

773/ДИС.



773/дис.

№ П

№ ПО

№ Ф

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
Сибирское Отделение

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Отдел ГУС

ДЕЛО № 806 том №

КОНДРАТЕНКО А.М.

поляризованные пучки В НАКОПИТЕЛЯХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ  
УСКОРИТЕЛЯХ

(01.04.02 – теоретическая и математическая физика)

диссертация д.ф.-м.-н.

(заголовок дела)

1982  
(год)

на 202 лист.

хранить постоянно

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Институт ядерной физики

На правах рукописи

УДК 539.12.185: 621.384.6

КОНДРАТЕНКО Анатолий Михайлович

ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ПУЧКИ В НАКОПИТЕЛЯХ И  
ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

(О1.04.02 – теоретическая и математическая физика)

Диссертация на соискание  
ученой степени доктора  
физико-математических  
наук



Новосибирск  
1982



# О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| В В Е Д Е Н И Е.....                                                                                                   | 5  |
| ГЛАВА I. ДИНАМИКА ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ В УСКОРИТЕЛЯХ И<br>НАКОПИТЕЛЯХ.....                                               | 12 |
| § 1. Основные уравнения.....                                                                                           | 12 |
| § 2. Движение спина на равновесной орбите.....                                                                         | 17 |
| § 3. Простые примеры.....                                                                                              | 23 |
| а) Идеальный накопитель.....                                                                                           | 23 |
| б) Идеальный накопитель со вставкой в промежуток<br>полей для получения продольной поляризации в<br>месте встречи..... | 24 |
| в) Пример с одной сибирской змейкой.....                                                                               | 28 |
| г) Пример с двумя змейками.....                                                                                        | 32 |
| § 4. Движение спина частиц, отклоненных от замкнутой<br>орбиты.....                                                    | 34 |
| § 5. Формулы для спинowego возмущения в линейном при-<br>ближении.....                                                 | 39 |
| § 6. Примеры получения явных выражений для оси прецес-<br>сии на неравновесных траекториях.....                        | 42 |
| а) Идеальный накопитель.....                                                                                           | 42 |
| б) Идеальный накопитель со вставкой в промежуток<br>радиальных полей.....                                              | 46 |
| в) Пример с одной змейкой.....                                                                                         | 48 |
| г) Пример с двумя змейками.....                                                                                        | 49 |
| § 7. Спиновые резонансы.....                                                                                           | 50 |
| а) Резонансы первого приближения.....                                                                                  | 50 |
| б) Резонансы высших порядков.....                                                                                      | 52 |
| в) Модуляционные резонансы.....                                                                                        | 56 |
| § 8. Способ преднамеренной деполаризации пучка.....                                                                    | 59 |
| § 9. Абсолютная калибровка энергии пучка в идеальном<br>накопителе.....                                                | 63 |

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ГЛАВА II. УСКОРЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ.....                                                                | 65  |
| § 1. Однократное прохождение резонанса.....                                                                   | 65  |
| а) Быстрое прохождение резонанса.....                                                                         | 67  |
| б) Медленное прохождение резонанса.....                                                                       | 69  |
| в) Прохождение резонанса с произвольной скоростью....                                                         | 71  |
| § 2. Периодические прохождения.....                                                                           | 74  |
| § 3. Способы получения встречных пучков с противополож-<br>ным у одного из пучков направлением поляризации... | 79  |
| § 4. Ускорение поляризованных частиц в ускорителях с<br>вертикальным полем.....                               | 81  |
| а) Учет синхротронной модуляции энергии.....                                                                  | 84  |
| б) Дополнительные меры предотвращения деполаризации<br>при ускорении.....                                     | 86  |
| § 5. Ускорение поляризованных частиц до высоких энергий                                                       | 88  |
| § 6. Устойчивость поляризации при ускорении в ускорител-<br>ях со змейками.....                               | 95  |
| § 7. Сохранение поляризации пучка до предельно высоких<br>энергий.....                                        | 99  |
| а) Применение M пар эмеек.....                                                                                | 99  |
| б) Использование специальной структуры периода маг-<br>нитной системы.....                                    | 101 |
| в) Способ модуляции полей дипольных магнитов.....                                                             | 103 |
| ГЛАВА III. ДИФФУЗИЯ СПИНОВ ЧАСТИЦ.....                                                                        | 104 |
| § 1. Диффузия в нерезонансной области.....                                                                    | 105 |
| § 2. Вычисление времени деполаризации в идеальном на-<br>копителе.....                                        | 107 |
| § 3. Общие формулы линейного приближения.....                                                                 | 109 |
| § 4. Деполаризующее влияние флуктуаций энергии при<br>сильных возмущениях спинового движения.....             | 111 |
| а) Идеальный накопитель со вставкой радиальных полей.                                                         | 112 |
| б) Пример с двумя змейками.....                                                                               | 114 |



|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 5. Деполаризующее влияние искажений равновесной орбиты.....                    | II5 |
| § 6. Влияние связи вертикального движения с радиальным и фазовым.....            | I2I |
| § 7. Диффузия спинов в области резонансов.....                                   | I25 |
| § 8. Диффузия спинов при большом разбросе частот прецессии.....                  | I29 |
| § 9. Устойчивость поляризации встречных пучков.....                              | I33 |
| ГЛАВА IV. КИНЕТИКА РАДИАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ.....                                 | I42 |
| § 1. Метод описания.....                                                         | I43 |
| § 2. Поляризация ультрарелятивистских электронов в неоднородных полях.....       | I50 |
| § 3. Уравнение для плотности поляризации электронов в накопителях.....           | I53 |
| § 4. Примеры.....                                                                | I60 |
| а) О точности исполнения магнитной системы в накопителях традиционного типа..... | I60 |
| б) Идеальный накопитель с введенными в промежуток радиальными полями.....        | I63 |
| § 5. Магнитные змейки.....                                                       | I64 |
| § 6. Сибирские змейки.....                                                       | I67 |
| ГЛАВА V. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ.....        | I70 |
| § 1. Поляризация мягкими фотонами.....                                           | I7I |
| § 2. Обсуждение результатов.....                                                 | I72 |
| § 3. О возможностях поляризации мягкими фотонами.....                            | I76 |
| § 4. Поляризация жесткими фотонами.....                                          | I78 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....                                                                  | I82 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А.....                                                                | I85 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....                                                                | I89 |
| ЛИТЕРАТУРА.....                                                                  | I9I |

## В В Е Д Е Н И Е

В теории атомов существовал известный парадокс, касающийся величины спинового расщепления квантовых уровней в электрическом поле. Экспериментальные измерения показывали, что эта величина в два раза меньше, чем теоретически предсказанная. При объяснении расхождения была построена релятивистская теория движения спинов.

Большой вклад в разработке этой теории принадлежит Томасу /1,2/, который получил релятивистские уравнения простым физически-наглядным способом. Релятивистское описание добавило "томасовскую прецессию", устранившую парадокс в спинном расщеплении уровней в электрическом поле атома.

С развитием физики ускорителей появилась возможность получения интенсивных поляризованных пучков высокой энергии. Оказалось весьма полезным использование поляризованных частиц, получаемых рассеянием на мишенях неполяризованного пучка, выходящего из ускорителя. В частности, в экспериментах с поляризованными частицами показано, что существовавшие теоретические предсказания о исчезновении спиновых эффектов с ростом энергии оказались неверными /3-5/.

Существенная потеря интенсивности пучка, получаемого в результате (иногда тройных) рассеяний, стимулировала развитие другого направления. И.И.Гуревичем в 1954 году высказана идея ускорения поляризованных частиц, получаемых из источника. В работе /6/ рассмотрены возможности создания источников поляризованных частиц. В настоящее время достигнута интенсивность таких источников того же порядка, что и интенсивность неполяризованных частиц /7-13/.

В теории ускорения поляризованных частиц определенную роль сыграла работа /14/, результатом которой был вывод уравнения движения спина в квазиклассических полях с помощью 4-вектора поляри-

зации. Используя уравнения для спина, в работе /15/ исследованы возможности ускорения пучка без деполяризации. Введены понятия спиновых резонансов и параметр быстроты их прохождения. Позже результаты /15/ применялись к различным ускорителям /7,16-20/. В работах /18,19/ по деполяризующему действию различались некогерентные и когерентные резонансы. Пересечение последних могло вызвать когерентное отклонение поляризации от вертикальной без уменьшения степени (при достаточно малом времени ускорения).

Другое направление исследований открыло теоретическое предсказание радиационной самополяризации электронов и позитронов при длительном вращении частиц в накопителях /21/. Одним из основных деполяризующих эффектов является влияние отклонений магнитного поля от идеального /22/. Детально исследовался и эффект радиационной поляризации /23-27/.

Исследования, проведенные в указанных работах, определили задачи получения интенсивных поляризованных пучков в ускорителях и накопителях. Одной из них является ускорение поляризованных пучков до энергий максимально достигаемых в ускорителях. Деполяризующие спиновые резонансы, пересекаемые при ускорении, не позволяют достигнуть высоких энергий поляризованных пучков. Например, в протонном синхротроне ИТЭФ можно сохранить поляризацию до энергии 1-2 ГэВ вместо достигаемой 12 ГэВ, в ускорителе на 70 ГэВ ИФВЭ поляризация существует только до 4-5 ГэВ /17/. Сравнительно недавно Аргоннской группе удалось ускорить поляризованные протоны до максимальной энергии ускорителя 12 ГэВ после кропотливой и длительной работы. /28/. Еще труднее получить поляризованные пучки более высоких энергий.

В электрон-позитронных накопителях при повышении энергии растут деполяризующие эффекты, связанные с несовершенством магнитной системы. Оценки деполяризующих эффектов привели к выводу,



что вероятно радиационная поляризация не может быть практически достигнута в таких накопителях как PETRA на 19 ГэВ, PEP на 25 ГэВ, LEP на 100 ГэВ. Требовался детальный анализ деполяризующих эффектов при таких высоких энергиях.

В процессе исследования определилась возможность управления направлением и степенью в местах встреч электрон-позитронных накопителей. Была известна принципиальная возможность получения только вертикальной поляризации (направленной по магнитному полю накопителя). Нужно было построить теорию поляризации в накопителях с изменяющимися полями с учетом возникающих эффектов спин-орбитальной связи.

Возникла задача исследования деполяризующего влияния встречного пучка в условиях максимальной светимости накопителя. Из-за сильно нелинейного поля встречных сгустков на спин действуют гармоники возмущающего поля с высокими номерами. Для описания этих эффектов требовалось создать теорию "резонансной" диффузии спинов.

Время радиационной поляризации часто оказывается довольно большим даже при энергиях, близких к максимальной в накопителе. Это приводит к уменьшению эффективной светимости поляризованных пучков. Еще более трудной оказывается ситуация при энергиях, ниже максимальной, из-за сильной зависимости времени поляризации от энергии ( $\sim \xi^{-5}$ ). Поэтому нужно было найти способы более быстрой поляризации пучка в режиме циркуляции в накопителе.

Перечисленному кругу вопросов посвящены работы /29-54/, на которых основана диссертация.

Можно привести целый ряд экспериментов, демонстрирующих чрезвычайную важность создания поляризованных пучков в ускорителях и накопителях. Работы, выполненные Аргоннской группой, показали большие спиновые эффекты в упругом рассеянии протонов на протонах /55/.

Эффект радиационной поляризации подтвержден экспериментально на многих накопителях: в Новосибирске (ВЭПП-2, 1970; ВЭПП-2М, 1974; ВЭПП-3, 1979; ВЭПП-4, 1982) /27,56-59/, Орсе (Франция, 1972) /60/, Стэнфорде (США, 1975) /61/, Гамбурге (ФРГ, 1980) /62/.

Продемонстрировано наличие поляризации в режиме встречных пучков (см., например, /56,63/), что согласуется с выводами работы /34/.

Экспериментально доказана возможность адиабатического прохождения целого резонанса без деполяризации пучка /45/ с помощью метода преднамеренного увеличения мощности резонансов /36/.

Используя метод резонансной деполяризации /37,41/, измерены в рекордной точностью массы  $\phi$ ,  $K^0$ ,  $K^\pm$ ,  $\psi$ ,  $\psi'$ ,  $J$  мезонов /64/. Этим же методом проведено сравнение аномальных магнитных моментов электрона и позитрона с относительной точностью  $10^{-5}$ , что было (в то время) на два порядка выше точности остальных экспериментов по измерению магнитного момента позитрона /65/.

Примером использования поперечно-поляризованных встречных пучков является эксперимент, проведенный на накопителе SPEAR, в котором в многоадронных событиях были определены спины первичных струй /66/.

Некоторые возможности экспериментов с продольно-поляризованными электронами и позитронами обсуждаются в работе /67/.

Изучаются возможности ускорения поляризованных протонов в ЦЕРНе /68/, КЕК /69/, Брукхейвене /70-72/, ФНАЛе /73/, Дубне /8/ и Протвино /74/. Проект ускорения поляризованных протонов в AGS находится в стадии реализации. Активно ведется работа по получению поляризованных дейтронов в синхротроне в Дубне. В проектах Брукхейвена /72/, ФНАЛа /73/, Протвино /74/ планируется использовать методы, представленные в диссертации.

Методы получения радиационно поляризованных электронов и позитронов явились основой предложений для накопителей LEP

/75,52/, HERA /76/, непосредственно использованы при разработке проекта получения продольно-поляризованных пучков в ВЭПП-4 /77,78/.

Материал диссертации расположен следующим образом. В первой главе приводится доказательство существования периодического движения спина в накопителях и циклических ускорителях. Исследуется его устойчивость. Рассмотрены примеры нахождения периодического направления поляризации в идеальном накопителе, в накопителе со вставкой в промежуток полей для получения продольной поляризации, в накопителе с одной и двумя "сибирскими" змейками. Анализируются отклонения периодического движения спина и обобщенной частоты прецессии, вызываемые разбросом траекторий частиц в пучке. В этой же главе описывается движение спинов вблизи резонансов и метод "резонансной" деполяризации пучка, используемый для абсолютной калибровки энергии частиц в накопителе.

Вторая глава посвящена методам ускорения поляризованных частиц до высоких энергий. Приводится полное решение задачи об однократном прохождении резонанса, обобщающее результаты /15/. На основе этого решения исследуются периодические прохождения, вызываемые, например, синхротронной модуляцией энергии частиц. Описывается способ получения встречных пучков с обращенным у одного из пучков направлением поляризации.

Предлагаются методы сохранения поляризации при ускорении, основанные на использовании сибирских змеек. Показана возможность ускорения поляризованных частиц до энергий, максимально достигаемых в ускорителе. Анализируется устойчивость поляризации при ускорении в ускорителях со змейками. Исследуются способы сохранения поляризации при ускорении до предельно высоких энергий, как, например, в проектах УНК и ФНАЛ.

В третьей главе описывается деполяризующее действие источников диффузии орбитального движения в накопителях. Вводится понятие функции спин-орбитальной связи, позволяющей вычислять характерное время исчезновения поляризации. Исследуются деполяризующие эффекты в области спиновых резонансов. Анализируется деполяризующее действие встречного пучка в накопителях.

В четвертой главе излагается общий метод решения задачи поляризации электронов и позитронов синхротронным излучением. Получены формулы, которые с помощью функции спин-орбитальной связи позволяют вычислять степень равновесной поляризации и время релаксации. Метод выявил новый механизм радиационной поляризации, обязанный спин-орбитальной связи.

Приведены ограничения на точность исполнения и установки магнитной системы в накопителях традиционного типа. Описаны магнитные змейки, позволяющие резко уменьшать время релаксации поляризации электронов и позитронов и повышать равновесную степень в накопителях с неоднородными полями.

Пятая глава посвящается способам поляризации пучка электронов (позитронов) лазерным циркулярно-поляризованным встречным излучением. Предлагаются два метода поляризации. В первом методе используются "мягкие" фотоны, энергий которых недостаточно для выбивания электронов из пучка. Поляризация происходит в результате многократного взаимодействия излучения с циркулирующим в накопителе пучком. Принципиальным моментом является наличие определенной спин-орбитальной связи в месте взаимодействия с излучением.

Во втором методе применяются "жесткие" фотоны, выбивающие (из-за отдачи) электроны из пучка преимущественно одной из спиральностей. В этом методе поляризация происходит за счет потери части пучка.



## II

В оптимальном случае в месте взаимодействия с излучением должно быть организовано: при поляризации мягкими фотонами – поперечное к скорости направление равновесной поляризации, при поляризации жесткими фотонами – продольное. Приведены расчеты степени поляризации и времени ее получения в обоих методах.

Материал диссертации основан на работах: первая глава – /29, 30, 35, 37, 41, 50/, вторая – /30, 35, 36, 44–46, 48, 49/, третья – /31, 34, 35, 42, 50/, четвертая – /32, 33, 35, 38–40, 42, 43, 46, 47, 50–52/, пятая – /53, 54/.

## ДИНАМИКА ПОЛЯРИЗАЦИИ ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЯХ И НАКОПИТЕЛЯХ

§ I. Основные уравнения

Динамика поляризации в квазиклассических электромагнитных полях может описываться уравнением движения вектора спина  $\vec{S}$ , определяемого в системе покоя частицы.

Получим уравнение для спина способом, предложенным Томасом /2/. Этот способ более прямой и менее громоздкий, чем традиционный вывод с помощью 4-вектора поляризации <sup>ж)</sup> /14,79/.

В нерелятивистском случае вращение спина описывается хорошо известным уравнением, имеющим, по-существу, чисто классический характер /80/:

$$\dot{\vec{S}} = [\vec{\mu} \vec{H}], \quad (\text{I.I.I})$$

где  $\vec{H}$  — магнитное поле на траектории частицы,  $\vec{\mu} = g \vec{S}$  — магнитный момент частицы с гиромагнитным отношением  $g$ . В квантовой теории уравнение (I.I.I) описывает изменение оператора спина в гайзенберговском представлении.

С помощью преобразования Лоренца это уравнение можно обобщить на случай движения частицы с любой скоростью. Поворот спина за интервал времени  $d\tau = dt/\gamma$  ( $\gamma$  — релятивистский фактор) в инерциальной системе, совпадающей с собственной в момент времени  $t$  ( $i$  — система), определяется уравнением (I.I.I):

$$d\vec{S}_i = g [\vec{S} \vec{H}_c] d\tau,$$

где  $\vec{H}_c$  — магнитное поле в собственной системе. Конечно,  $d\vec{S}_i$  не будет совпадать с искомым приращением  $d\vec{S}$  в лабораторной

---

ж) Отметим, что и уравнение для 4-вектора поляризации получено Томасом в работе /2/, но для частиц без аномального магнитного момента.

системе, так как при изменении направления скорости частицы за время  $d\tau$  пространственные оси собственной системы оказываются повернутыми относительно  $i$ -системы. Если  $d\vec{\varphi}$  — вектор угла поворота собственной системы относительно  $i$ -системы, то

$$d\vec{S} = d\vec{S}_i - [d\vec{\varphi} \vec{S}].$$

Угол  $d\vec{\varphi}$  находится из простых соображений. Если  $d\vec{\alpha} = [\vec{v} d\vec{v}] / v^2$  — вектор угла поворота скорости в лабораторной системе, то собственная система координат повернется относительно нового направления скорости  $(\vec{v} + d\vec{v})$  на угол  $(-d\vec{\alpha})$ . В то же время направление  $(\vec{v} + d\vec{v})_i$  в  $i$ -системе составит с направлением  $\vec{v}$  угол  $\gamma d\vec{\alpha}$ . Следовательно, угол поворота  $d\vec{\varphi}$  равен:

$$d\vec{\varphi} = \gamma d\vec{\alpha} - d\vec{\alpha} = \frac{\gamma - 1}{v^2} [\vec{v} d\vec{v}].$$

Таким образом, уравнение для спина имеет следующий вид:

$$\dot{\vec{S}} = \frac{q}{\gamma} [\vec{S} \vec{H}_c] - \frac{\gamma - 1}{v^2} [[\vec{v} \dot{\vec{v}}] \vec{S}] \equiv [\vec{\Omega} \vec{S}] \quad (I.I.2)$$

Вектор  $\vec{\Omega}$  имеет смысл угловой скорости вращения спина относительно направлений, неподвижных в лабораторной системе. Нетрудно выразить  $\vec{\Omega}$  через электро-магнитное поле лабораторной системы:

$$\vec{\Omega} = -\left(\frac{q_0}{\gamma} + q_a\right) \vec{H} + \frac{\gamma q_a}{\gamma + 1} \vec{v} (\vec{H} \vec{v}) - \left(\frac{q_0}{\gamma + 1} + q_a\right) [\vec{E} \vec{v}]. \quad (I.I.3)$$

Первый член в правой части уравнения (I.I.2) непосредственно обязан магнитному моменту частицы. Второй член, пропорциональный нормальной части гиромагнитного отношения  $q_0 = \frac{e}{m}$  ( $[\vec{v} \dot{\vec{v}}] = \frac{q_0}{\gamma} [\vec{v} (\vec{E} + [\vec{v} \vec{H}])]$ ), описывает томасовскую прецессию и является следствием релятивистской кинематики вращения. Как видим, нормальная  $q_0$  и аномальная  $q_a = \gamma - q_0$  части гиромагнит-

ного отношения входят в уравнение для спина неаддитивно. Этот факт связан с искривлением траектории частицы.

