\left(n + 1 + \frac{m_2 + m - \lambda}{2}\right),$$

в виде

$$\lim_{c \rightarrow 0} a_n = \frac{2^{m-\lambda+2n} \Gamma\left(n + \frac{m_2+m-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-n - \frac{m-m_2-\lambda-1}{2}\right)}. \quad (\text{A9})$$

Подстановка этого выражения в (A2) позволяет записать

$$\begin{aligned}
K_{m,m_2}^{(\lambda)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n+m} \lim_{c \rightarrow 0} a_n \quad (\text{A10}) \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{b}{2}\right)^{2n+m}}{n! \Gamma(m+n+1)} \frac{2^{m-\lambda+2n} \Gamma\left(n + \frac{m_2+m-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-n - \frac{m-m_2-\lambda-1}{2}\right)} \\
&= \frac{b^m \cos\left(\pi \left[\frac{m-m_2-\lambda}{2}\right]\right)}{\pi 2^{\lambda-1}} \sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} \\
&\quad \times \frac{\Gamma\left(n + \frac{m_2+m-\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{m-m_2-\lambda+1}{2}\right)}{n! \Gamma(m+n+1)},
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
K_{m,m_2}^{(\lambda)} &= \frac{b^m \Gamma\left(\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}\right)}{2^{\lambda-1} m! \Gamma\left(\frac{m_2-m+\lambda+1}{2}\right)} \quad (\text{A11}) \\
&\times F\left(\frac{m+m_2-\lambda+1}{2}, \frac{m-m_2-\lambda+1}{2}; m+1; b^2\right), \quad b \leq 1.
\end{aligned}$$

Полагая в этой формуле $\lambda = 2$, получим выражение в правой части (4.78)

$$\begin{aligned}
K_{m,m_2}^{(2)} &= \frac{b^m}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_2-1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\frac{m_2-m+3}{2}\right)} \quad (\text{A12}) \\
&\times F\left(\frac{m+m_2-1}{2}, \frac{m-m_2-1}{2}; m+1; b^2\right), \quad b \leq 1.
\end{aligned}$$

Полагая в (A11) $\lambda = 1$ и $b = 1$, получим

$$\begin{aligned}
K_{m,m_2}^{(1)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_2}{2}\right) F\left(\frac{m+m_2}{2}, \frac{m-m_2}{2}; m+1; 1\right)}{m! \Gamma\left(\frac{m_2-m}{2} + 1\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+m_2}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\frac{m_2-m}{2} + 1\right)} \frac{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{m+m_2}{2} - \frac{m-m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(m+1 - \frac{m+m_2}{2}\right) \Gamma\left(m+1 - \frac{m-m_2}{2}\right)} \\
&= \frac{4}{(m_2^2 - m^2) \Gamma\left(\frac{m_2-m}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{m_2-m}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Учитывая тождество

$$\frac{1}{(m_2^2 - m^2)\Gamma\left(\frac{m_2 - m}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{m_2 - m}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}[m_2 - m]\right)}{\pi(m_2^2 - m^2)},$$

получим формулу (4.117)

$$K_{m,m_2}^{(1)} = \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{2}[m - m_2]\right)}{\pi \frac{m^2 - m_2^2}{m^2 - m_2^2}}. \quad (\text{A13})$$

Полагая в (A11) $m = m_2$, получим

$$K_{m,m}^{(\lambda)} = \frac{b^m \Gamma\left(m + \frac{1-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda-1} m! \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \times F\left(m + \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}; m+1; b^2\right), \quad b \leq 1. \quad (\text{A14})$$

Используя преобразование [26]

$$F\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{2} - \beta; \beta + \frac{1}{2}; z^2\right) = (1+z)^{-2\alpha} F\left(\alpha, \beta; 2\beta; \frac{4z}{(1+z)^2}\right),$$

$$\alpha = m + \frac{1-\lambda}{2}, \quad \beta = m + \frac{1}{2}, \quad \alpha + \frac{1}{2} - \beta = \frac{1-\lambda}{2},$$

пишем

$$F\left(m + \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}; m+1; b^2\right) = (1+b)^{-2m-1+\lambda} \times F\left(m + \frac{1-\lambda}{2}, m + \frac{1}{2}, 2m+1; \frac{4b}{(1+b)^2}\right).$$

Поэтому

$$K_{m,m}^{(\lambda)} = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1-\lambda}{2}\right)}{2^{\lambda-1} m! \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)} \frac{b^m}{(1+b)^{2m-\lambda+1}} \times F\left(m + \frac{1-\lambda}{2}, m + \frac{1}{2}, 2m+1; \frac{4b}{(1+b)^2}\right). \quad (\text{A15})$$

В этом выражении аргумент гипергеометрического ряда меньше единицы при всех значениях параметра b . Поскольку

$$m + \frac{1 - \lambda}{2} + m + \frac{1}{2} - 2m - 1 = -\frac{\lambda}{2},$$

ряд сходится абсолютно для всех значений b , включая точку $b = 1$.

Подставляя в формулу (A15) $m = 1$ и $\lambda = 2$, получаем (удвоенное) выражение из правой части (4.38)

$$K_{1,1}^{(2)} = \frac{b}{(1+b)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3; \frac{4b}{(1+b)^2}\right). \quad (\text{A16})$$

Полагая в (A15) $\lambda = 1$, получаем

$$K_{m,m}^{(1)} = \frac{b^m}{m(1+b)^{2m}} F\left(m, m + \frac{1}{2}, 2m + 1; \frac{4b}{(1+b)^2}\right). \quad (\text{A17})$$

В этой формуле гипергеометрический ряд выражается через элементарную функцию. Действительно:

$$\begin{aligned} A &= F\left(m, m + \frac{1}{2}, 2m + 1; x\right), \quad x = \frac{4b}{(1+b)^2}, \\ &= \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m)\Gamma(m+\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n)\Gamma(m+\frac{1}{2}+n)x^n}{\Gamma(2m+1+n)n!} \\ &= \frac{m2^{2m}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n)\Gamma(m+\frac{1}{2}+n)x^n}{\Gamma(2m+1+n)n!} \\ &= 2m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+2n)x^n}{\Gamma(2m+1+n)\Gamma(n+1)} = \frac{2^{2m}}{(1+\sqrt{1-4x})^{2m}}. \end{aligned}$$

Поэтому пишем

$$K_{m,m}^{(1)} = \frac{b^m}{m(1+b)^{2m}} \frac{2^{2m}}{\left(1 + \frac{|1-b|}{1+b}\right)^{2m}} \quad (\text{A18})$$

$$= \frac{2^{2m}b^m}{m(1+b+|1-b|)^{2m}}. \quad (\text{A19})$$

В области $b \leq 1$ это выражение сводится к формуле (5.34), а в области $b > 1$ к формуле (5.35). Впрочем, такой результат может быть получен и прямой подстановкой значения $\lambda = 1$ в формулу (A14).

Библиографический список

- [1] Д. В. Пестриков. Лекции по когерентным колебаниям. Часть I и II. Учебное пособие. Новосибирск, 1996.
- [2] Диканский Н. С., Пестриков Д. В. Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989.
- [3] Dikansky N.S., Pestrikov D.V., Physics of Intense Beams and Storage Rings. N.Y.: AIP PRESS, 1994.
- [4] Д. В. Пестриков. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие. Новосибирск, 2002.
- [5] В.И. Балбеков, А.А. Коломенский. ЖТФ, **37**, стр. 2021, 1967.
- [6] A. Piwinski, In Proc. of the 8-th Intern. Conf. on High Energy Accelerators, CERN, Geneva 1971, p. 357.
- [7] Я. С. Дербенев. В Трудах III Всесоюзного Совещания по ускорит. зар. част., с. 382, М.: Наука, 1973.
- [8] N. Dikansky and D. Pestrikov, Part. Acc., **12**, 27, 1982.
- [9] A.W. Chao, R.D. Ruth, Part. Acc., **16**, 201, 1985.
- [10] D. Pestrikov, SLAC-PUB-5510. SLAC, 1991.
- [11] P. Zenkevich and K. Yokoya, Part. Acc., **40**, 229, 1993.
- [12] D. V. Pestrikov, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 588/3, p. 336, 2008.
- [13] E.A. Simonov, In Proc of the 3-d Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop on Beam-Beam Effects in Circular Colliders. Novosibirsk 1989, p. 106.
- [14] D. V. Pestrikov. In Proc. of PAC 1993, p. 3687, Washington, 1993.
- [15] D. V. Pestrikov. Part. Acc., **41**, 203, 1993; или в KEK Preprint 92-208, KEK, 1993.

- [16] D. V. Pestrikov, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 640/1, p. 19, 2011.
- [17] Н. С. Диканский, Д. В. Пестриков. Затухание Ландау и расфазировки когерентных колебаний пучков в накопителях. Учебное пособие. Новосибирск, 2010.
- [18] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962.
- [19] Дербенев Я. С., Хейфец С. А. Теор. и матем. физика, т. 31, № 2, с. 220, М.: Наука, 1977.
- [20] D. V. Pestrikov, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 578/1, p. 65, 2007.
- [21] Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М.: Физматгиз, 1958.
- [22] Дербенев Я. С., Диканский Н. С. В трудах Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т. 2, с. 391, М.: Наука, 1971.
- [23] J.E. Augustin, R. Belbeoch, P. Brunet, X. Buffet, et al. In Proc. of the 7-th Intern. Conf. on High Energy Accel., v.2, p.113, Yerevan, 1970.
- [24] K. Blasche, N. Dikansky, Yu. Eidelman, B. Grishanov, et al. In Proc. of 17th Intern. Conf. on High-energy Accel. HEACC-98, p. 260, Dubna, 1998.
- [25] Watson G. N., Theory of Bessel functions. Cambridge, at the University Press, 1922.
- [26] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.