При движении в заданных полях нормальная часть угловой частоты  $\vec{\Omega}$  уменьшается с энергией пропорционально  $\gamma$ . Не происходит уменьшение величины аномальной части угловой частоты прецессии при  $\gamma \rightarrow \infty$  (исключая случаи почти прямолинейного движения). При этой причине даже для электронов (у которых отношение  $g_a/g$  очень мало:  $g_a/g \approx 10^{-3}$ ) нельзя пренебречь аномальной частью частоты прецессии.

При равном нулю аномальном магнитном моменте частота прецессии при движении в магнитном поле ( $\vec{E} = 0$ ) совпадала бы с угловой частотой поворота скорости частицы, т.е. сохранялась проекция спина на направление скорости. В этом случае устойчивой могла бы быть лишь продольная поляризация. Аномальный магнитный момент, снимая это вырождение, делает спиновое движение более сложным и, в известной мере, независимым от орбитального движения.

Рассмотрим вопрос о преобразовании спиновых уравнений при переходе к какой-либо другой системе ортов  $\vec{e}_\alpha(t)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Пусть  $\vec{\Omega}_b$  — угловая скорость вращения базиса относительно исходной системы:

$$\dot{\vec{e}}_\alpha = [\vec{\Omega}_b, \vec{e}_\alpha].$$

Из этого соотношения получаем выражение для  $\vec{\Omega}_b$ :

$$\vec{\Omega}_b = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{e}_\alpha, \dot{\vec{e}}_\alpha].$$

Уравнения движения спина в новой системе будут следующими:

$$\dot{\vec{S}} = [(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_b) \vec{S}] \equiv [\vec{\Omega}_r, \vec{S}].$$

Спиновые уравнения можно записать в канонической форме:

$$\dot{\vec{S}} = \{ \vec{S}, \mathcal{H} \},$$

где  $\{ \dots, \dots \}$  — скобки Пуассона, классические, либо квантовые, а гамильтониан  $\mathcal{H} = \vec{\Omega}_r \vec{S}$ .

Спиновые уравнения в векторной форме, обладая геометрической наглядностью, являются системой дифференциальных уравнений третьего порядка. При их непосредственном решении часто целесообразно уменьшить порядок уравнения, что возможно благодаря существованию интеграла движения  $\vec{S}^2 = \text{const}$ .

Бывает удобным описывать движение спина в гамильтоновых переменных  $S_z$  и  $\psi$ , где  $S_z$  — проекция на выбранную ось, а  $\psi$  — фаза вращения спина вокруг этой оси. В этих переменных гамильтониан равен

$$\mathcal{H} = \vec{\Omega} \vec{S} = \Omega_z S_z + \Omega_\perp S_\perp \cos(\psi - \delta),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_\perp e^{i\delta} &= \Omega_x + i\Omega_y \\ S_\perp e^{i\psi} &= S_x + iS_y. \end{aligned}$$

Уравнения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \dot{S}_z &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = \Omega_\perp S_\perp \sin(\psi - \delta) \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_z} = \Omega_z - \Omega_\perp \frac{S_\perp}{S_z} \cos(\psi - \delta). \end{aligned}$$

Иногда используют неканонические переменные  $\arccos(S_z/S)$  и  $\psi$  [19].

Уравнения для  $(S_z, \psi)$  являются нелинейными. Линейную систему второго порядка можно получить для двух комплексных переменных  $\chi_+$ ,  $\chi_-$ , которые запишем в виде:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad \chi^\dagger = (\chi_+^*, \chi_-^*).$$

Для спина  $j = 1/2$  ( $\vec{S}^2 = \hbar^2 j(j+1)$ ) переменная  $\chi$  есть спиновая волновая функция, удовлетворяющая уравнению "Шредингера":

$$i \dot{\chi} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{\Omega} \chi, \quad (\text{I.I.4})$$

где  $\vec{\sigma}$  — матрицы Паули:



$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

причем

$$\frac{\hbar}{2} \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi = \vec{S} \quad , \quad \chi^\dagger \chi = |\chi_+|^2 + |\chi_-|^2 = 1 \quad , \quad (\text{I.I.5})$$

Поскольку векторные уравнения линейны и не зависят от величины спина, то преобразование (I.I.5) приведет к уравнению (I.I.4) и для произвольного спина. Смысл переменных  $\chi$  следующий:  $S_z/\hbar j = |\chi_+|^2 - |\chi_-|^2$ , а разность фаз  $\chi_-$  и  $\chi_+$  есть фаза  $\psi$  прецессии спина вокруг оси  $Z$ . Заметим, что матрица вращения  $O(t)$

$$\vec{S}(t) = O(t) \vec{S}(0)$$

дает знание не только среднего значения оператора спина  $\langle \vec{S} \rangle = \vec{S}$ , но и всей физической информации. С помощью  $O(t)$  волновая функция произвольного спина  $\chi_s(t)$  запишется в виде

$$\chi_s(t) = e^{-i \vec{S} \cdot \vec{\alpha}(t)} \chi_s(0) \quad ,$$

где  $\vec{\alpha}(t)$  – вектор угла поворота, определяемый матрицей вращения  $O$ . Уравнение (I.I.4) в случае произвольного спина  $j$  можно интерпретировать как уравнение для волновых функций  $\chi_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 2j$ )  $2j$  независимых частиц, из которых можно формально составить систему со спином  $j$  /80/.

Возможность перехода от векторных уравнений к "уравнениям Паули" (I.I.4) в действительности не имеет отношения к квантовой природе спина. Преобразование (I.I.5), вообще говоря, осуществляет спинорное представление ранга I группы вращений в трехмерном пространстве и может применяться для описания вращений векторов любой природы.

Уравнения в форме (I.I.4) использовались для описания движения спина в ускорителях (см., например, работы /15,30,81/).

## § 2. Движение спина на равновесной орбите

В традиционных накопителях и циклических ускорителях магнитное поле примерно постоянно по направлению и направлено поперек орбиты частиц. Имея в виду специально введенные поля, рассмотрим более общий случай, когда магнитное поле может сильно изменяться, а сама орбита отклоняться от плоской. Но в любой ситуации сохраняется важное свойство движения в накопителях или ускорителях — малость отклонения траекторий частиц от определенной равновесной (замкнутой) орбиты. Поэтому естественно при исследовании динамики поляризации поступить следующим образом: сначала решить задачу о движении спина на замкнутой траектории, а затем учесть влияние отклонений.

Удобно (как это обычно делается и при описании орбитального движения /82/) изменение спина рассматривать не с течением времени, а вдоль равновесной орбиты, определяя вектор  $\vec{S}$  функцией обобщенного азимута  $\theta$  движения частицы ( $\theta/2\pi$  — длина вдоль равновесной орбиты в единицах ее периметра). Это позволяет прямо узнавать поляризацию пучка в любом месте орбиты, например, в месте встречи пучков в накопителе. С учетом замены времени  $t$  в (I.12) на азимут  $\theta$  уравнения движения спина становятся следующими:

$$\vec{S}' \equiv \frac{d\vec{S}}{d\theta} = [\vec{W} \vec{S}], \quad (I.2.1)$$

где  $\vec{W} = \vec{\Omega} / \dot{\theta}$  — безразмерная (в единицах частоты обращения) угловая частота прецессии.

В приближении, что все частицы движутся по одной замкнутой орбите, задача о движении спинов может быть решена в самом общем виде. На замкнутой траектории угловая частота прецессии спина  $\vec{W} = \vec{W}_S(\theta)$  является периодической функцией обобщенного азимута  $\theta$  :

$$\vec{W}_S(\theta) = \vec{W}_S(\theta + 2\pi).$$

Для решения задачи о динамике поляризации достаточно построить решение уравнения движения спина

$$\vec{S}' = [\vec{W}_s \vec{S}] \quad (I.2.2)$$

на одном обороте частицы в ускорителе.

Рассмотрим группу частиц, начинающих свой путь с некоторого азимута  $\theta$  с различными начальными условиями для спинов. Так как движение спинов представляет собой вращение (сохраняется относительная ориентация спинов), то при любой сложности траектории спинов, описываемой уравнением (I.2.2), преобразование ориентации спинов через оборот сводится к простому повороту вокруг определенного направления  $\vec{n}_s$  ( $\vec{n}_s^2 = 1$ ) на один и тот же угол  $\Psi$ . Через два оборота спины, очевидно, повернутся вокруг  $\vec{n}_s$  на угол  $2\Psi$  и т.д., т.е. спины частиц будут вращаться вокруг  $\vec{n}_s$ . Ось вращения  $\vec{n}_s$  и угол  $\Psi$  определяются, конечно, структурой поля на всей орбите пучка и его энергией.

Пусть теперь поляризация в начальный момент направлена вдоль  $\vec{n}_s$ . Тогда, совершив в течение периода обращения частицы, вообще говоря, сложное движение  $\vec{n}_s(\theta)$ , поляризация вернется к исходному направлению и таким образом, будет повторяться в любом месте орбиты через произвольное число оборотов. Сказанное означает, что при любой конфигурации орбиты и поля на ней всегда существует периодическое движение поляризации, осуществляемое при специальном начальном условии.

Доказательство существования периодического движения спина можно провести и в более строгой форме. Общее решение уравнения (I.2.2) можно представить в виде комбинации трех линейно-независимых решений  $\vec{\xi}_\alpha(\theta)$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Так как скалярное произведение двух любых решений (I.2.2) сохраняется

$$\frac{d}{d\theta} \vec{S}_a \vec{S}_b = 0,$$

то эти три решения можно выбрать постоянно ортогональными:

$$\vec{\xi}_\alpha \vec{\xi}_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Собственные решения  $\vec{\eta}$  уравнения с периодически изменяющимися коэффициентами, как известно, обладают свойством /83/:

$$\vec{\eta}(\theta + 2\pi) = \lambda \vec{\eta}(\theta), \quad (\text{I.2.3})$$

где  $\lambda$  — собственные числа уравнения.

Разлагая  $\vec{\eta}$  по базису  $\vec{\xi}_\alpha$

$$\vec{\eta} = \sum_{\alpha=1}^3 \eta_\alpha \vec{\xi}_\alpha(\theta),$$

с помощью соотношения (I.2.3) получаем:

$$\sum_{\beta=1}^3 (\lambda \delta_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}) \eta_\beta = 0,$$

где

$$M_{\alpha\beta} = \vec{\xi}_\alpha(\theta) \vec{\xi}_\beta(\theta + 2\pi).$$

Матрица  $M$  не зависит от времени, так как  $\vec{\xi}_\beta(\theta + 2\pi)$  есть снова решение уравнения (I.2.2) из-за периодического изменения  $\vec{W}_S(\theta)$ . Нетривиальное решение существует, если определитель системы равен нулю:

$$|\lambda I - M| = 0.$$

Эти уравнение имеет три корня  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Так как матрица  $M$  является матрицей вращения, нетрудно показать, что одно из собственных чисел равно единице. Матрица вращения обладает свойствами:

$$|M| = 1, \quad M M^T = I,$$

где  $M^T$  — транспонированная матрица.

Отсюда для  $\lambda_1 = 1$  получаем, что

$$|I - M| = |I - M^T| = |M^T| |M - I| = (-1)^3 |I - M|,$$

а значит  $|I - M| = 0$ .

Следовательно всегда существует периодическое решение, которое обозначим  $\vec{n}_s(\theta)$ . Два других собственных значений  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$

можно найти, используя соотношения

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sum_{\alpha=1}^3 M_{\alpha\alpha} = \text{Sp } M,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |M| = 1.$$

Отсюда ( $\lambda_1 = 1$ ):

$$\lambda_2 = \lambda_3^* = e^{-2\pi i \nu}, \quad (\text{I.2.4})$$

$$\cos 2\pi \nu = \frac{1}{2} (\text{Sp } M - 1).$$

Нетрудно убедиться, что результат (I.2.4) не зависит от выбора базиса  $\vec{\xi}_\alpha$  и, что обобщенная спиновая частота прецессии  $\nu$  — действительная величина.

Собственные решения  $\vec{n}_s$ ,  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\eta}^*$ , соответствующие собственным значениям 1,  $\exp(-2\pi i \nu)$ ,  $\exp(2\pi i \nu)$  ортогональны, если  $\cos 2\pi \nu \neq 1$ :

$$\vec{\eta}^2 = \vec{\eta} \vec{n}_s = 0, \quad \vec{\eta} \vec{\eta}^* = 2.$$

В случае точного резонанса  $\cos 2\pi \nu = 1$  имеет место вырождение  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  и любое решение является периодическим.

Решение для спина с произвольными начальными условиями можно записать через сохраняющиеся проекции на собственные вектора:

$$\vec{S} = S_{\vec{n}_s} \vec{n}_s + S_{\perp} \vec{\eta} / 2 + S_{\perp}^* \vec{\eta}^* / 2,$$

где  $S_{\vec{n}_s} = \vec{S} \vec{n}_s$  и  $S_{\perp} = \vec{S} \vec{\eta}^*$  — постоянны ( $|S_{\perp}|^2 + S_{\vec{n}_s}^2 = \vec{S}^2$ ).

Можно ввести два ортогональных к  $\vec{n}_s$  орта  $\vec{\ell}_1$  и  $\vec{\ell}_2$  из соотношения

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + i \vec{\ell}_2 = \vec{\eta} e^{i\nu\theta}. \quad (\text{I.2.5})$$

Орты  $\vec{\ell}_1$  и  $\vec{\ell}_2$ , благодаря свойству (I.2.3), так же, как и  $\vec{n}_s$  являются периодическими:

$$\vec{\ell}(\theta + 2\pi) = \vec{\ell}(\theta).$$

Уравнение движения спина на равновесной орбите в системе подвижных ортов  $\vec{n}_s$ ,  $\vec{\ell}_1$ ,  $\vec{\ell}_2$  следующее:

$$\vec{S}' = [(\vec{W}_s - \vec{W}_b) \vec{S}] = \gamma [\vec{n}_s \vec{S}], \quad (I.2.6)$$

где обобщенная спиновая частота прецессии равна:

$$\gamma = \vec{W}_s \vec{n}_s - \vec{\ell}'_1 \vec{\ell}'_2. \quad (I.2.7)$$

Удобство использования именно периодических ортов заключается в том, что при наблюдении спина в определенном месте орбиты, изменение поляризации через оборот частицы в ускорителе будет таким же в этой системе как в лабораторной (относительно неподвижной системы ортов).

Периодическое решение  $\vec{n}_s$  и обобщенная частота  $\gamma$  также просто выражается через матрицу, преобразующую через период двумерный комплексный вектор  $\chi$  (см. уравнение (I.I.4)). Пусть известна матрица  $U$  (эта матрица, очевидно, имеет размерность  $2 \times 2$ ), переводящая "волновую функцию"  $\chi$  при  $\theta = 0$  через период  $2\pi$ :

$$\chi_{2\pi} = U \chi_0$$

Так как матрица  $U$  унитарна ( $U^\dagger U = I$ ), ее можно записать в виде:

$$U = e^{-i\pi\gamma \vec{\sigma} \vec{n}_s(0)} = \cos \pi\gamma - i \vec{\sigma} \vec{n}_s(0) \sin \pi\gamma. \quad (I.2.8)$$

Смысл  $\vec{n}_s(0)$  и  $\gamma$  следующий:  $\vec{n}_s(0)$  — направление, вокруг которого нужно повернуть на угол  $2\pi\gamma$  спин  $\vec{S}(0)$ , чтобы получить решение через период  $\vec{S}(2\pi)$ . Отсюда с очевидностью следует, что  $\vec{n}_s(0)$  совпадает с периодическим решением  $\vec{n}_s(\theta)$  в моменты  $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ , а  $2\pi\gamma$  и есть угол, на который поворачивается поперечное к  $\vec{n}_s$  решение через период. Явные выражения для  $\vec{n}_s$  и  $\gamma$  получаются из соотношения (I.2.8):

$$\cos \pi\gamma = \frac{1}{2} \text{Sp } U, \quad \vec{n}_s(0) = \frac{i}{2 \sin \pi\gamma} \text{Sp } \vec{\sigma} U. \quad (I.2.9)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости периодического решения  $\vec{n}_s$  при малом варьировании  $\vec{W}_s$ . Вариация  $\delta \vec{W}_s$  может быть свя-



зана как с отклонением реального поля и замкнутой орбиты от идеальных (расчетных), так и с изменением параметров (например, энергии), определяющих  $\vec{W}_s$ . В линейном приближении  $\delta \vec{n}_s$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{d\theta} \delta \vec{n}_s = [\vec{W}_s \delta \vec{n}_s] + [\delta \vec{W}_s \vec{n}_s].$$

В этом приближении  $\delta \vec{n}_s$  поперечно  $\vec{n}_s$ :

$$\delta \vec{n}_s = \text{Re } C(\theta) \vec{\eta}$$

Для  $C$  получаем уравнение

$$C' = i \delta \vec{W}_s \vec{\eta}^*.$$

Отсюда

$$C = i \int_{-\infty}^{\theta} \delta \vec{W}_s \vec{\eta}^* d\theta = i \int_{-\infty}^{\theta} \delta \vec{W}_s \vec{\ell}^* e^{i\nu\theta} d\theta.$$

Постоянная интегрирования равна нулю из условия периодичности для  $\vec{n}_s$ . Интегрирование от  $-\infty$  понимается как предел с отрицательной малой мнимой добавкой к  $\nu$ :  $\nu \rightarrow \nu - i0$ .

Таким образом:

$$\delta \vec{n}_s = \text{Re } i \vec{\eta} \int_{-\infty}^{\theta} \delta \vec{W}_s \vec{\eta}^* d\theta. \quad (\text{I.2.I0})$$

Эквивалентное выражение можно получить, разлагая в ряд Фурье

$$\delta \vec{W}_s \vec{\ell}^* = \sum_k w_k e^{-ik\theta}.$$

Получаем:

$$\delta \vec{n}_s = \text{Re } \vec{\ell} \sum_k \frac{w_k}{\nu - k} e^{-ik\theta}. \quad (\text{I.2.II})$$

Видим, что периодическое решение становится очень чувствительным вблизи резонансов  $\nu = k$ . В этом заключается физический смысл отмеченной неопределенности  $\vec{n}_s$  в точном резонансе.

### § 3. Простые примеры

Доказательство устойчивости поляризации в любом поле накопителя (ускорителя) открыло широкие возможности управления поляризацией пучка в местах встреч. Рассмотрим несколько простых примеров.

#### а) Идеальный накопитель

В идеальном накопителе равновесная орбита является плоской, а магнитное поле  $\vec{H}$  всюду поперечно плоскости орбиты

$$\vec{H}_s = \mathcal{K}_z \langle H_z \rangle \vec{e}_z,$$

где  $\mathcal{K}_z = H_z / \langle H_z \rangle$  – безразмерная кривизна равновесной орбиты, а

$$\langle H_z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_z d\theta$$

среднее значение магнитного поля вдоль орбиты. В идеальном накопителе отсутствует связь вертикальных  $Z$  колебаний с радиальными  $X$  –колебаниями и фазовыми.

При движении по равновесной орбите спин прецессирует вокруг вертикального направления с угловой скоростью

$$\vec{\omega}_s = (1 + \nu_0) \mathcal{K}_z \vec{e}_z,$$

где  $\nu_0 = \gamma q_a / q_0$ . В круглом накопителе  $\mathcal{K}_z = 1$  и спин прецессирует с постоянной частотой, равной  $(1 + \nu_0)$  относительно лабораторной системы ортов.

Свойством периодичности по азимуту в идеальном накопителе обладает решение для спина, направленное по полю:

$$\vec{n}_s = \vec{e}_z.$$

Ортогональное решение вращается вокруг  $\vec{e}_z$ :

$$\vec{\eta} = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \exp(-i \nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_z),$$

где  $\tilde{\mathcal{K}}_z = \int_0^\theta \mathcal{K}_z d\theta$ ,  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  – орты, лежащие в плоскости орбиты и направленные, соответственно, по нормали и

вдоль равновесной траектории (ускорительный базис) /82/:

$$\vec{e}_y = \vec{v}_s / v_s, \quad \vec{e}_x' = \mathcal{K}_z \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y' = -\mathcal{K}_z \vec{e}_x$$

( $\vec{v}_s$  — скорость частицы на равновесной орбите).

Так как собственное решение для спина  $\vec{\eta}$  через оборот поворачивается на угол  $2\pi\nu_0$ , обобщенная частота прецессии в идеальном накопителе равна  $\nu = \nu_0$ . Периодические орты  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , относительно которых спин вращается с постоянной угловой скоростью  $\nu_0$ , выражаются через ускорительный базис, следующим образом:

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + i \vec{\ell}_2 = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \exp[-i\nu_0(\mathcal{K}_z - \theta)]$$

и в круглом накопителе совпадают с  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$ . В накопителе с прямолинейными промежутками компонента спина, лежащая в плоскости орбиты, вращается вокруг  $\vec{n}_s = \vec{e}_z$  относительно  $\vec{e}_x$  с переменной угловой скоростью  $\nu_0 \mathcal{K}_z$  и с постоянной скоростью  $\nu_0 \langle \mathcal{K}_z \rangle = \nu_0$  относительно орта  $\vec{\ell}_1$ .

Хорошо известно, что малые возмущающие поля сильно воздействуют на движение спина вблизи значений  $\nu_0 = K$  /15-20/. Резонансными являются значения энергии, кратные 440,7 МэВ для электронов и 1682 МэВ для протонов.

#### б) Идеальный накопитель со вставкой в промежуток полей для получения продольной поляризации в месте встречи

Принципиально простыми являются способы получения продольной поляризации, основанные на преобразовании поперечной поляризации в продольную поперечными к скорости и спину магнитными полями. При этом используется разница угловых скоростей вращения спина и скорости, связанная аномальным магнитным моментом. В ускорителях такое преобразование поляризации в продольную может осуществляться после вывода пучка из ускорителя перед мишенью. В накопителях со встречными пучками из-за циклического движения частиц необходимо обеспе-

чить на выбранном участке траектории повторяемость созданной поляризации от оборота к обороту на протяжении всего времени эксперимента. Для этого можно после преобразования поляризации в продольную сделать обратный поворот с восстановлением орбиты и направления поляризации частиц.

В простейшем варианте повороты осуществляются радиальным магнитным полем  $H_x$  в прямолинейном промежутке  $0 < \theta < \theta_0$  накопителя (на участке, где основное поле накопителя отсутствует). Варьируя значения  $H_x$  по промежутку, можно получить требуемое направление поляризации в месте встречи. Это способы представляют практический интерес при достаточно высоких энергиях ( $\gamma q_a/q \gg 1$ , при  $\mathcal{E} \gg 440$  МэВ для электронов и  $\mathcal{E} \gg 1$  ГэВ для протонов), когда получающееся от введения дополнительных полей вертикальное искажение орбиты в промежутке относительно мало. Применение поперечных полей при низких энергиях, хотя принципиально и возможно, требует значительной деформации равновесной орбиты.

Для поворота спина относительно скорости частицы на угол  $\pi/2$  требуемая величина произведения однородного магнитного поля на длину поворота  $\ell$  независимо от энергии равна:

$$H_x \ell = \pi/2 q_a$$

и для электронов составляет 23 кГс·м, для протонов – 27 кГс·м, для дейтронов – 680 кГс·м (близость значений полей для электронов и протонов связана с тем, что аномальные магнитные моменты электронов и протонов почти равны по абсолютной величине).

Для восстановления вертикального направления поляризации необходимо, чтобы равнялось нулю среднее значение радиального поля в промежутке:

$$\int_0^{\theta_0} H_x(\theta) d\theta = 0.$$

Это же условие обеспечивает восстановление и направление скорости частицы. Если требуется восстановить и положение орбиты на выходе

из промежутка, нужно наложить дополнительное условие, которое выпишем в приближении, когда  $\gamma q_a/q \gg 1$ :

$$\int_0^{\theta_0} \theta H_x d\theta = 0.$$

Периодическое решение  $\vec{n}_s$ , по-прежнему, направлено по оси  $z$  на основном участке накопителя  $\theta_0 < \theta < 2\pi$ . В промежутке  $0 < \theta < \theta_0$  с радиальными полями равновесная поляризация в точке  $\theta$  составляет угол

$$\varphi_\theta = \frac{\nu_0}{\langle H_z \rangle} \int_0^\theta H_x d\theta$$

с направлением скорости:

$$\vec{n}_s(0 \div \theta_0) = \cos \varphi_\theta \vec{e}_z + \sin \varphi_\theta \vec{e}_x. \quad (I.3.1)$$

Продольная поляризация осуществляется в местах орбиты, где  $\varphi_\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ . На выходе из промежутка  $\varphi_{\theta_0} = 0$  и восстанавливается вертикальное направление равновесной поляризации. Ортогональное решение  $\vec{\eta}$  запишется в виде:

$$\vec{\eta}(0 \div \theta_0) = \vec{e}_x + i (\cos \varphi_\theta \vec{e}_y - \sin \varphi_\theta \vec{e}_x),$$

$$\vec{\eta}(\theta_0 \div 2\pi) = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \exp(-i\nu_0 \tilde{\chi}_z)$$

Видим, что через оборот решение  $\vec{\eta}$  поворачивается на угол  $2\pi\nu_0$ :  $\vec{\eta}_{2\pi} = \vec{\eta}_0 \exp(-2\pi i\nu_0)$ . Значит приведенная частота остается такой же, как и без вставки с радиальными полями:  $\nu = \nu_0$ .

Периодические орты  $\vec{\ell}_1$  и  $\vec{\ell}_2$  равны:

$$\vec{\ell}(0 \div \theta_0) = \vec{e}_x + i (\cos \varphi_\theta \vec{e}_y - \sin \varphi_\theta \vec{e}_x), \quad (I.3.2)$$

$$\vec{\ell}(\theta_0 \div 2\pi) = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \exp[-i\nu_0(\tilde{\chi}_z - \theta)].$$

Выбор конкретного варианта определяется экспериментальными условиями. Например, траектория частицы в промежутке может иметь вид, изображенный на рис.1а. Радиальное магнитное поле поперечно плоскости рисунка и введено в областях I, II и III. Продольная поляри-

зация противоположных направлений осуществляется между областями I, II и II, III (стрелками указано направление поляризации),

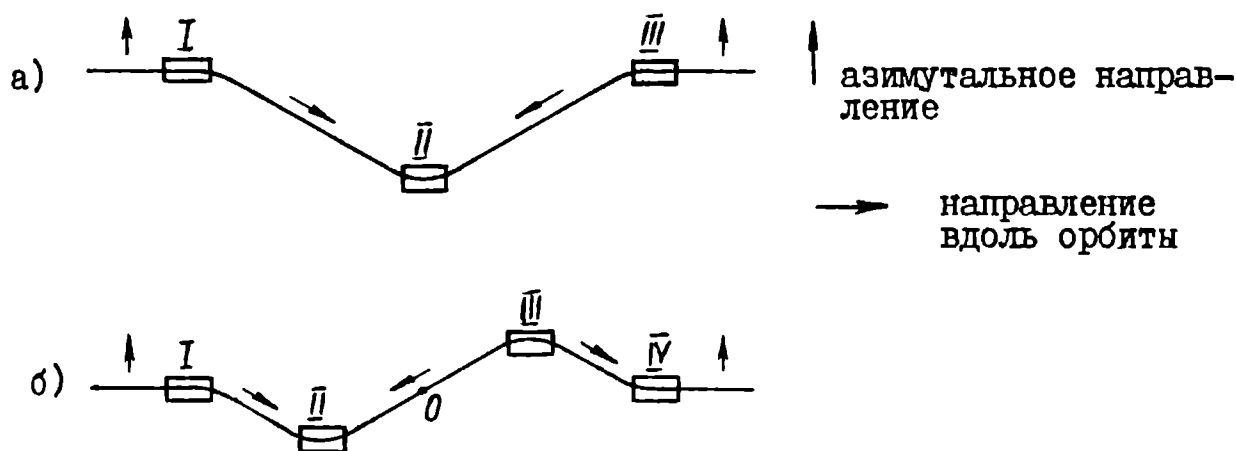


Рис. I. Схемы продольной поляризации радиальными полями с восстановлением орбиты:

- а) введением полей в трех участках,
- б) введением полей в четырех участках.

В работе /84/ описан вариант, изображенный на Рис. Iб. Особенность этого варианта заключается в том, что встреча продольно-поляризованных частиц осуществляется в точке 0, положение которой по вертикали не зависит от энергии.

Максимальная амплитуда вертикальных искажений орбиты в промежутке зависит от энергии и выбранного варианта.

Общим свойством вариантов с радиальным полем является то, что в точке осуществления продольной поляризации угол наклона скорости относительно горизонтальной плоскости зависит от энергии и равен  $\tilde{\eta}/(2\gamma_0)$ . Это может представлять неудобства. Переход к сложным вращениям в изменяющемся по направлению магнитном поле в промежутке устраняет эту связь и дает дополнительную свободу управления поляризацией и орбитой.

Приведем пример с полным восстановлением положения орбиты и скорости в месте получения продольной поляризации. Введем в промежуток поперечное винтовое магнитное поле на длине  $\ell_0$  с одним периодом:

$$H_x + i H_z = i e^{i\alpha} H_1^0 e^{i\varphi y},$$

где  $H_1^0 = \text{const}$ ,  $\varphi \ell_0 = 2\pi$ ,  $\alpha = \text{const}$  — угол с осью  $Z$  начальной ориентации поля. Если величина  $\alpha$  и  $H_1^0 \ell_0$  выбраны примерно:  $\alpha \approx 0,26$ ,  $H_1^0 \ell_0 \approx 2,07\pi/q_a$  ( $H_1^0 \ell_0 \approx 95$  кГс.м для электронов и  $H_1^0 \ell_0 \approx 110$  кГс.м для протонов), то после прохождения такого участка спин изменяет свое вертикальное направление на продольное с восстановлением скорости. Возникающее пространственное смещение орбиты в направлении, близком к вертикальному (на величину  $\Delta Z \approx \approx \ell_0 / \nu_0$ ) легко компенсируется введением перед местом встречи горизонтального магнитного поля с равным нулю средним значением, уже не искажающим направление спина и скорости. Обратный поворот спина к вертикальному направлению после участка встречи производится аналогично зеркально отображенными полями.

Сегодня уже существует много предложенных вариантов получения продольной поляризации с восстановлением спинового и орбитального движений на выходе из промежутка (см., например, /85,86/).

#### в) Пример с одной сибирской змейкой

Условие восстановления спина на выходе участка с введенными полями не является обязательным. Поля, поворачивающие спин на результирующий угол порядка единицы при однократном пролете, не разрушают устойчивости спинового движения, но приводят к сильному изменению направления равновесной поляризации. Введение сильного поля в общем случае дает возможность получать поляризованные пучки и в областях энергий, кратных  $e/q_a$  ( $\approx 440$  МэВ для электронов

и  $\approx 1680$  МэВ для протонов), являющихся резонансными в идеальном накопителе.

Рассмотрим один из способов создания продольной поляризации на всей длине промежутка без искажений орбиты. Принципиальная схема может быть следующей. Допустим, что в промежутке I без магнитного поля осуществлена продольная поляризация. В обычном накопителе с всюду вертикальным полем через оборот спин частицы оказывается повернутым вокруг вертикальной оси на угол  $2\pi \gamma q_a / q_0$ , и поэтому продольная поляризация не может повторяться от оборота к обороту. Для компенсации поворота спина достаточно в противолежащем промежутке II дополнительными полями повернуть спин вокруг скорости на угол  $\pi$  (рис.2). Таким образом, обеспечивается периодическое по орбите движение спина с осуществлением продольной поляризации в промежутке I на всей его длине.

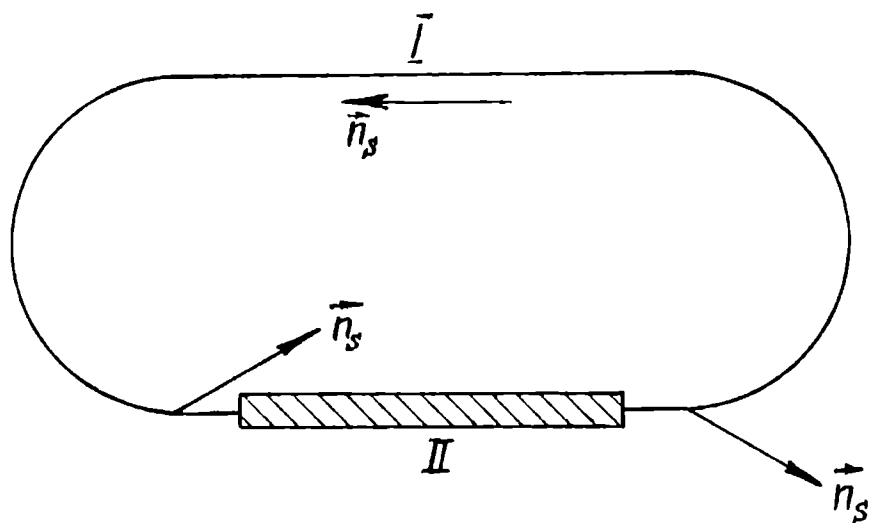


Рис.2. Показана плоскость орбиты частиц. Стрелками указано направление равновесной поляризации  $\vec{n}_s$ . При повороте спина с промежутке II на угол  $\pi$  вокруг скорости осуществляется продольная поляризация в промежутке I при любой энергии.

Вне промежутка I ориентация  $\vec{n}_s$  зависит от энергии частиц.

Для нахождения частоты прецессии спина  $\nu$  достаточно проследить за движением спина, ориентированного поперек  $\vec{n}_s$ . Так, спин, ориентированный в промежутке I в вертикальном направлении



поперек орбиты, через оборот частицы оказывается перевернутым, т.е. поворачивается вокруг  $\vec{n}_s$  на угол  $\pi$ . Таким образом, дробная часть частоты прецессии в этом варианте всегда равна половине, независимо от энергии:

$$\cos \pi \nu = 0. \quad (I.3.3)$$

Частота прецессии в рассмотренном примере кардинально отличается от ее значения в обычном накопителе, в котором  $\nu = \gamma q_a / q_0$  и непрерывно изменяется с изменением энергии. Так как  $\nu = 1/2$ , то, правильно выбирая частоты бетатронных колебаний, легко удалиться от всех опасных резонансов и тем самым при любой энергии обеспечить устойчивость поляризации пучка, направленной в промежутке I вдоль скорости. Небольшие ошибки в магнитной системе не могут привести к нарушению устойчивости периодического движения спина. Заметим, что так созданная поляризация более устойчива при перестройках энергии, чем в накопителе с вертикальным полем, для которого всегда существуют резонансные области энергий.

Для поворота спина в промежутке II можно применить продольное магнитное поле, требуемая величина которого на длине  $\ell$  равна

$$H_v = \gamma \pi / (q \ell),$$

или

$$H_v (\text{кГ}) \cdot \ell (\text{м}) \simeq 100 \frac{q_0}{q} E (\text{ГэВ}).$$

Продольное поле не изменяет орбиты, а вносимую им связь и сдвиг частот бетатронных колебаний при необходимости можно компенсировать дополнительными линзами.

При больших энергиях ( $\gamma_0 \gg 1$ ) целесообразнее использовать поперечные к скорости магнитные поля, так как требуемая величина этих полей на той же длине примерно в  $\gamma_0$  раз меньше требуемой величины продольного поля. Для того, чтобы одновременно компенсировать искажение орбиты, нужно использовать повороты вокруг двух осей. Один из возможных вариантов поворота спина вокруг скорости

на угол  $\mathcal{T}$  радиальными и вертикальными полями с восстановлением орбиты на выходе промежутка II показан на рис.3.

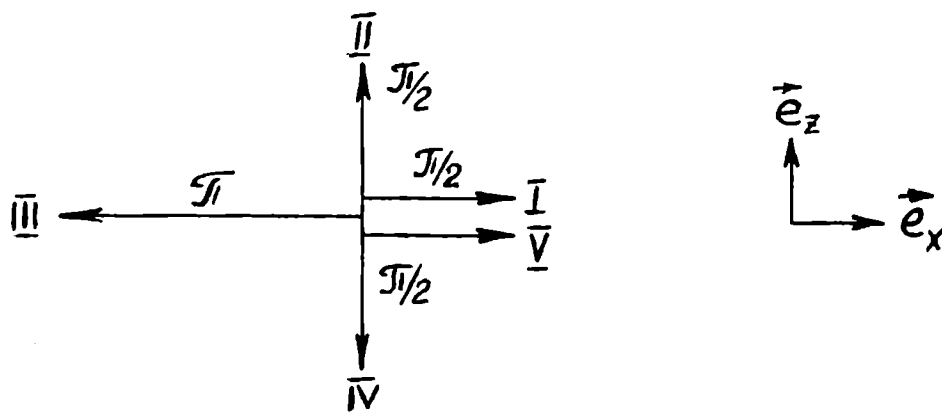


Рис.3. Схема поворота спина вокруг скорости на угол  $\mathcal{T}$  поперечными магнитными полями. Скорость частицы поперечна плоскости рисунка, стрелками указано направление полей.

В пять последовательных участков I, II, III, IV и V вводятся чередующиеся радиальные и вертикальные поля. Поля на участках I, II, IV, V поворачивают спин на угол  $\mathcal{T}/2$  вокруг направлений полей, а центральный участок III с радиальным полем поворачивает на угол  $\mathcal{T}$  вокруг радиального направления. Легко проследить, что спин после прохождения этих пяти участков оказывается повернутым на угол  $\mathcal{T}$  вокруг скорости. Восстанавливается также направление скорости частицы. Возникающее же радиальное смещение орбиты легко компенсируется на последующем участке вертикальным полем с равным нулю средним значением, уже не искажающим направление спина и скорости.

Приведенная частота прецессии  $\gamma$  равна половине при повороте спина на угол  $\mathcal{T}$  в промежутке II вокруг любого направления, лежащего в плоскости орбиты. При этом в противолежащем промежутке I равновесная поляризация направлена вдоль результирующей оси поворота спина в промежутке II. Например, схема, изображенная на Рис.4, осуществляет поворот спина вокруг радиального направления. С использованием этой змейки равновесная поляризация в промежутке I становится радиальной. Продольная поляризация осуществляется в месте орбиты отстоящей от промежутка I на азимут  $\theta_n$ , на котором спин повернется на  $90^\circ$ :

$$\int_0^{\theta_n} \mathcal{H}_z d\theta = \frac{\mathcal{H}}{2\nu_0}.$$

Это место орбиты, очевидно, будет зависеть от энергии частиц.

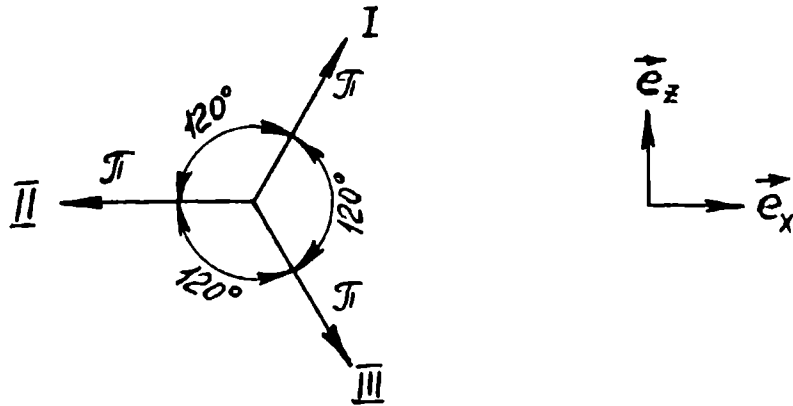


Рис.4. Схема поворота спина вокруг радиального направления. На каждом из трех участков спин поворачивается на угол  $\mathcal{H}$ .

Направление равновесной поляризации  $\vec{n}_s$  и ортогонального решения  $\vec{\eta}$  выпишем на основном участке накопителя  $\theta_0 < \theta < 2\pi$ , например, в накопителе со змейкой, изображенной на Рис.3:

$$\vec{n}_s(0) = \vec{n}_s(2\pi) = \vec{e}_x \sin \pi \nu_0 + \vec{e}_y \cos \pi \nu_0, \quad (\text{I.3.4})$$

$$\vec{n}_s(\theta_0 \div 2\pi) = \vec{e}_x \sin \nu_0 (\tilde{\mathcal{H}}_2 - \pi) + \vec{e}_y \cos \nu_0 (\tilde{\mathcal{H}}_2 - \pi),$$

$$\vec{\eta}(0) = -\vec{\eta}(2\pi) = \vec{e}_x \cos \pi \nu_0 - \vec{e}_y \sin \pi \nu_0 - i \vec{e}_z,$$

$$\vec{\eta}(\theta_0 \div 2\pi) = -\vec{e}_x \cos \nu_0 (\tilde{\mathcal{H}}_2 - \pi) + \vec{e}_y \sin \nu_0 (\tilde{\mathcal{H}}_2 - \pi) + i \vec{e}_z.$$

Сегодня предложены уже и другие схемы змеек (см., например, /87-89/).

#### г) Пример с двумя змейками

Основным достоинством накопителя со змейкой является независимость приведенной частоты прецессии от энергии. На основном участке с вертикальным полем в схеме с одной змейкой равновесная поляризация направлена поперек поля и при высокой энергии может совершать много оборотов за период обращения частиц. Можно получить

частоту прецессии, равную половине независимо от энергии, оставив на основном участке направление равновесной поляризации вдоль поля.

Введем две змейки в два противолежащих промежутка. Результирующие оси вращения этих змеек пусть лежат в плоскости орбиты и составляют между собой угол  $\pi/2$ . Например, в промежутке I используем схему змейки, изображенную на Рис.3, а в промежутке II – схеме Рис.4.

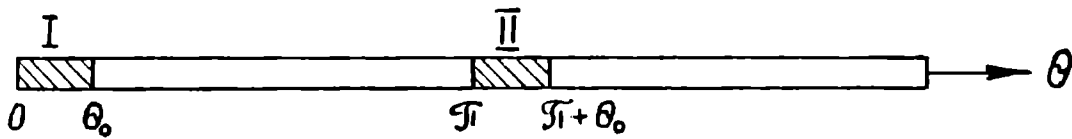


Рис.5. Схема накопителя с двумя змейками

Использование двух змеек позволяет сохранить равновесную поляризацию вдоль вертикального направления. Направление  $\vec{n}_s$  меняет знак после прохождения змейки:

$$\vec{n}_s(\theta_0 \div \pi) = \vec{e}_z, \quad \vec{n}_s(\pi + \theta_0 \div 2\pi) = -\vec{e}_z.$$

Приведем выражения для ортогонального решения в рассматриваемом примере на основных участках:

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(0) &= -\vec{e}_x + i\vec{e}_y, & \vec{\eta}(\theta_0) &= \vec{e}_x + i\vec{e}_y, \\ \vec{\eta}(\theta_0 \div \pi) &= (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \exp(-i\nu_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \mathcal{K}_2 d\theta), & (I.3.5) \\ \vec{\eta}(\pi + \theta_0) &= (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \exp(-i\nu_0 \pi), \\ \vec{\eta}(\pi + \theta_0 \div 2\pi) &= (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \exp i\nu_0 \left( \int_{\pi + \theta_0}^{\theta} \mathcal{K}_2 d\theta - \pi \right). \end{aligned}$$

Видим, что  $\vec{\eta}(2\pi) = -\vec{\eta}(0)$ , поэтому приведенная частота, как и в схеме с одной змейкой, остается равной половине.

Рассмотренные примеры показывают, что не представляет труда выбором нужной комбинации магнитных полей получить любое направ-

ление поляризации в нужном месте орбиты. Выбор наиболее приемлемой конфигурации полей определяется в каждом случае конкретными экспериментальными условиями.

#### § 4. Движение спина частиц, отклоненных от замкнутой орбиты

Перейдем к исследованию устойчивости периодического движения спина частиц, движущихся возле замкнутой орбиты. В системе периодических ортов  $\vec{\ell}_1$ ,  $\vec{\ell}_2$ ,  $\vec{n}_s$  уравнения движения спина выглядят следующим образом:

$$\vec{S}' = [(\nu \vec{n}_s + \vec{w}) \vec{S}] , \quad (I.4.1)$$

где  $\vec{w} = \vec{W} - \vec{W}_s$ . Если движение происходит по равновесной траектории ( $\vec{w} = 0$ ), то уравнение совпадает с (I.2.6) и описывает прецессию вокруг  $\vec{n}_s$  с частотой  $\nu$ . Возмущение  $\vec{w}$  связано с малыми отклонениями движения частиц от равновесной орбиты. Таким образом, переход в подвижную систему позволяет свести задачу к исследованию устойчивости движения спина в однонаправленном поле. При этом становится возможным пользоваться приемами и методами, которые применимы и при исследовании поведения спина в обычных накопителях с вертикальным полем.

Нетрудно убедиться в динамической устойчивости поляризации пучка, направленной вдоль  $\vec{n}_s$ . Разложим в ряд Фурье поперечные к  $\vec{n}_s$  компоненты  $\vec{w}$ :

$$w_1 \equiv \vec{w} \vec{\ell}^* = \sum_k w_k \exp(-i \psi_k) , \quad (I.4.2)$$

где  $w_k$  — амплитуда Фурье-гармоники, зависящая от амплитуд колебаний возле равновесной орбиты,

$$\psi_k = K_\theta \theta + K_z \psi_z + K_x \psi_x + K_y \psi_y -$$

целочисленная комбинация из фаз, соответственно, обращения, вертикальных и радиальных бетатронных колебаний и синхротронных колебаний ( $\psi'_z = \nu_z$ ,  $\psi'_x = \nu_x$ ,  $\psi'_y = \nu_y$  - приведенные частоты соответствующих колебаний). Решая уравнение движения спина (I.4.1) в первом приближении по  $\vec{\omega}$  имеем:

$$S_{||} = \bar{S}_{||} + \operatorname{Re} \left[ S_{\perp} \sum_k \frac{\omega_k}{\nu - \nu_k} e^{i(\nu\theta - \psi_k)} \right], \quad (\text{I.4.3})$$

где  $\bar{S}_{||}$  - среднее значение проекции спина на направление  $\vec{n}_s$ ,  $S_{\perp} = \text{const}$ , ( $|S_{\perp}|^2 = \vec{S}^2 - \bar{S}_{||}^2$ ).

Таким образом, под действием возмущения  $\vec{\omega}$  проекции спина будет испытывать малые колебания возле среднего положения. Исключением являются небольшие области спиновых резонансов. Ширина опасного интервала определяется величиной соответствующей Фурье-гармоники возмущения:

$$|\nu - \nu_k| \lesssim |\omega_k|. \quad (\text{I.4.4})$$

В области резонанса отклонение спина будет медленно нарастать со временем. Через время  $\sim |\omega_k|^{-1}$  произойдет изменение проекции  $S_{||}$  на величину порядка единицы и формула (I.4.3) станет неприменимой.

Движение спина на неравновесной траектории можно представить в другой форме весьма полезной для дальнейшего. На незамкнутой траектории по аналогии можно также ввести понятие изменяющейся вдоль траектории оси прецессии  $\vec{n}$ . Вектор угловой частоты  $\vec{\omega}$  в стационарных условиях движения, записанный как функция переменных действий  $I_i$  (амплитуд) и фаз  $\psi_i$  бетатронных и синхротронных колебаний, обладает свойством периодичности по всем фазам  $\psi_i$ :

$$\vec{\omega}(I_i, \psi_i, \theta) = \vec{\omega}(I_i, \psi_i + 2\pi, \theta) = \vec{\omega}(I_i, \psi_i, \theta + 2\pi). \quad (\text{I.4.5})$$

Точно так же, как и в случае однопериодической зависимости при движении по замкнутой орбите, существует единственно возможное направление оси прецессии  $\vec{n}$  (исключая точки спиновых резонансов), тоже обладающее свойством периодичности по фазам:

$$\vec{n}(I_i, \psi_i, \theta) = \vec{n}(I_i, \psi_i + 2\pi, \theta) = \vec{n}(I_i, \psi_i, \theta + 2\pi). \quad (\text{I.4.6})$$

Строгое доказательство этого утверждения приведено в Приложении I. Вектор  $\vec{n}$ , являясь решением уравнения движения спина (I.4.I), содержит лишь частоты орбитального движения. Проекция спина  $S_n = \vec{S} \cdot \vec{n}$  является точным интегралом движения в поле накопителя (ускорителя), спиновой переменной действия (спиновым квантовым числом). Канонически сопряженной величиной является фаза прецессии вокруг  $\vec{n}$ . Направление оси прецессии  $\vec{n}$  повторится в тот момент, когда частица возвратится в ту же точку фазового пространства (в ту же пространственную точку и с той же скоростью).

При движении по замкнутой орбите  $\vec{n}$  переходит в  $\vec{n}_s$ . Отклонение  $\vec{n} - \vec{n}_s$  может быть найдено по теории возмущений следующим образом. Ищем ось прецессии  $\vec{n}$  в виде:

$$\vec{n} = \sqrt{1 - |C|^2} \vec{n}_s + R \epsilon \vec{\ell} \quad (\text{I.4.7})$$

С помощью (I.4.I), получаем уравнение для  $C$ :

$$C' = i \sqrt{1 - |C|^2} \omega_{\perp} - i (\nu + \omega_{||}) C \quad (\text{I.4.8})$$

Частоту прецессии спина на неравновесной траектории можно найти, построив два поперечных к  $\vec{n}$  ортогональных (периодических по фазам орбитального движения) ортов  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$ , переходящих на равновесной траектории в  $\vec{\ell}_1$  и  $\vec{\ell}_2$ . Комплексный орт  $\vec{L} = \vec{L}_1 + i \vec{L}_2$ , обладающий указанным свойством, запишется в виде

$$\vec{L} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - |C|^2}) \vec{\ell} - C^* \vec{n}_s - \frac{(C^*)^2}{2(1 + \sqrt{1 - |C|^2})} \vec{\ell}^* \quad (\text{I.4.9})$$

Легко проверить, что  $\vec{L} \vec{n} = \vec{L}^2 = 0$ ,  $\vec{L} \vec{L}^* = 2$ . Полная частота прецессии  $\nu_n$  вокруг  $\vec{n}$  определяется формулой, аналогичной (I.2.7) для однопериодической зависимости:

$$\nu_n = \langle \vec{w} \vec{n} - \vec{L}' \vec{L}_2 \rangle = \langle \vec{w} \vec{n} + \frac{1}{2} \text{Im} \vec{L}' \vec{L}^* \rangle, \quad (\text{I.4.I0})$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по всем фазам движения (вдоль траекторий частиц).

Производя несложные вычисления, имеем:

$$\nu_n = \nu + \langle w_{||} \rangle + \left\langle \frac{\text{Re } c w_{\perp}^*}{1 + \sqrt{1 - |c|^2}} \right\rangle. \quad (\text{I.4.II})$$

Основываясь на формулах (I.4.7) и (I.4.II) для  $\vec{n}$  и  $\nu_n$ , с помощью уравнения (I.4.8) можно строить теорию возмущения по малой, вдали от спиновых резонансов, величине  $|c|$ .

Так, в первом приближении по  $\vec{w}$  получаем:

$$c = i e^{-i\nu\theta} \int_{-\infty}^{\theta} w_{\perp}(\theta') e^{i\nu\theta'} d\theta'. \quad (\text{I.4.I2})$$

Здесь постоянная интегрирования равна нулю, так как  $\vec{n}$ , по определению, не должна содержать явной зависимости от времени, а спектр  $\vec{n}$  содержит лишь частоты орбитального движения. Эквивалентную формулу для  $c$  можно получить, разложив возмущение  $w_{\perp}$  в ряд Фурье (формула (I.4.2)):

$$c = \sum_{\kappa} \frac{w_{\kappa}}{\nu - \nu_{\kappa}} e^{-i\psi_{\kappa}}. \quad (\text{I.4.I3})$$

Следовательно, с линейной точностью по  $\vec{w}$  имеем:

$$\Delta \vec{n} = \vec{n} - \vec{n}_s = \text{Re} \vec{\eta} \int_{-\infty}^{\theta} \vec{w} \vec{\eta}^* d\theta = \text{Re} \vec{\ell} \sum_{\kappa} \frac{w_{\kappa}}{\nu - \nu_{\kappa}} e^{-i\psi_{\kappa}},$$

$$\nu_n = \nu + \langle w_{||} \rangle. \quad (\text{I.4.I4})$$

Так как при усреднении  $w_{||}$  его величина становится пропорциональной квадрату амплитуд колебаний возле равновесной орбиты,



часто необходимо учитывать следующее приближение при нахождении

$\nu_n$ . Со следующей точностью получаем:

$$\nu_n = \nu + \langle w_n \rangle + \frac{1}{2} \sum_k \frac{|w_k|^2}{\nu - \nu_k}. \quad (\text{I.4.I5})$$

Видим, что отклонение  $\vec{n} - \vec{n}_s$  не мало лишь в малых областях спиновых резонансов

$$|\nu - \nu_k| \lesssim |w_k|$$

Эти соображения позволяют легко находить малое отклонение оси прецессии  $\vec{n}$  на неравновесной траектории. Два другие собственные решения уравнения (I.4.I)

$$\text{Re}(\vec{L} e^{-i\nu_n \theta}), \quad \text{Im}(\vec{L} e^{-i\nu_n \theta})$$

содержат явную зависимость от времени  $\theta$ . Поэтому спины, скажем, двух частиц на близких траекториях, направленные в начальный момент одинаково и примерно вдоль  $\vec{n}$ , с течением времени будут оставаться близкими. Если же в начальный момент спины направить поперек  $\vec{n}$ , то будет, пропорционально времени, нарастать расхождение спинов, из-за разброса частот прецессии  $\nu_n$ . Этими физическими соображениями определяется выделенность решения  $\vec{n}$ , обладающего свойствами периодичности (I.4.6).

Вдали от резонансов поляризация пучка  $\langle \vec{S} \rangle$ , из-за разброса частоты прецессии  $\nu_n$ , через время  $\theta \gg |\nu_n - \nu|^{-1}$  становится направленной вдоль  $\vec{n}_s(\theta)$ :

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle S_n \vec{n} + \text{Re}(S_\perp \vec{L} e^{-i\nu_n \theta}) \rangle = \langle S_n \vec{n} \rangle \simeq \langle S_n \rangle \vec{n}_s. \quad (\text{I.4.I6})$$

Динамическая устойчивость поляризации связана с возможностью выбора рабочей точки, удаленной от всех опасных резонансов ( $|\nu - \nu_k| \gg |w_k|$ ) с мощностями

$$|w_k| \gtrsim T^{-1},$$

где  $T$  – время эксперимента. В электрон-позитронных накопителях роль характерного времени может играть время радиационного затухания (определяемое скоростью потерь энергии на синхротронное излучение). Этот вопрос мы еще обсудим в главах III и IV.

### § 5. Формулы для спинового возмущения в линейном приближении

Полезно привести выражение для возмущения  $\vec{w}$  в приближении линейном по отклонению траектории частицы от равновесной. Сначала получим уравнения, описывающие поперечные отклонения орбиты, следуя хорошо известному способу их получения /82/. Не представляет никакого труда получить уравнения поперечного движения и при наличии на орбите (кроме, естественно, вертикального поля) радиальной компоненты поля, принципиальной для управления поляризацией пучка.

Радиус вектор частицы  $\vec{z}$  в ускорительной системе ортов записывается в виде

$$\vec{z} = \vec{z}_s(\theta) + x \vec{e}_x(\theta) + z \vec{e}_z(\theta), \quad (\text{I.5.I})$$

где  $x$  – радиальное,  $z$  – вертикальное отклонения частицы от некоторой идеальной равновесной орбиты  $\vec{z}_s(\theta)$ . Периодические орты  $\vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y = R^{-1} d\vec{z}_s/d\theta$  ( $2\pi R$  – длина равновесной орбиты) удовлетворяют соотношениям

$$\vec{e}_x' = \mathcal{K}_y \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y' = \mathcal{K}_x \vec{e}_z - \mathcal{K}_z \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z' = -\mathcal{K}_x \vec{e}_y, \quad (\text{I.5.2})$$

где  $\mathcal{K}_y = H_y(\vec{z}_s)/\langle H_z \rangle$ , а  $\mathcal{K}_z$  и  $\mathcal{K}_x$  – безразмерные компоненты кривизны равновесной орбиты:

$$\mathcal{K}_z = -\frac{q_0 R}{\chi_s v_s} H_z = \frac{H_z}{\langle H_z \rangle}, \quad \mathcal{K}_x = \frac{H_x}{\langle H_z \rangle},$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_z d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_x d\theta = 0.$$

Расписывая по компонентам ускорительного базиса уравнения движения частицы в магнитном поле

$$\dot{\vec{v}} = - \frac{q_0}{\gamma} [\vec{v} \vec{H}] ,$$

получаем в линейном приближении следующие уравнения, описывающие поперечное движение:

$$z'' + g_z z = g_{zx} x - K_y x' - \frac{\Delta\gamma}{\gamma} R K_x , \quad (I.5.3)$$

$$x'' + g_x x = g_{xz} z + K_y z' + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} R K_z .$$

Здесь  $\Delta\gamma/\gamma = (\gamma - \gamma_s)/\gamma$  - относительное отклонение энергии от равновесного значения,

$$g_z = K_x^2 - \frac{R}{\langle H_z \rangle} \frac{\partial H_x}{\partial z} , \quad g_{zx} = K_z K_x + \frac{R}{\langle H_z \rangle} \frac{\partial H_x}{\partial x} ,$$

$$g_x = K_z^2 + \frac{R}{\langle H_z \rangle} \frac{\partial H_z}{\partial x} , \quad g_{xz} = K_x K_z - \frac{R}{\langle H_z \rangle} \frac{\partial H_z}{\partial z} .$$

Соотношения между производными поля следуют из уравнений:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0 :$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial \theta} = R \frac{\partial H_y}{\partial x} + K_z H_y , \quad \frac{\partial H_z}{\partial \theta} = R \frac{\partial H_y}{\partial z} - K_x H_y ,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x} , \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial H_y}{\partial \theta} = 0 .$$

Медленные синхротронные колебания энергии  $m \Delta\gamma$  включают в уравнения (I.5.3) адиабатически.

Вектор скорости прецессии  $\vec{W}$  можно расписать в ускорительной системе ортов. Однако гораздо проще компоненты угловой скорости спина выглядят в системе ортов, связанной с точным направлением скорости  $\vec{v}$ . Движение спина удобно описывать в системе ортов

$$\vec{a} = \frac{[\vec{v} \vec{e}_z]}{|\vec{v} \vec{e}_z|} \simeq \vec{e}_x - \frac{x'}{R} \vec{e}_y ,$$

(I.5.4)

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \simeq \vec{e}_y + \frac{x'}{R} \vec{e}_x + \frac{z'}{R} \vec{e}_z,$$

$$\vec{b} = [\vec{a} \vec{\tau}] \simeq \vec{e}_z - \frac{z'}{R} \vec{e}_y,$$

мало отличающихся от ускорительной системы из-за малого разброса скоростей в пучке. Вычитая угловую скорость вращения системы ортов

$$\begin{aligned} \vec{W}_b &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{e}_\alpha \vec{e}'_\alpha] \simeq \\ &\simeq (\mathcal{K}_x + \frac{z''}{R}) \vec{a} + (\mathcal{K}_z - \frac{x''}{R}) \vec{b} + (\mathcal{K}_x x' + \mathcal{K}_z z') \frac{\vec{z}}{R}, \end{aligned}$$

получаем в линейном приближении следующие выражения для скорости прецессии в системе (I.5.4):

$$W_a \simeq \nu_0 \mathcal{K}_x + \nu_0 \left[ \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_x + \frac{z''}{R} \right], \quad (\text{I.5.5})$$

$$W_b \simeq \nu_0 \mathcal{K}_z + \nu_0 \left[ \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right],$$

$$W_z \simeq \frac{q}{q_0} \mathcal{K}_y - \frac{q}{q_0} \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_y + \frac{q}{q_0} (\mathcal{K}'_x \frac{x}{R} + \mathcal{K}'_z \frac{z}{R}) + \frac{q_a}{q_0} (\mathcal{K}_x \frac{x'}{R} + \mathcal{K}_z \frac{z'}{R}).$$

Следовательно, при отклонении орбиты от равновесной появляется следующее спиновое возмущение  $\vec{w}$ :

$$\vec{w} \vec{a} \simeq \nu_0 \left[ \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_x + \frac{z''}{R} \right],$$

$$\vec{w} \vec{b} \simeq \nu_0 \left[ \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right], \quad (\text{I.5.6})$$

$$\vec{w} \vec{\tau} \simeq -\frac{q}{q_0} \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_y + \frac{q}{q_0} (\mathcal{K}'_x \frac{x}{R} + \mathcal{K}'_z \frac{z}{R}) + \frac{q_a}{q_0} (\mathcal{K}_x \frac{x'}{R} + \mathcal{K}_z \frac{z'}{R}).$$

Видим, что при высоких энергиях ( $\nu_0 \gg 1$ ) выделяются лишь две компоненты спинового возмущения вдоль  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

## § 6. Примеры получения явных выражений для оси прецессии на неравновесных траекториях

Получим выражения для отклонения оси прецессии в приведенных выше простых примерах. Чтобы излишне не загромождать формулы, будем пренебрегать компонентой  $\vec{\omega} \vec{\tau}$ , предполагая, по крайней мере, выполненным условие  $\nu_0 \gg 1$ .

### а) Идеальный накопитель

В идеальном накопителе

$$\mathcal{K}_x = \mathcal{K}_y = 0, \quad g_{xz} = g_{zx} = 0,$$

и уравнения  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Z}$  колебаний получаются из (I.5.3) следующими /82/:

$$z'' + g_z z = 0, \tag{I.6.1}$$

$$x'' + g_x x = \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} R \mathcal{K}_z.$$

Из формул (I.5.5) и (I.5.6) получаем выражения для угловой скорости вращения спина:

$$\vec{W}_s = \nu_0 \mathcal{K}_z \vec{\ell},$$

$$\omega_a = \nu_0 \frac{z''}{R} = -\nu_0 \frac{g_z z}{R}, \tag{I.6.2}$$

$$\omega_b = \nu_0 \left( \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right) = \nu_0 \frac{g_x x}{R}.$$

Как мы уже знаем, в идеальном накопителе направление равновесной поляризации является вертикальным ( $\vec{n}_s = \vec{e}_z$ ), а ортогональные решения вращаются с частотой  $\nu_0 \mathcal{K}_z$  (см. § 3а). Отклонение оси прецессии  $\Delta \vec{n}$  определяются формулой (I.4.I4), которая в нашем примере запишется в виде \*):

\*) Строго говоря, с помощью формулы (I.6.3) направление  $\vec{n}$  вычисляется в системе,  $\vec{a}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\ell}$ . Поэтому в линейном приближении, т.к.  $\vec{\ell} \simeq \vec{e}_z - z' \vec{e}_y / R$ , имеем

$$\vec{n} \simeq \vec{e}_z - \frac{z'}{R} \vec{e}_y + \Delta \vec{n}.$$

Дополнительная добавка  $-(z'/R) \vec{e}_y$ , связанная с углом скорости частицы относительно равновесной, является нерезонансной, не может накапливаться и поэтому всегда остается малой.

$$\Delta \vec{n} = -\frac{\nu_0}{R} \text{Im} \left\{ (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) e^{-i\nu_0 \tilde{K}_z} \int_{-\infty}^{\theta} g_z z e^{i\nu_0 \tilde{K}_z} d\theta \right\}. \quad (\text{I.6.3})$$

Следовательно, в идеальном накопителе изменение  $\vec{n}$  связано лишь с вертикальным отклонением от плоскости движения. Действительно лишь вертикальные отклонения приводят к появлению радиальной компоненты магнитного поля, радиальные же смещения частицы оставляют направление магнитного поля вертикальным. Этот вывод согласуется с хорошо известным фактом, что спиновые возмущения в традиционных ускорителях связаны с вертикальным движением частиц [7, 15-20/].

Выпишем с помощью формулы (I.6.3) явные выражения сначала для сглаженной фокусировки и круглого накопителя ( $K_z = 1$ ,  $g_z = \nu_z^2 = \text{const}$ ). При этом уравнение (I.6.1) для  $Z$  - движения описывает гармонические вертикальные бетатронные колебания

$$Z = a e^{i\nu_z \theta} + a^* e^{-i\nu_z \theta}$$

с амплитудой  $a$ . Подставляя выражение для  $Z$  в (I.6.3) имеем

$$\Delta \vec{n} = -\frac{\nu_0 \nu_z^2}{R} \text{Im} \left\{ (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) e^{-i\nu_0 \theta} \int_{-\infty}^{\theta} (a e^{i(\nu_0 + \nu_z)\theta} + a^* e^{i(\nu_0 - \nu_z)\theta}) d\theta \right\} = \quad (\text{I.6.4})$$

$$= \frac{\nu_0 \nu_z^2}{R} \text{Re} \left\{ (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \left[ e^{i\nu_z \theta} \frac{a}{\nu_0 + \nu_z} + \frac{a^*}{\nu_0 - \nu_z} e^{-i\nu_z \theta} \right] \right\}.$$

Отклонение оси прецессии  $\Delta \vec{n}$  полезно также выразить через координату  $Z$  и угол  $Z'$

$$Z' = i\nu_z a e^{i\nu_z \theta} - i\nu_z a^* e^{-i\nu_z \theta}.$$

Получаем

$$a = \frac{Z' + i\nu_z Z}{2i\nu_z} e^{-i\nu_z \theta},$$

и таким образом:

$$\Delta \vec{n} = \frac{\nu_0 \nu_z^2}{\nu_0^2 - \nu_z^2} \left[ \nu_0 \frac{z}{R} \vec{e}_x - \frac{z'}{R} \vec{e}_y \right]. \quad (\text{I.6.5})$$

Отклонение  $\Delta \vec{n}$  в идеальном накопителе однозначно задается импульсом  $\sim z'$  и координатой  $z$  вертикального движения. В круглом накопителе со сглаженной фокусировкой возможен единственный спиновый резонанс

$$\nu_0 \simeq \nu_z,$$

вблизи которого изменение  $\Delta \vec{n}$  сильно зависит от амплитуды вертикальных колебаний.

Нетрудно получить выражения для  $\Delta \vec{n}$  и для накопителя с промежутками и любой фокусировкой. Бетатронные колебания в общем случае описываются решением Флоке  $f_z(\theta)$  /82/. Функция  $f_z$  является решением уравнения вертикальных колебаний (I.6.1):

$$f_z'' + g_z f_z = 0$$

и обладает свойством:

$$f_z\left(\theta + \frac{2\pi}{P}\right) = e^{i 2\pi \nu_z / P} f_z(\theta), \quad (\text{I.6.6})$$

где  $P$  — число суперпериодов накопителя. Условие нормировки обычно выбирают следующим:

$$\text{Im } f_z' f_z^* = 1.$$

Решение Флоке через  $\beta$  — функцию ( $\beta_z = R |f_z|^2$ ) выражается следующим образом /82/:

$$f_z = |f_z| \exp\left(i \int_0^\theta \frac{d\theta}{|f_z|^2}\right) = \sqrt{\frac{\beta_z}{R}} \exp\left(i \int_0^\theta \frac{R d\theta}{\beta_z}\right). \quad (\text{I.6.7})$$

Для сглаженной фокусировки имеем

$$f_z = \frac{1}{\sqrt{\nu_z}} e^{i \nu_z \theta}.$$

Бетатронные колебания описываются просто комбинацией решений Флоке:

$$\frac{z}{R} = a_z f_z + a_z^* f_z^* \quad (\text{I.6.8})$$

с постоянной комплексной амплитудой  $a_z$ . Используя свойство периодичности решения Флоке (I.6.6), можно интегрирование в формуле (I.6.3) для  $\Delta \vec{n}$  произвести суммированием по суперпериодам. Например, один из возникающих интегралов сводится к интегрированию по суперпериоду следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z e^{i\nu_0 \tilde{\chi}_z} d\theta = \int_{\theta - \frac{2\pi}{P}}^{\theta} g_z f_z e^{i\nu_0 \tilde{\chi}_z} d\theta \left[ 1 + e^{-i(\nu_0 + \nu_z) \frac{2\pi}{P}} + e^{-2i(\nu_0 + \nu_z) \frac{2\pi}{P}} + \dots \right] = \frac{1}{1 - \exp[-i \frac{2\pi}{P} (\nu_0 + \nu_z)]} \int_{\theta - \frac{2\pi}{P}}^{\theta} g_z f_z e^{i\nu_0 \tilde{\chi}_z} d\theta.$$

В результате имеем следующее выражение для отклонения оси прецессии:

$$\Delta \vec{n} = -\nu_0 \text{Im}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{-i\nu_0 \tilde{\chi}_z} \left\{ \frac{a_z \int_{\theta - \frac{2\pi}{P}}^{\theta} g_z f_z e^{i\nu_0 \tilde{\chi}_z} d\theta}{1 - \exp[-i \frac{2\pi}{P} (\nu_0 + \nu_z)]} + \frac{a_z^* \int_{\theta - \frac{2\pi}{P}}^{\theta} g_z f_z^* e^{i\nu_0 \tilde{\chi}_z} d\theta}{1 - \exp[i \frac{2\pi}{P} (\nu_z - \nu_0)]} \right\} \quad (\text{I.6.9})$$

С помощью соотношения

$$a_z = \frac{1}{2iR} (z' f_z^* - z f_z'^*) \quad (\text{I.6.10})$$

можно выразить  $\Delta \vec{n}$  через  $z$  и  $z'$ .

Из выражения (I.6.9) следует, что в жесткофокусирующем накопителе с промежутками возможны резонансы:

$$\nu_0 \simeq \pm \nu_z + K P,$$

где  $K$  — целое число.



б) Идеальный накопитель со вставкой в промежуток  
радиальных полей

Пусть в накопитель введена вставка, изображенная на Рис.1а или Рис.1б, восстанавливающая на выходе промежутка орбитальное и спиновое движение на равновесной орбите. Если используются для фокусировки вертикально ориентированные квадруполь (не повернутые вокруг орбиты) уравнения  $\tilde{z}$  и  $\tilde{x}$  движения остаются независимыми ( $g_{zx} = g_{xz} = 0$ ,  $H_y = 0$ ):

$$\ddot{z} + g_z z = - \frac{\Delta \mathcal{H}}{f} R \mathcal{K}_x, \quad (\text{I.6.II})$$

$$\ddot{x} + g_x x = \frac{\Delta \mathcal{H}}{f} R \mathcal{K}_z.$$

С помощью решений Флоке  $f_z$  и  $f_x$  эти уравнения можно переписать в эквивалентной форме. Решения неоднородных уравнений ищем вариацией постоянных. Пусть

$$\frac{z}{R} = C_z(\theta) f_z + C_z^* f_z^*, \quad (\text{I.6.I2})$$

$$\frac{x}{R} = C_x(\theta) f_x + C_x^* f_x^*.$$

Используя соотношение

$$C_z = \frac{1}{2iR} (z' f_z - z f_z')^*,$$

$$C_x = \frac{1}{2iR} (x' f_x - x f_x')^*,$$

получаем уравнения на  $C_z$  и  $C_x$ , эквивалентные (I.6.II):

$$C_z' = - \frac{1}{2i} \frac{\Delta \mathcal{H}}{f} \mathcal{K}_x f_z^*, \quad (\text{I.6.I3})$$

$$C_x' = \frac{1}{2i} \frac{\Delta \mathcal{H}}{f} \mathcal{K}_z f_x^*.$$

Следовательно:

$$C_z = a_z - \frac{1}{2i} \frac{\Delta \mathcal{H}}{f} \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta,$$

$$C_x = a_x + \frac{1}{2i} \frac{\Delta \mathcal{H}}{f} \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z f_x^* d\theta,$$

где  $a_z$  и  $a_x$  — постоянные амплитуды свободных колебаний, а интегралы, как обычно, равны:

$$\int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta = \frac{\int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta}{1 - \exp(2\pi i \nu_z)} \quad (I.6.I4)$$

$$\int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z f_x^* d\theta = \frac{\int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z f_x^* d\theta}{1 - \exp(2\pi i \nu_x)} .$$

Через решения Флоке, общее решение уравнений (I.6.II) или (I.6.I3), таким образом, можно записать в хорошо известном в теории ускорителей виде /82/:

$$\frac{z}{R} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \psi_z + a_z f_z + a_z^* f_z^* , \quad (I.6.I5)$$

$$\frac{x}{R} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \psi_x + a_x f_x + a_x^* f_x^* ,$$

где  $\psi_z(\theta)$  и  $\psi_x(\theta)$  — дисперсионные функции (периодические по азимуту), описывающие изменение замкнутых орбит в накопителе, и которые выражаются через решение Флоке следующим образом:

$$\psi_z = - \operatorname{Im} \left( f_z \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta \right) , \quad (I.6.I6)$$

$$\psi_x = \operatorname{Im} \left( f_x \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z f_x^* d\theta \right) .$$

Спиновые возмущения, необходимые для вычисления отклонения оси прецессии, по форме будут такими же, как и в идеальном накопителе (см. общую формулу (I.5.6)):

$$w_a \simeq - \nu_0 g_z z / R \quad , \quad w_b = \nu_0 g_x x / R \quad (I.6.I7)$$

Изменение  $\Delta \vec{n}$  равно:

$$\Delta \vec{n} = \operatorname{Im} \vec{\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\theta} w_a \eta_x^* d\theta + \int_{-\infty}^{\theta} w_b \eta_z^* d\theta \right] , \quad (I.6.I8)$$

где  $\vec{\eta} = \vec{\ell} \exp(-i\nu\theta)$  – ортогональные решения, явные выражения для которых приведены в § 3б ( $\eta_x = \vec{\eta} \vec{e}_x$ ,  $\eta_z = \vec{\eta} \vec{e}_z$ ).

Отметим важное свойство. Если на участке вставки  $0 < \theta < \theta_0$  с радиальными полями отсутствуют квадруполь ( $g_x = 0$  при  $0 < \theta < \theta_0$ ), то  $\omega_\theta \eta_z = 0$  при любом азимуте  $\theta$ , так как  $\eta_z = 0$  на основном участке накопителя  $\theta_0 < \theta < 2\pi$ . С учетом этого обстоятельства, подставляя решение для  $Z$  (I.6.I5) в (I.6.I8) получаем, что

$$\Delta \vec{n} = -\nu_0 \text{Im} \vec{\eta} \left[ \frac{\Delta r}{r} \int_{-\infty}^{\theta} g_z \psi_z \eta_x^* d\theta + a_z \int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z \eta_x^* d\theta + a_z^* \int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z^* \eta_x^* d\theta \right]. \quad (\text{I.6.I9})$$

Так как при отсутствии квадруполь на участке  $0 < \theta < \theta_0$  можно пренебречь и величиной  $g_z(0 \div \theta_0) = \mathcal{K}_x^2 \sim (\nu_0 \theta_0)^{-2}$  (по крайней мере при  $\nu_0 \gg 1$ ), то отклонение  $\Delta \vec{n}$  остается таким же, как и в идеальном накопителе без радиальных полей, (сравни с (I.6.3)).

### в) Пример с одной змейкой

Выражения для оси прецессии и ортогонального решения на равновесной траектории получены в § 3в и даются формулами (I.3.4) при использовании змейки, поворачивающей спин на угол  $\mathcal{T}$  вокруг скорости. Поэтому для отклонения оси прецессии имеем:

$$\Delta \vec{n} = \nu_0 \text{Im} \vec{\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\theta} \left( \frac{\Delta r}{r} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right) \eta_z^* d\theta - \int_{-\infty}^{\theta} g_z \frac{Z}{R} \eta_z^* d\theta \right]. \quad (\text{I.6.20})$$

Таким образом, в отличие от рассмотренных выше примеров, даже при отсутствии вертикального смещения орбиты существует отклонение  $\Delta \vec{n}$ , связанное с радиальным движением. Это объясняется наличием полной вертикальной проекции ортогонального решения на основном участке (равновесная поляризация лежит в плоскости движения). При этом интеграл в (I.6.20) при  $\theta_0 < \theta < 2\pi$  равен:

$$\int_{-\infty}^{\theta} \left( \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right) \eta_z^* d\theta \simeq \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z \eta_z^* d\theta = \quad (I.6.21)$$

$$= -i \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} (\tilde{\mathcal{K}}_z - \mathcal{I}).$$

Следовательно, при отсутствии вертикального смещения, имеем

$$\Delta \vec{n} = \nu_0 \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} (\tilde{\mathcal{K}}_z - \mathcal{I}) \left[ \vec{e}_x \cos \nu_0 (\tilde{\mathcal{K}}_z - \mathcal{I}) - \vec{e}_y \sin \nu_0 (\tilde{\mathcal{K}}_z - \mathcal{I}) \right]. \quad (I.6.22)$$

Этот результат, конечно, можно получить и просто дифференцированием по энергии выражения (I.3.4) для  $\vec{n}_s$ , справедливого на любой замкнутой орбите:  $\Delta \vec{n} = (\Delta \mathcal{I} / \mathcal{I}) \nu_0 \partial \vec{n}_s / \partial \nu_0$ . Заметим, что  $\Delta \vec{n} = 0$  в противолежащем промежутке ( $\tilde{\mathcal{K}}_z = \mathcal{I}$ ), в котором осуществляется продольная поляризация.

#### г) Пример с двумя змейками

Избавиться от зависимости направления оси прецессии от радиального движения в накопителе позволяют две змейки, оставляющие вертикальным направление равновесной поляризации на основном участке орбиты. Если использовать специальную систему квадруполов (ориентированных по вертикали) на участках змеек (где  $\eta_z \neq 0$ ) так, чтобы

$$\int_0^{\theta_0} \left( \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right) \eta_z d\theta = \int_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I} + \theta_0} \left( \frac{\Delta \mathcal{I}}{\mathcal{I}} \mathcal{K}_z - \frac{x''}{R} \right) \eta_z = 0, \quad (I.6.23)$$

то на основном участке отклонение  $\Delta \vec{n}$  будет связано только с вертикальным смещением орбиты:

$$\Delta \vec{n} = \nu_0 \operatorname{Im} \vec{\eta} \int_{-\infty}^{\theta} g_z \frac{z}{R} \eta_x^* d\theta. \quad (I.6.24)$$

В частности, условия (I.6.23) оказываются выполненными, если на участках вставок отсутствуют фокусирующие элементы ( $(\Delta\gamma/\gamma)K_z - x''/R = g_x x/R = 0$ ).

## § 7. Спиновые резонансы

Отклонение оси прецессии от направления на равновесной орбите становится значительным в области спиновых резонансов. Требуется достаточно полное исследование поведения поляризации в районе спиновых резонансов для практической работы с поляризованными частицами в накопителях. Строго говоря, всегда существуют резонирующие гармоники достаточно высокого порядка, которые при длительном движении могут проявиться. Спиновые резонансы могут быть использованы для преднамеренной быстрой деполяризации пучка. Существенно опирается на знание динамики спина в области резонансов исследование таких явлений как радиационная самополяризация электронов и позитронов, деполяризующее влияние рассеяния траекторий частиц, деполяризация пучка при ускорении в ускорителях.

### а) Резонансы первого приближения

Рассмотрим движение спина вблизи уединенного резонанса, когда условие

$$|\nu - \nu_k| \lesssim |\omega_k| \quad (\text{I.7.1})$$

выполнено лишь для одной гармоники возмущения. Остальные резонансные гармоники  $|\omega_{k'}|$  более высокого порядка и настолько малы, что на интересующем отрезке времени  $\theta$  не успевают проявиться:

$$\theta \ll |\omega_{k'}|^{-1}.$$

При учете одной гармоники возмущения в периодической системе орбит угловая частота прецессии равна

$$\vec{W} = \nu \vec{n}_s + \text{Re}(\vec{\ell} \omega_k e^{-i\psi_k}). \quad (\text{I.7.2})$$

Решение  $\vec{n}$  для спина, содержащее частоты возмущения  $\psi'_\kappa = \nu_\kappa$  можно получить, используя уравнение (I.4.8), из которого следует, что

$$C = \frac{\omega_\kappa}{\varepsilon_\kappa \sqrt{1 + |\omega_\kappa|^2 / \varepsilon_\kappa^2}} e^{-i\psi_\kappa}$$

где  $\varepsilon_\kappa = \nu - \nu_\kappa$  — отстройка от резонанса.

Таким образом \*):

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\kappa^2 + |\omega_\kappa|^2}} \left[ \varepsilon_\kappa \vec{n}_s + \operatorname{Re}(\vec{\ell} \omega_\kappa e^{-i\psi_\kappa}) \right]. \quad (\text{I.7.3})$$

Частота прецессии из соотношения (I.4.II) равна

$$\nu_n = \frac{\varepsilon_\kappa}{|\varepsilon_\kappa|} \nu_\kappa + \sqrt{|\varepsilon_\kappa|^2 + |\omega_\kappa|^2}. \quad (\text{I.7.4})$$

Эти же результаты легко получить и прямо в "резонансной" системе, вращающейся вокруг  $\vec{n}_s$  с резонансной частотой  $\nu_\kappa$ :

$$\vec{\ell}_p = \vec{\ell} e^{-i\psi_\kappa}.$$

В этой системе угловая скорость  $\vec{h}$  постоянна:

$$\vec{h} = \vec{\omega} - \nu_\kappa \vec{n}_s = \varepsilon_\kappa \vec{n}_s + \operatorname{Re} \vec{\ell}_p \omega_\kappa \quad (\text{I.7.5})$$

и спин медленно прецессирует с частотой  $h = \sqrt{\varepsilon^2 + |\omega_\kappa|^2}$  вокруг направления  $\vec{n} = \vec{h}/h$ .

Направление оси прецессии вблизи резонанса удобно представлять в системе координат, где по оси  $\vec{n}_s$  откладывается величина расстройки  $\varepsilon_\kappa = \nu - \nu_\kappa$ , а вдоль  $\vec{\ell}_1$  и  $\vec{\ell}_2$  соответствующие компоненты гармоник возмущения  $\vec{\omega}_\kappa$ . Из системы  $\vec{n}_s, \vec{\ell}_1,$

---

\*) В формуле (I.7.3) изменен знак  $\vec{n}$  при  $\varepsilon_\kappa < 0$ . Это возможно, так как  $-\vec{n}$  тоже решение уравнения движения спина, обладающее теми же свойствами периодичности.

$\vec{\ell}_2$  движение спина выглядит так: спин быстро вращается вокруг  $\vec{n}_s$ , медленно изменяя проекцию спина  $\vec{S} \vec{n}_s$ . Угловой растр конуса вращения спина медленно с частотой  $h$  колеблется около среднего значения, равного  $2 \arctg(|\omega_k|/\varepsilon_k)$ . Амплитуда колебаний проекции  $\vec{S} \vec{n}_s$  зависит от начальных условий. Если в начальный момент времени поляризация направлена по  $\vec{n}_s$ , проекция спина колеблется от  $S$  до  $S(1 - 2|\omega_k|^2/h^2)$ . При точном резонансе ( $\nu = \nu_k$ ) через время  $\pi/|\omega_k|$  спин изменяет знак проекции  $\vec{S} \vec{n}_s$ , вывод, согласующийся с результатом работы /90/. По мере удаления от резонанса при  $|\varepsilon_k| \gg |\omega_k|$  движение спина все меньше отличается от идеального вращения вокруг  $\vec{n}_s$  с частотой  $\nu$ .

#### б) Резонансы высших порядков

В первом приближении движение спина может сильно возмущаться вблизи резонансов

$$\nu \approx \nu_k \quad (\text{I.7.6})$$

где  $\nu_k$  - частота из спектра  $\vec{\omega} \vec{\ell}$ . Если резонансы первого приближения отсутствуют, то можно утверждать, что проекция спина  $\vec{S} \vec{n}_s$  будет сохраняться до времен:

$$\theta \ll (|\vec{\omega}|^2 \theta_{\text{хар}})^{-1} = \theta_{\text{max}}$$

где  $\theta_{\text{хар}}$  - время характерного "быстрого" изменения  $\vec{\omega}$  (например, период обращения в накопителе). Для того, чтобы узнать поведение спина на больших временах, необходимо построить усредненные уравнения с учетом высших порядков. При этом будут учтены и комбинационные резонансы:

$$\nu \approx \nu_c = \pm \nu_k \pm \nu_{k'} \pm \dots$$

Усредненные уравнения удобно получать в резонансной системе, вращающейся вокруг  $\vec{n}_s$  с частотой  $\nu_c$ . В этой системе

$$\vec{\omega}_p = (\nu - \nu_c) \vec{n}_s + \text{Re}(\vec{\ell}_p \omega_1 e^{-i\nu_c \theta}) \quad (\text{I.7.7})$$

Уравнение  $\vec{S}' = [\vec{\omega}_p \vec{S}]$  запишем в матричной форме

$$S' = \omega_p S,$$

обозначив за  $S$  - столбец из компонент вектора  $\vec{S}$ , а за  $\omega_p$  - матрицу  $3 \times 3$ :

$$(\omega_p)_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \varepsilon_{i\alpha k} (\omega_p)_\alpha$$

где  $\varepsilon_{i\alpha k}$  - полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга. На малых временах ( $T|\vec{\omega}| \ll 1$ ) решение в момент времени  $T$  записывается в виде ряда:

$$S_T = (I + u) S_0, \quad (I.7.8)$$

$$u = \left[ \tilde{\omega}_p + \widetilde{\omega_p \tilde{\omega}_p} + \dots \right]_{\theta=T},$$

где  $\tilde{F} = \int_0^\theta F d\theta$ .

Найдем такое постоянное результирующее "поле"  $\vec{\omega}$ , чтобы решение

$$S_T = e^{\omega T} S_0$$

усредненного уравнения

$$S' = \omega S \quad (I.7.9)$$

через время  $T$  совпало бы с (I.7.8):

$$e^{\omega T} = I + u.$$

Отсюда следует, что

$$\omega = \frac{1}{T} \ln(I + u) = \frac{1}{T} \left( u - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 - \dots \right)$$

Используя выражение (I.7.8) для  $u$  получаем:

$$\omega = \left\langle \omega_p - \frac{1}{2} [\tilde{\omega}_p, \omega_p] + \dots \right\rangle.$$

Здесь скобки  $[\dots, \dots]$  означают коммутатор матриц,  $\langle \dots \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dots d\theta$ . В векторной форме коммутатор матриц заменится на векторное произведение

$$\vec{\omega} = \left\langle \vec{\omega}_p - \frac{1}{2} [\vec{\tilde{\omega}}_p, \vec{\omega}_p] + \dots \right\rangle. \quad (I.7.10)$$



Время  $T$  должно быть выбрано с учетом соотношений:

$$\theta_{\text{хар}} \ll T \ll |\vec{\omega}|^{-1}.$$

При этом условии усредненная скорость прецессии  $\vec{\omega}$  не зависит от  $T$  и скобки  $\langle \dots \rangle$  совпадают с определением среднего значения.

Решение усредненного уравнения (I.7.9) будет мало отличаться от точного до времен

$$\theta \ll \frac{1}{|\vec{\omega}_p|} |\vec{\omega}_p \theta_{\text{хар}}|^{-n} = \theta_{\text{max}},$$

где  $n$  — число учитываемых порядков в (I.7.10).

Если  $\vec{\omega}_p(\theta)$  — периодическая функция, то  $\vec{\omega}$  для времен  $\theta \ll \theta_{\text{max}}$  совпадает по направлению с соответствующим периодическим решением  $\vec{n}$  в моменты времени  $0, T, 2T, \dots$  (время  $T$  в этом случае может быть отождествлено с периодом изменения  $\vec{\omega}_p$ ). Между этими моментами решение уравнения (I.7.9) отличается от точного на величину первого порядка (отсюда зависимость направления  $\vec{\omega}$  от выбора начального момента  $\theta = 0$ :  $|\Delta \vec{n}| \sim \omega T$ ). Аналогично, в общем случае  $T$  является приближенным периодом изменения  $\vec{\omega}_p$ . Величина  $\omega$  задает частоту вращения спина вокруг  $\vec{n}$ .

Обсудим, какие резонансы возможны в следующих приближениях. Собственно резонанс имеет место, когда направление  $\vec{\omega}(\nu)$  существенно отличается от  $\vec{n}_s$ . При точном резонансе  $\vec{n}_s, \vec{\omega}(\nu_s) = 0$ , а разность  $\nu_z - \nu_c$  есть поправка к положению точного резонанса, обязанная возмущению  $\vec{\omega}_p$ . Эффективная ширина резонанса определяется величиной

$$|\vec{\omega}(\nu_z)| = |\omega_1 + i\omega_2| = \omega_{\perp},$$

которая для резонанса  $n$ -го порядка пропорциональна  $n$ -ой степени возмущения.

В первом приближении возможны только резонансы (I.7.6), где  $\nu_k$  — частота из спектра поперечной части  $\vec{\omega}$ . Во втором приближении возможны резонансы

$$\nu \approx \nu_{\ell} + \nu_k,$$

возникающие из-за корреляции между колебаниями частоты прецессии и поперечным возмущением (здесь индексами "  $\ell$  " и "  $k$  " обозначаются частоты из спектра  $\vec{\omega} \vec{n}_s$  и  $\vec{\omega} \vec{\ell}^*$  соответственно). При постоянном  $\vec{\omega} \vec{n}_s$  ( $\nu_{\ell} = 0$ ) второе приближение не дает нового резонанса, и лишь слегка поправляет мощность резонанса первого приближения.

Укажем простое правило отбора комбинаций частот для резонанса произвольного порядка. Условием резонанса  $n$ -го порядка является близость к частоте  $\nu$  некой комбинации из  $n$  частот из спектров  $\vec{\omega} \vec{n}_s$  и  $\vec{\omega} \vec{\ell}^*$  (среди них могут быть одинаковые частоты). Это же условие в резонансной системе запишется в виде:

$$\nu_{\ell_1} + \nu_{\ell_2} + \dots + \nu_{\ell_{n_{\parallel}}} + \delta_1(\nu_{k_1} - \nu) + \delta_2(\nu_{k_2} - \nu) + \dots + \delta_{n_{\perp}}(\nu_{k_{n_{\perp}}} - \nu) = 0$$

$$\delta_i = \pm 1, \quad n_{\parallel} + n_{\perp} = n$$

(Выбор знака перед  $\nu_{\ell}$  можно включить в индекс "  $\ell$  ", так как частоты  $\nu_{\ell}$  образуют спектр действительной величины  $\vec{\omega} \vec{n}_s$ ). Поскольку спиновые резонансы могут быть лишь линейными по спину, т.е. вида  $\nu \approx \nu_c$ , то должно быть:

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{n_{\perp}} = 1. \quad (\text{I.7.II})$$

Из этого условия, в частности, следует нечетность  $n_{\perp}$ . Таким образом, в  $n$ -м порядке возможны резонансы:

$$\nu = \nu_{\ell_1} + \dots + \nu_{\ell_{n_{\parallel}}} + \delta_1 \nu_{k_1} + \dots + \delta_{n_{\perp}} \nu_{k_{n_{\perp}}}, \quad (\text{I.7.I2})$$

с соблюдением условия (I.7.II). Мощность резонанса пропорциональна произведению  $\omega_{\ell_1} \dots \omega_{\ell_{n_{\parallel}}} \cdot \omega_{k_1} \dots \omega_{k_{n_{\perp}}}$ . Иногда резонансы  $n$ -го порядка сводятся к поправке низших резонансов. Для этого нужно, чтобы из полной комбинации (I.7.I2) выделялась малая по величине часть, причем числа частот  $\nu_k$ , входящих в эту под-

комбинацию с положительными ( $\delta_i > 0$ ) и с отрицательными знаками ( $\delta_i < 0$ ) должны совпадать. Например, в третьем порядке возможны резонансы:

$$\nu \simeq \nu_{e_1} + \nu_{e_2} + \nu_k, \quad \nu \simeq \nu_{k_1} + \nu_{k_2} - \nu_{k_3}.$$

Они сводятся к поправкам резонансов первого или второго порядков, если  $\nu_{e_1} + \nu_{e_2} = 0$ ,  $\nu_{k_1} - \nu_{k_3} = 0$ , либо  $\nu_{e_1} = 0$ .

### в) Модуляционные резонансы

Описанный метод усреднения применим непосредственно для уединенного резонанса, т.е. когда условие (I.7.1) выполнено только для одной комбинации  $\nu_c$ . После усреднения по остальным быстрым частотам получается движение в эффективном постоянном поле, правильно описывающем поведение спина на больших временах. Если же в резонансную область попадает несколько комбинаций частот, то после усреднения по быстрым частотам эффективное поле  $\vec{\omega}$  будет функцией времени, частоты изменения которой сравнимы с величиной  $\omega$ :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\sigma}(\theta),$$

$$\vec{\omega}_0 = (\omega_\perp, 0, \varepsilon), \quad \vec{\sigma} = \sum_{m \neq 0} \sigma_m e^{i\nu_m \theta}, \quad |\nu_m| \leq \omega.$$

Здесь  $\omega_\perp$ ,  $\varepsilon$  – ширина и расстройка выбранного (основного) резонанса,  $|\sigma_m|$  – характеризует мощность остальных резонансов,  $\nu_m$  – расстояния между основным и остальными резонансами. Такая ситуация означает наличие в спектре возмущения малых частот (синхротронные колебания энергии, близкорасположенные резонансы, внешняя модуляция и т.д.).

Метод описания продемонстрируем на примере (часто встречающемся на практике) гармонической модуляции синхротронными комбинациями энергии. Пусть без учета синхротронной модуляции имеем набор уединенных спиновых резонансов с мощностями  $\omega_k$  (обычно наи-

более мощных резонансов линейного приближения). Учет модуляции сводится к включению модуляции отстройки <sup>\*</sup>)  $\varepsilon = \nu - \nu_k$  :

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \sigma \cos \psi_f,$$

где  $\sigma = (\partial \varepsilon / \partial \gamma)(\Delta \gamma)_0$  - амплитуда,  $\psi_f$  - фаза,  $\psi_f' = \nu_f$  - частота синхротронных колебаний частоты прецессии. В традиционных накопителях с вертикальным полем модуляции отстройки связана с модуляцией частоты прецессии  $\nu$ , линейно зависящей от энергии; при этом  $\sigma = \nu_0 (\Delta \gamma)_0 / \gamma$ .

Для рассматриваемой модели имеем:

$$\vec{\omega} = (\bar{\varepsilon} + \sigma \cos \psi_f) \vec{n}_s + \text{Re}(\vec{\ell}_p \omega_k). \quad (\text{I.7.I3})$$

Рассмотрим случай перекрывающихся резонансов существенно разной мощности. При  $\sigma \ll \nu_f$  воспользуемся теорией возмущения по величине  $\sigma$ . При  $\sigma = 0$  имеет место уединенный резонанс и спин прецессирует вокруг  $\vec{\omega}_0 = (\omega_k, 0, \bar{\varepsilon})$ . Учет  $\sigma$  приводит к существенному изменению движения спина вблизи модуляционных резонансов

$$\omega_0 = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + |\omega_k|^2} = m \nu_f. \quad (\text{I.7.I4})$$

В первом приближении при движении в поле (I.7.I3) возможен резонанс

$$\omega_0 = \nu_f + \varepsilon_1$$

с отстройкой  $\varepsilon_1$ , ( $|\varepsilon_1| \ll \nu_f$ ). Мощность этого резонанса

$$w_1 = \frac{\sigma}{2} \left| \left[ \vec{n}_s \frac{\vec{\omega}_0}{\omega_0} \right] \right| = \frac{\sigma |\omega_k|}{2 \omega_0} \quad (\text{I.7.I4})$$

определяется поперечной к  $\vec{\omega}_0$  частью  $\vec{\sigma}$ . Таким образом, в системе, вращающейся вокруг  $\vec{\omega}_0$  с частотой  $\nu_f$ , вблизи модуляционных

<sup>\*</sup>) Случай, когда сама мощность  $\omega_k$  связана с отклонением энергии от равновесного значения (это может иметь место в области целого резонанса  $\nu = k$ ), рассматривается аналогично.

ного резонанса спин медленно прецессирует с частотой  $\sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + |\omega_1|^2}$  вокруг направления, составляющего с  $\vec{\omega}_0$  угол, равный  $\arctg(|\omega_1|/\bar{\varepsilon})$ .

Резонансы  $\omega_0 = m \nu_f$  возникают в  $m$ -ом приближении.

Рассмотренный подход дает результаты, существенно отличающиеся от теории уединенного резонанса при  $|\bar{\varepsilon}| \lesssim |\omega_k|$ . Иначе модуляционные резонансы фактически отделены от основного и могут рассматриваться как независимые, уединенные.

При достаточно малом значении  $|\omega_k|$  можно не использовать теорию возмущений по амплитуде модуляции  $\sigma$ . Для этого перейдем в систему  $\vec{\ell}_m$  (колеблющуюся вокруг  $\vec{n}_s$ ), в которой отстройка остается постоянной:

$$\vec{\ell}_m = \vec{\ell}_p e^{-i \int \sigma \cos \psi_f d\theta} = \vec{\ell}_p \exp(-i \frac{\sigma}{\nu_f} \sin \psi_f).$$

В этой системе:

$$\vec{h} = \bar{\varepsilon} \vec{n}_s + \text{Re } \vec{\ell}_m \omega_k \exp(-i \frac{\sigma}{\nu_f} \sin \psi_f) \quad (\text{I.7.I5})$$

Разложим в ряд Фурье поперечное возмущение

$$\omega_k \exp(-i \frac{\sigma}{\nu_f} \sin \psi_f) = \omega_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\frac{\sigma}{\nu_f}) e^{-im \psi_f},$$

где  $J_m$  - функция Бесселя. Формула для  $\vec{n}$  в нерезонансной области принимает вид:

$$\vec{n} \simeq \vec{n}_s + \text{Re } \vec{\ell}_m \omega_k \sum_m \frac{J_m e^{-im \psi_f}}{\bar{\varepsilon} - m \nu_f}, \quad (\text{I.7.I6})$$

$$\nu_n \simeq \bar{\varepsilon}.$$

Мощности модуляционных резонансов  $\bar{\varepsilon} = m \nu_f$  равны

$$\omega_{km} = \omega_k J_m(\sigma/\nu_f). \quad (\text{I.7.I7})$$

В резонансной области ( $|\bar{\varepsilon} - m \nu_f| \lesssim |\omega_{km}|$ ) имеем:

$$\vec{n} = [\bar{\varepsilon} \vec{n}_s + \text{Re}(\vec{\ell}_m \omega_{km} e^{-im \psi_f})] / \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + |\omega_{km}|^2},$$

$$\nu_n = \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 + |\omega_{km}|^2}.$$

Конечно, выписанные формулы справедливы, если мощности модуляционных резонансов достаточно малы:

$$|\omega_k J_m(\frac{\bar{\epsilon}}{\nu_f})| \ll \nu_f.$$

Таким образом, учет синхротронной модуляции энергии заменяет единственный резонанс  $\bar{\epsilon} = 0$  с мощностями  $|\omega_k|$  на серию модуляционных резонансов  $\bar{\epsilon} = m \nu_f$  с мощностями  $\omega_k J_m$ . Отметим важное соотношение:

$$|\omega_k|^2 = \sum_m |\omega_{km}|^2, \quad (I.7.18)$$

являющееся общим свойством и при негармонической модуляции частоты прецессии.

В этом параграфе мы ограничились примерами, в которых модуляционные резонансы либо остаются уединенными, либо перекрываются с основным резонансом значительно большей мощности. Если перекрываются много резонансов примерно одинаковой мощности, метод усреднения становится неприменимым, и полезным оказывается подход к задаче, использующий сложение эффектов отдельных резонансов, а повторяющихся прохождений "основного" резонанса (см. Гл. П § 2).

### § 8. Способ преднамеренной деполаризации пучка

В экспериментах с поляризованными пучками может возникнуть необходимость деполаризовать пучок без изменения его параметров. Такая задача может быть решена с помощью специально организуемого спинового резонанса. Введем для конкретности продольное магнитное поле в прямолинейный промежуток накопителя на участке  $0 < \theta < \theta_0$  :

$$H_{||} = 2 H_{||}^0 \cos \omega_{ext} t. \quad (I.8.1)$$

Частоту деполаризатора  $\omega_{ext}$  выберем вблизи резонансного значения

$$\omega_{ext} \simeq (\nu - \kappa) \omega_s, \quad (I.8.2)$$

где  $\omega_s$  — частота обращения в накопителе,  $k$  — ближайшее к  $\nu$  целое число.

Мощность созданного резонанса равна

$$\omega_k = \frac{q}{q_0} \frac{H_{II}^c}{\langle H_2 \rangle} \frac{\theta_0}{2\pi} |\vec{v} \vec{\ell}|_{\theta=0} \quad (I.8.3)$$

(Заметим, что величина  $|\vec{v} \vec{\ell} \exp(-ik\theta)| \approx |\vec{v} \vec{\eta}|$  в прямолинейном промежутке остается постоянной). Продольное поле целесообразно вводить в участок, где значение  $\vec{n} \vec{v}$  минимально.

Предполагаем также, что ближайшие модуляционные резонансы, вызываемые синхротронными колебаниями энергии, достаточно удалены и не оказывают воздействия на спин:

$$|\omega_k| \ll \nu_r.$$

Однако создание спинового резонанса (I.8.3) еще не обеспечивает полного исчезновения поляризации, так как сохраняется средняя компонента спина вдоль направления  $\vec{n}$ .

Будем модулировать частоту осцилляции поля  $\omega_{ext}$ , чтобы обеспечить прохождения резонанса (и попадание в него):

$$\omega_{ext} = \bar{\omega}_{ext} + \varepsilon(t), \quad (I.8.4)$$

где  $\varepsilon(t)$  описывает модуляцию  $\omega_{ext}$  ( $\bar{\omega}_{ext} = \text{const}$ ). Скорость прохождения резонанса  $\dot{\varepsilon}$  в момент его пересечения (при  $\varepsilon = 0$ ) примерно равна

$$|\dot{\varepsilon}| \approx \varepsilon_{max} f_m$$

где  $\varepsilon_{max}$  и  $f_m$  — средние амплитуда и частота модуляции  $\omega_{ext}$ . В случае, когда прохождение резонанса является быстрым ( $|\omega_k|^2 \ll \ll |\dot{\varepsilon}|/\omega_s^2$ ), изменение проекции спина на  $\vec{n}_s$  при однократном пересечении резонанса, как хорошо известно, равно ( $/15-20/$ , см. также гл. II):

$$(\delta S_{\vec{n}})_{огн.} = S_{\perp} \sqrt{\frac{2\pi |\omega_k|^2}{|\dot{\varepsilon}|}} \omega_s \cos \phi \quad (I.8.5)$$

где  $S_{\perp} = \sqrt{S^2 - S_{\vec{n}}^2}$ ,  $\phi$  — фаза прохождения резонанса.

При периодическом изменении  $\mathcal{E}(t)$  разность фаз  $\phi$  между последовательными прохождениями является заданной и добиться деполяризации пучка невозможно после любого числа прохождений. Необходимо обеспечить случайность фаз прохождений. Для этого достаточно, чтобы амплитуда модуляции  $\mathcal{E}_{max}$  случайно изменялась бы за время между прохождениями на величину порядка  $f_m$ . В электронных накопителях случайность фаз может обеспечиваться воздействием квантовых флуктуаций синхротронного излучения (см. гл. III). Использование случайного механизма воздействия на спин для получения нулевой степени поляризации является необходимым, поскольку любое динамическое размешивание спинов (например, в области резонанса) не может дать полного исчезновения среднего значения спина в пучке.

При некоррелированных сложениях величин  $(\delta S_{\vec{n}})_{сгн.}$  имеем

$$\dot{\overline{S_{\vec{n}}}} = \frac{d}{dt} \overline{(\delta S_{\vec{n}})_{сгн.}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S_{\vec{n}}} \frac{d}{dt} \overline{(\delta S_{\vec{n}})_{сгн.}^2} = -S_{\vec{n}} \left( \frac{\pi |\omega_{\kappa}|^2 \omega_s^2 f_m}{|\dot{\mathcal{E}}| \pi} \right),$$

где  $\pi/f_m$  — время между последовательными пересечениями резонанса. Следовательно, при условии размешивания фаз прохождений степень поляризации экспоненциально уменьшается, и характерное время исчезновения поляризации равно

$$\tau_d = \left( \frac{|\omega_{\kappa}|^2 \omega_s^2 f_m}{|\dot{\mathcal{E}}|} \right)^{-1} \approx \frac{\mathcal{E}_{max}}{|\omega_{\kappa}|^2 \omega_s^2}. \quad (I.8.6)$$

Заметим, что при быстрых некоррелированных многократных пересечениях резонанса характерное время деполяризации слабо зависит от частоты модуляции  $f_m$ .

При высоких энергиях пучка ( $\gamma_0 \gg 1$ ) целесообразно использовать поперечные поля. Применение скрещенных электрических и магнитных полей (в виде плоской волны) позволяет кроме этого избира-



тельно деполяризовать один из пучков в накопителях со встречными пучками. Так, сила Лоренца, действующая на пучок со стороны скрещенных электромагнитных полей,  $e(\vec{E}_w + [\vec{v}\vec{H}_w]) \simeq e\vec{E}_w(1 \pm v_{||})$  очень мала для сопутствующей волны ( $\sim \vec{E}(1 - v_{||})$ ) и удваивается для встречной волны ( $\sim 2\vec{E}$ ).

Дополнительный эффект, возникающий при использовании поперечных полей, связан с изменением равновесной орбиты частиц. Поэтому мощность спинового резонанса равна

$$|W_K| = \gamma_0 \frac{2H_w}{\langle H_z \rangle} \frac{\theta_0}{2\pi} |F_\nu|, \quad (I.8.7)$$

где  $|F_\nu|$  — дополнительный фактор, учитывающий искажение равновесной орбиты. В идеальном накопителе:

$$|W_K| = \frac{\gamma_0}{2\pi R} \left| \int_0^{2\pi} z_s'' e^{-i\nu_0 \tilde{K}_z} d\theta \right| = \frac{\gamma_0^2}{2\pi R} \left| \int_0^{2\pi} K_z z_s' e^{-i\nu_0 \tilde{K}_z} d\theta \right|,$$

$$z_s'' + g_z z_s = 2 \frac{(H_w)_x}{\langle H_z \rangle} R.$$

С помощью формул и решения уравнения для  $\tilde{z}_s$

$$\tilde{z}_s = \frac{2R}{\langle H_z \rangle} \frac{f_z}{2i} \int_{-\infty}^{\theta} (H_w)_x f_z^* d\theta + \text{к.с.} \quad (I.8.8)$$

получаем:

$$W_K = \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(H_w)_x}{\langle H_z \rangle} F_\nu e^{i\nu_0 \tilde{K}_z} d\theta,$$

где функция отклика  $F_\nu$  равна:

$$F_\nu = \frac{\gamma_0}{2} e^{-i\nu_0 \tilde{K}_z} \left\{ f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} K_z f_z' e^{i\nu_0 \tilde{K}_z} d\theta - f_z \int_{-\infty}^{\theta} K_z f_z'^* e^{i\nu_0 \tilde{K}_z} d\theta \right\}. \quad (I.8.9)$$

Для круглого накопителя и однородной фокусировки функция отклика

$F_\nu$  следующая:

$$F_\nu = \frac{\nu^2}{\nu^2 - \nu_z^2}.$$

Отметим еще одно обстоятельство. В многосгустковом режиме описанные способы деполяризации позволяют избирательно деполяризовать определенные сгустки частиц (с помощью временной развертки). Появляются возможности сравнения сгустков с разной степенью поляризации на одной дорожке накопителя.

### § 9. Абсолютная калибровка энергии пучка в идеальном накопителе

Регистрация скачкообразного изменения степени поляризации при определенной частоте деполяризующего поля позволяет измерять среднюю частоту прецессии спинов  $\Omega = \omega_s \gamma q_a / q_e$ . В накопителях электронов и позитронов, где существует эффект радиационной самополяризации пучков  $/2I/$ , измерение  $\Omega$  позволяет прямо измерять энергию частиц, так как отношение  $q_a / q_e$  известно из  $g-2$  экспериментов с высокой точностью.

Наличие энергетического разброса в пучке не является, в первом приближении, ограничением точности этого метода. Отклонение энергии частицы на величину  $m \Delta \gamma$  от среднего значения приводит, в присутствии ускоряющего ВЧ-напряжения, к синхротронным колебаниям энергии, которые модулируют частоту прецессии спина.

Усредненный по фазовым колебаниям спектр спинового движения имеет центральную линию и боковые частоты, отстоящие на величины, кратные синхротронной частоте.

Ширина центральной линии спектра определяется следующим приближением: квадратичной нелинейностью накопителя. При компенсации нелинейности разброс спиновых частот может быть, в принципе, сведен к минимуму, определяемому квадратом энергетического разброса. На практике, однако, точность измерения энергии технически ограничена медленными нерегулярными пульсациями магнитного поля накопителя, которые "размазывают" среднюю частоту прецессии.

Абсолютная калибровка шкалы энергии накопителя методом резонансной деполяризации позволили резко повысить точность измерения масс многих частиц /37,58,59,91,92/.

Приведем таблицу значений масс частиц, полученных методом резонансной деполяризации, взятую из работы /64/:

Таблица I

Массы частиц, полученные методом резонансной деполяризации

|                                   | Старое табличное значение массы, МэВ | Значение массы, полученное на ВЭПП-2М, ВЭПП-4, МэВ |
|-----------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $m_{K^+} - m_{K^-}$<br>(тест СРТ) | $-0,032 \pm 0,090$                   | $-0,009 \pm 0,054$ *)                              |
| $m_{K^0}$                         | $497,67 \pm 0,13$                    | $497,618 \pm 0,85^{**})$                           |
| $m_\phi$                          | $1019,62 \pm 0,24$                   | $1019,53 \pm 0,09$                                 |
| $m_\psi$                          | $3097,1 \pm 0,9$                     | $3096,93 \pm 0,09$                                 |
| $m_{\psi'}$                       | $3685,3 \pm 1,2$                     | $3686,00 \pm 0,10$                                 |
| $m_r$                             | $9458 \pm 6$                         | $9459,7 \pm 0,6$                                   |

\*) Результат получен с привлечением данных работ другого типа.

\*\*\*) Предварительный результат.

Методом резонансной деполяризации был проведен эксперимент по сравнению аномальных магнитных моментов электрона и позитрона /65/. Было показано, что их аномальные магнитные моменты равны с точностью не хуже  $10^{-5}$ , что было на два порядка выше точности других экспериментов по измерению аномального магнитного момента позитрона.

## Г Л А В А   П

### УСКОРЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ

Сейчас пока существует единственный экспериментально осуществленный способ получения поляризованных протонов высокой энергии и интенсивности — получать их из источников, дающих эти частицы низкой энергии, с ускорением в ускорителях до нужной энергии. В этом способе одной из наиболее важных является проблема сохранения поляризации в процессе ускорения. Задача сохранения поляризации при ускорении или замедлении может быть актуальна и для других частиц, например, для электронов и позитронов. Так, можно быстро поляризовать эти частицы на высокой энергии, используя эффект радиационной поляризации и замедлить их затем до нужной в данном эксперименте. В ускорителях, где радиационная поляризация не эффективна, можно электроны получать также из источника поляризованных электронов низких энергий с последующим ускорением. Трудности сохранения поляризации пучков при ускорении (или замедлении) связаны с пересечениями спиновых резонансов.

#### § I. Однократное прохождение резонанса

Рассмотрим задачу о пересечении уединенного резонанса. Пусть, для определенности, расстройка  $\varepsilon_k$  изменяется от больших отрицательных до больших положительных значений, и проходит через резонанс в момент времени  $\theta = 0$  ( $\varepsilon_k(0) = 0$ ). Изменением ширины резонанса  $|\omega_k|$  при пересечении обычно можно пренебречь.

В работе /15/, где впервые рассматривалась задача о пересечении спиновых резонансов, были введены понятия быстрого и адиабатического проходов. Для постоянной скорости прохождения и начальной поляризации по полю ( $S_z(\varepsilon_k \rightarrow -\infty) = 1$ ) был получен результат при любой скорости  $|\varepsilon'_k|$  :

$$S_z(\varepsilon_k \rightarrow \infty) = -1 + 2 \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{|\omega_k|^2}{|\varepsilon'_k|}\right). \quad (\text{П.І.І})$$

Известен результат при произвольном начальном условии для быстрого прохождения ( $|\varepsilon'_k| \gg |\omega_k|^2$ ) в эффективной зоне резонанса /15-20/.

Получим полное решение при пересечении резонанса. Такой результат полезен, например, для учета конечного числа последовательных прохождений резонансов при ускорении частиц, особенно необходим для построения решения при периодических пересечениях резонанса.

Спин в резонансной системе движется в поле

$$\vec{\omega} = (\omega, 0, \varepsilon), \quad (\text{П.І.2})$$

где для простоты записи опущен индекс "к". Вращение  $\vec{\omega}_\perp$  при прохождении всегда можно исключить переходом в систему, вращающуюся относительно резонансной вместе с  $\vec{\omega}_\perp$ .

В области адиабатического изменения  $\vec{\omega}(\theta)$  движение спина представляет собой прецессию вокруг  $\vec{\omega}$  с частотой  $\omega$ :

$$\vec{S} = S_\omega \frac{\vec{\omega}}{\omega} + \sqrt{S^2 - S_\omega^2} \operatorname{Re} \left[ \vec{\ell}_\omega \exp\left(i \int_0^\theta \omega d\theta + \psi_0\right) \right], \quad (\text{П.І.3})$$

Здесь  $S_\omega = \vec{S} \vec{\omega} / \omega = \text{const}$ ,  $\vec{\ell}_\omega$  — комплексный орт, поперечный к  $\vec{\omega}$  ( $\vec{\ell}_\omega \vec{\omega} = 0$ ). Для выполнения адиабатичности необходима малость изменения угловой скорости вращения спина  $\vec{\omega}$  за время его оборота вокруг поля  $2\pi/\omega$ :

$$\omega^2 \gg |\vec{\omega}'| = \sqrt{\varepsilon'^2 + \omega'^2}. \quad (\text{П.І.4})$$

В адиабатической зоне решение (П.І.3) справедливо с экспоненциальной точностью при монотонном изменении  $\vec{\omega}$ . Если  $\vec{\omega}$  при прохождении испытывает колебания, то необходимо дополнительное условие малости частоты колебаний поля  $\nu_\omega$ :

$$\nu_\omega \ll \omega. \quad (\text{П.І.5})$$

Если условие (П.І.4) выполнено для всех значений  $\varepsilon$  ( $\omega^2 \gg |\varepsilon'|$ ), то адиабатическое решение справедливо всюду с экспоненциальной точностью. При этом экспоненциально малое отличие решения (П.І.3) от точного набирается в области  $|\varepsilon| \lesssim \omega$ . Поэтому под границей эффективной резонансной области (зоны) естественно понимать величину

$$\varepsilon_b \simeq \max(\omega, \sqrt[4]{\varepsilon'^2 + \omega'^2}). \quad (\text{П.І.6})$$

Вне этой области решение для спина имеет вид (П.І.3) с постоянными параметрами  $S_\omega$  и  $\psi_0$ . Необходимо связать проекции  $S_\omega$  и фазы  $\psi_0$  до прохождения и после прохождения.

Начнем с рассмотрения предельных случаев.

а) Быстрое прохождение резонанса

В этом случае время прохождения резонанса очень мало и вектор спина не успевает существенно измениться ( $\omega \ll \sqrt{|\varepsilon'|}$ ). Граница эффективной зоны (при  $\omega = \text{const}$ ) равна  $\varepsilon_b \simeq \sqrt{|\varepsilon'|}$ . Именно в этой зоне угол поворота спина вокруг оси  $Z$  (ось  $Z$  направлена вдоль  $\vec{n}_s$ )

$$\Delta\psi \sim \int_0^{\varepsilon_b} \varepsilon d\theta = \int_0^{\varepsilon_b} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} d\varepsilon \simeq \frac{\varepsilon_b^2}{\varepsilon'} \sim 1$$

порядка единицы и в ней изменяется проекция спина  $S_z$ :

$$\Delta S_z \sim \omega \tau \sim \omega / \sqrt{|\varepsilon'|}. \quad (\text{П.І.7})$$

Вне эффективной зоны влияние возмущения  $\omega$  усредняется быстрым вращением спина вокруг оси  $Z$ .

Решая уравнения движения спина

$$S'_x = \omega S_y$$

$$S'_x + iS'_y = i\varepsilon (S_x + iS_y) - i\omega S_z$$

в поле (П.І.2) по теории возмущений, можно количественно определить малое искажение движения спина. В нулевом приближении  $\omega = 0$

и

$$S_z(\theta) = S_z(\theta_1),$$

$$(S_x + iS_y)_\theta = (S_x + iS_y)_{\theta_1} \exp\left(i \int_{\theta_1}^{\theta} \varepsilon d\theta\right).$$

Здесь  $\theta_1 < 0$  — момент времени вне эффективной зоны до прохождения резонанса. С учетом следующего приближения получаем:

$$S_z(\theta) = S_z(\theta_1) + \operatorname{Im} \left\{ (S_x + iS_y)_{\theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta} w \exp\left(i \int_{\theta_1}^{\theta} \varepsilon d\theta\right) d\theta \right\}, \quad (\text{П. I. 8})$$

$$(S_x + iS_y)_\theta = \left[ (S_x + iS_y)_{\theta_1} - i S_z(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta} w \exp\left(-i \int_{\theta_1}^{\theta} \varepsilon d\theta\right) d\theta \right] \exp\left(i \int_{\theta_1}^{\theta} \varepsilon d\theta\right).$$

В таком виде результат был получен во многих работах [15–20].

Это решение справедливо в эффективной зоне пока угол вращения спина вокруг оси  $Z$  в идеальном приближении  $\psi = \int_0^{\theta} \varepsilon d\theta$  мало отличается от реального угла вращения, в адиабатической зоне равного  $\int_0^{\theta} \sqrt{\varepsilon^2 + w^2} d\theta$ . Для расширения области применимости полученного решения нужно его сшить с решением в адиабатической зоне. Это эквивалентно замене в формулах (П. I. 8) расстройки  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\text{eff}}$ , где

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \begin{cases} \varepsilon & \text{в эффективной зоне} \\ \varepsilon \sqrt{1 + w^2/\varepsilon^2} & \text{в адиабатической зоне} \end{cases}$$

В простом случае  $w = \text{const}$ ,  $\varepsilon' = \text{const} > 0$  связь между адиабатическими зонами до прохождения резонанса ( $\theta_1 < 0$ ) и после прохождения ( $\theta_2 > 0$ ) дается в первом приближении выражением:

$$S_z(\theta_2) = S_z(\theta_1) + \sqrt{\frac{2\pi w^2}{|\varepsilon'|}} \operatorname{Re} \left\{ (S_x + iS_y)_{\theta_1} \exp \left[ i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varepsilon_{\text{eff}} d\theta - i \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad (\text{П. I. 9})$$

$$(S_x + iS_y)_{\theta_2} = \left[ (S_x + iS_y)_{\theta_1} - \sqrt{\frac{2\pi w^2}{|\varepsilon'|}} S_z(\theta_1) \exp i \left( \frac{\pi}{4} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varepsilon_{\text{eff}} d\theta \right) \right] \exp \left( i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varepsilon_{\text{eff}} d\theta \right).$$

Здесь  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varepsilon_{\text{eff}} d\theta = \frac{\varepsilon^2(\theta_1)}{2\varepsilon'} + \frac{w^2}{4\varepsilon'} \ln \frac{\varepsilon^2(\theta_1)}{\varepsilon'} + \dots$ ,

$$\int_0^{\theta_2} \varepsilon_{eff} d\theta = \frac{\varepsilon^2(\theta_2)}{2\varepsilon'} + \frac{\omega^2}{4\varepsilon'} \ln \frac{\varepsilon^2(\theta_2)}{\varepsilon'} + \dots$$

Как видим, замена  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{eff}$  при быстром пересечении резонанса с постоянной скоростью поправляет фазу прецессии с логарифмической точностью на малую величину  $(\omega^2/4\varepsilon') \ln(\varepsilon^2/\varepsilon')$ .

### б) Медленное прохождение резонанса

В этом случае при малом изменении угловой скорости  $\vec{\omega}$  спин совершает много оборотов ( $\omega^2 \gg |\varepsilon'|$ ). Поэтому в нулевом приближении ось прецессии спина совпадает с направлением  $\vec{\omega}$  и переворачивается при прохождении резонанса вместе с  $\vec{\omega}$  (Рис.6).

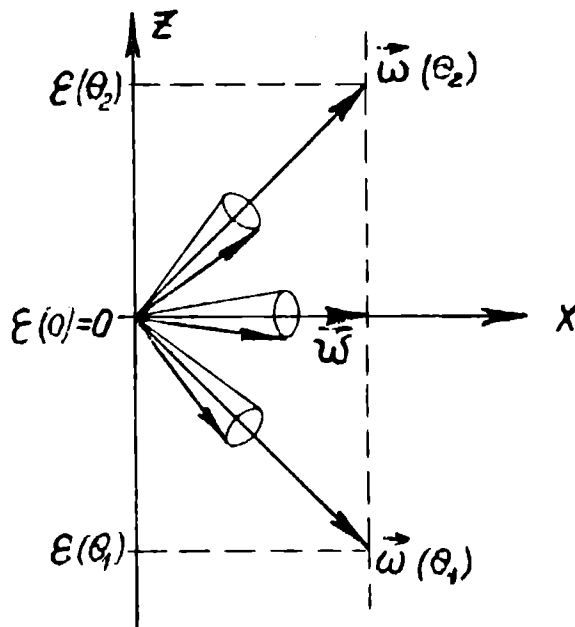


Рис.6. Изменение оси прецессии при адиабатическом пересечении резонанса

Адиабатические поправки можно найти следующим образом. Запишем уравнение движения спина в системе координат, где ось 3 направлена вдоль  $\vec{\omega}$ , ось 1 лежит в плоскости  $(\omega, \varepsilon)$ . В этой системе угловая скорость вращения спина имеет следующие компоненты

$$\vec{\omega}_a = (0, \alpha', \omega),$$

где  $\alpha' = \frac{d}{d\theta} \arctg \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\omega \varepsilon'}{\omega^2 + \varepsilon^2} = \omega \varepsilon' / \omega^2$  — угловая скорость поворота вектора  $\vec{\omega}$ . В нулевом приближении:



$$S_3 = S_{\vec{\omega}} = \vec{S} \vec{\omega} / \omega = \text{const} \quad , \quad (S_1 + iS_2)_\theta = (S_1 + iS_2)_{\theta_1} \exp(i \int_{\theta_1}^{\theta} \omega d\theta).$$

Так же, как была получена формула (П.І.8) (с заменой  $\omega \rightarrow -\omega \varepsilon' / \omega^2$ ,  $\varepsilon \rightarrow \omega$ ), получаем в первом приближении:

$$S_3(\theta) = S_3(\theta_1) - \text{Re} (S_1 + iS_2)_{\theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\omega \varepsilon'}{\omega^2} \exp(i \int_{\theta_1}^{\theta} \omega d\theta) d\theta, \quad (\text{П.І.ІО})$$

$$(S_1 + iS_2)_\theta = \left[ (S_1 + iS_2)_{\theta_1} + S_3(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\omega \varepsilon'}{\omega^2} e^{-i \int_{\theta_1}^{\theta} \omega d\theta} d\theta \right] e^{i \int_{\theta_1}^{\theta} \omega d\theta}.$$

При пересечении резонанса с постоянной скоростью  $\varepsilon' = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ , имеем

$$S_3(\theta_2) = S_3(\theta_1) - 2 \frac{\pi}{3} e^{-\frac{\pi}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon'}} \text{Re} \left[ (S_1 + iS_2)_{\theta_1} \exp(i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \omega d\theta) \right], \quad (\text{П.І.ІІ})$$

$$(S_1 + iS_2)_{\theta_2} = \left[ (S_1 + iS_2)_{\theta_1} + S_3(\theta_1) 2 \frac{\pi}{3} \exp(-\frac{\pi}{4} \frac{\omega^2}{\varepsilon'} + i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \omega d\theta) \right] \exp(i \int_{\theta_1}^{\theta_2} \omega d\theta).$$

Интересно сравнить полученный по теории возмущений результат с формулой (П.І.І), полученной в работе /15/. При начальной поляризации по полю ( $S_2(\theta_1) = 1$ ) изменение  $\Delta S_3$  возникает во втором приближении, которое из условия  $S_1^2 + S_3^2 = \text{const}$  легко выражается через результат (П.І.ІІ), полученный в первом приближении:

$$\Delta S_3 \simeq -S_1^2/2 = 2 \frac{\pi^2}{9} \exp(-\frac{\pi}{2} \frac{\omega^2}{\varepsilon'}). \quad (\text{П.І.І2})$$

Видим, что наш результат отличается от точного (П.І.І) множителем  $\pi^2/9$ . Это различие связано с тем, что большой показатель экспоненты  $\sim \omega^2/\varepsilon'$  определяется по теории возмущений с относительной точностью параметра разложения  $\varepsilon'/\omega^2$ :

$$\frac{\omega^2}{\varepsilon'} \rightarrow \frac{\omega^2}{\varepsilon'} \left( 1 \pm \alpha \frac{\varepsilon'}{\omega^2} + \dots \right) = \frac{\omega^2}{\varepsilon'} \pm \alpha + \dots ,$$

где  $\alpha$  — число порядка единицы. Поэтому теория возмущений в адиабатическом случае позволяет вычислить неадиабатические поправки с точностью до предэкспоненциального множителя.

### в) Прохождение резонанса с произвольной скоростью

Для произвольной скорости пересечения задачу будем решать при условии малости относительного изменения  $\varepsilon'$  и  $\omega$  в эффективной зоне

$$|\Delta \varepsilon' / \varepsilon'| \ll 1, \quad |\Delta \omega / \omega| \ll 1 \quad \text{при } |\varepsilon| \lesssim \varepsilon_b. \quad (\text{П.І.І3})$$

Будем использовать уравнение (І.І.4) для двухкомпонентной комплексной переменной  $\chi$  в резонансной системе:

$$i \chi' = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{\omega} \chi, \quad \vec{S} = \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi. \quad (\text{П.І.І4})$$

Решение этого уравнения в адиабатической зоне, эквивалентное (П.І.3), в системе, в которой ось 3 направлена по  $\vec{\omega}$  запишется в виде:

$$\chi = \mathcal{P}_{\theta,0} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\theta,0} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2} \int_0^\theta \omega d\theta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2} \int_0^\theta \omega d\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{П.І.І5})$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные ( $|A|^2 + |B|^2 = 1$ ).

Можно не решать уравнение (П.І.4) в эффективной зоне, где движение спина довольно сложное. Воспользуемся методом сшивки решений путем выхода в комплексную плоскость времени  $\theta$ . Будем обходить эффективную зону достаточно далеко, чтобы решение оставалось в виде (П.І.3). Особые точки, определяемые из уравнения

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} = 0,$$

лежат в комплексной плоскости  $\theta$ , и данная задача эквивалентна задаче о надбарьерном отражении в квантовой механике. Если  $\varepsilon'$  и  $\omega$  постоянны, то имеются только две особые точки "поворота"

$$\theta_n = \pm i \frac{\omega}{\varepsilon'}$$

Отклонения  $\varepsilon'$  и  $\omega$  от постоянных приводят к смещению этих точек и появлению новых, которыми при условии (П.І.І3) можно пренебречь. Используя известный метод /93/, обойдем эффективную зону по окружности большого радиуса, на которой решение имеет вид (П.І. 3). Получаем искомую связь коэффициентов А и В до прохождения ( $\theta < 0$ ) и после ( $\theta > 0$ ) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\theta > 0} = R \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\theta < 0}, \quad R(\varepsilon' > 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - e^{-2\operatorname{Re} J}} e^{-i\varphi} & -e^{-J} \\ e^{-J^*} & \sqrt{1 - e^{-2\operatorname{Re} J}} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{П.І.І6})$$

где

$$J = -i \int_0^{\theta_n} \omega d\theta, \quad \operatorname{Re} J = \frac{1}{2} \left| \int_{\theta_n^*}^{\theta_n} \omega d\theta \right| - \quad (\text{П.І.І7})$$

величина интеграла между точками поворота,  $\varphi$  — постоянная фаза, которая остается неопределенной. Мнимая часть  $J$  определяет момент прохождения резонанса. Момент времени  $\theta = 0$  можно выбрать так, чтобы

$$\operatorname{Im} J = 0.$$

При  $\varepsilon' < 0$  матрица  $R(\varepsilon' < 0)$  получается транспонированием матрицы  $R(\varepsilon' > 0)$ :

$$R(\varepsilon' < 0) = R^T(\varepsilon' > 0).$$

Фазу  $\varphi$  можно найти из сравнения с точным решением, при постоянных  $\varepsilon'$  и  $\omega$ , которое построено в Приложении 2. В этом случае

$$J = \frac{\pi}{4} \frac{\omega^2}{|\varepsilon'|} \equiv \pi a^2,$$

а угол

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + a^2 \ln \frac{a^2}{e} - \arg \Gamma(ia^2), \quad (\text{П. I. 18})$$

где  $\Gamma$  — гамма функция.

В случае быстрого прохождения резонанса ( $a^2 \ll 1$ ):

$$\varphi \simeq \frac{\pi}{4} + a^2 \left( \ln \frac{a^2}{e} + 0.58 \right) + \dots$$

При медленном пересечении:

$$\varphi \simeq \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{180a^6} + \dots$$

При условии относительно малого изменения  $\varepsilon'$  и  $\omega$  в эффективной зоне (П. I. 13) отличием значения  $\varphi$  от найденного по формуле (П. I. 18) всегда можно пренебречь. Тут же отметим, что абсолютное изменение  $\text{Re } J$  и фазовый сдвиг момента пересечения резонанса могут быть не малыми при адиабатическом пересечении резонанса. Полученные формулы (П. I. 16) с фазой  $\varphi$ , определяемой выражением (П. I. 18), позволяют получить и предэкспоненциальный множитель в случае адиабатического прохождения.

Для переменных  $\chi$  до и после прохождения получаем следующую связь:

$$\chi_{\theta_2} = \mathcal{P}_{\theta_2 0} R \mathcal{P}_{0 \theta_1} \chi_{\theta_1}. \quad (\text{П. I. 19})$$

Отсюда для проекций спина получаем:

$$\begin{aligned} S_3^+ &= (1 - 2e^{-2J})S_3^- - 2e^{-J}\sqrt{1-e^{-2J}} \text{Re} \left[ (s_1^- + i s_2^-) \exp i \left( \int_{\theta_1}^0 \omega d\theta + \varphi \right) \right], \\ S_1^+ + i S_2^+ &= \left[ (s_1^- + i s_2^-) (1 - e^{-2J}) e^{i(2\varphi + \int_{\theta_1}^0 \omega d\theta)} - (s_1^- - i s_2^-) e^{-2J} e^{i \int_{\theta_1}^0 \omega d\theta} + \right. \\ &\quad \left. + 2 S_3^- e^{-J} \sqrt{1-e^{-2J}} e^{i\varphi} \right] e^{i \int_0^{\theta_2} \omega d\theta}. \end{aligned} \quad (\text{П. I. 20})$$

(Момент времени  $\theta = 0$  выбран так, чтобы  $\text{Im } J = 0$ ). При начальном условии  $S_3^- = 1$  получаем результат (П. I. 1) работы /15/. Отметим также, что при усреднении по начальным фазам вращения сте-

пень поляризации пучка после прохождения определяется простым выражением, совпадающим с формулой (П.І.І) для любой начальной поляризации  $S_3^-$  (при замене  $1 \rightarrow S_3^-$ ):

$$\langle S_3^+ \rangle = \langle (1 - 2e^{-2J}) S_3^- \rangle. \quad (\text{П.І.2I})$$

При быстром прохождении резонанса  $J \ll 1$ ,  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}$  полученное решение (П.І.20) совпадает с (П.І.9), так как  $S_2^- = -S_3^-$ ,  $S_x^- = -S_x^+$ ,  $S_y^- = S_y^+$ . При медленном прохождении  $J \gg 1$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ , решение переходит в (П.І.ІІ).

## § 2. Периодические прохождения

При работе с поляризованными пучками в накопителях часто возникает задача о периодических прохождениях. Мы уже встречались с периодическими прохождениями, вызываемыми преднамеренно, либо синхротронными колебаниями энергии (см. Гл.І § 7в, § 8). Также важно исследовать синхротронную модуляцию расстройки и с точки зрения возможности сохранения поляризации пучка при изменении энергии. Однако удалось рассмотреть наиболее простые случаи, когда перекрываются резонансы существенно разной мощности. Результаты предыдущего параграфа дают другую возможность: исследовать случаи, когда перекрываются много резонансов примерно одинаковой мощности.

С общей точки зрения такая задача является задачей о движении спина в периодическом поле  $\vec{\omega}(\theta + \tau) = \vec{\omega}(\theta) = \mathcal{E}(\theta) \vec{n}_s + Re(\vec{\ell}_p \omega)$  и, следовательно, существует некоторое периодическое решение  $\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + \tau)$ . Спин сохраняет проекцию вдоль  $\vec{n}$ , поперечная проекция поворачивается вокруг  $\vec{n}$  за период на угол  $2\pi\mu$ .

Отыскание периодического решения  $\vec{n}$  и угла поворота  $2\pi\mu$  за период сводится к нахождению матрицы  $U$ , преобразующей переменную  $\chi$  через период:  $\chi_\tau = U \chi_0$ . Получаем (см.І.2.9):

$$\cos \pi \mu = \frac{1}{2} S_p U, \quad \vec{n}(\theta) = \frac{i}{2 \sin \pi \mu} S_p \vec{\sigma} U. \quad (\text{П.2.І})$$

Предположим, что амплитуда колебаний  $\mathcal{E}$  достаточно велика и адиабатическая зона достигается. Если за период происходит двукратное пересечение резонанса в моменты времени  $\theta = \theta_a$  и  $\theta = \theta_b$ , то для матрицы  $U$  получаем

$$U = \mathcal{T}_{\theta_b} R_b \mathcal{T}_{\theta_b \theta_a} R_a \mathcal{T}_{\theta_a 0}. \quad (\text{П.2.2})$$

Здесь момент  $\theta = 0$  выбран в адиабатической зоне:  $|\mathcal{E}(0)| \gg \mathcal{E}_b$ ,  $\mathcal{E}(0) < 0$ .

Отсюда получаем матричные элементы для  $U$  ( $U_{11} = U_{22}^*$ ,  $U_{12} = -U_{21}^*$ ):

$$U_{11} = \left[ (1 - e^{-2J_a}) (1 - e^{-2J_b}) \right]^{1/2} e^{i\chi} + e^{-J_a - J_b + i\gamma}, \quad (\text{П.2.3})$$

$$U_{12} = \left[ e^{-J_b} \sqrt{1 - e^{-2J_a}} e^{\frac{i}{2}(\chi + \gamma)} - e^{-J_a} \sqrt{1 - e^{-2J_b}} e^{-\frac{i}{2}(\chi + \gamma)} \right] \exp \frac{i}{2} (\varphi_a - \varphi_b + \alpha_-^{(1)} - \alpha_-^{(2)}).$$

Обозначения в этих формулах следующие:

$$\chi = \varphi_a + \varphi_b + \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2}, \quad \alpha = \alpha_+ + \alpha_- = \int_0^T \omega d\theta, \quad (\text{П.2.4})$$

$$\alpha_+ = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \omega d\theta, \quad \alpha_- = \int_0^{\theta_a} \omega d\theta + \int_{\theta_b}^T \omega d\theta \equiv \alpha_-^{(1)} + \alpha_-^{(2)}$$

Формулы для  $\vec{n}$  и  $\cos \pi/\mu$  можно записать в виде

$$\cos \pi/\mu = \sqrt{(1 - e^{-2J_a})(1 - e^{-2J_b})} \cos \chi + e^{-J_a - J_b} \cos \gamma, \quad (\text{П.2.5})$$

$$n_3(0) = \frac{\vec{n} \vec{\omega}}{\omega} = \frac{\text{Im } U_{11}^*}{\sin \pi/\mu}, \quad (n_1 + i n_2)_{\theta=0} = -i \frac{U_{12}^*}{\sin \pi/\mu}.$$

Полученные формулы дают всю необходимую информацию о поведении спина при периодических проходах. Практически интересно проследить как изменяется проекция спина  $S_2 = \vec{S} \vec{n}_s$  в адиабатической зоне. Ее изменение существенно зависит от ориентации  $\vec{n}$  относительно  $\vec{n}_s$ . Например, при начальном условии  $S_2 = 1$  проекция  $S_2$  будет изменяться при  $\theta = 0$  в интервале  $1 + (2n_3^2 - 1)$ . Интересно также проследить за значениями параметров, при которых возможны спиновые резонансы:  $\cos \pi/\mu = \pm 1$ .

Будем иллюстрировать результаты на важном примере синхротронных проходов резонанса:

$$\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} + G \cos \psi_r,$$

когда амплитуда модуляции достаточно велика ( $\sigma \gg \nu_f$ ,  $\sigma \gg \omega$ ).

В этом примере скорость пересечений и параметры быстроты прохождений равны ( $\bar{\varepsilon} < \sigma$ ):

$$\varepsilon' = \nu_f \sqrt{\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2}, \quad J_a = J_b = \frac{\pi}{4} \frac{\omega^2}{|\varepsilon'|} - i \frac{\omega^2}{3|\varepsilon'|} \frac{\bar{\varepsilon} \omega}{\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2} + \dots$$

Мнимая добавка к  $J_a$  и  $J_b$  описывает смещение фазы прохождения резонанса и при медленном пересечении может быть немалой. Выпишем значения параметров  $X$  и  $Y$  для синхротронной модуляции:

$$X = 2\psi + \frac{2}{\nu_f} (\sqrt{\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2} + \bar{\varepsilon} \arcsin \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma}) + \frac{\omega^2}{2|\varepsilon'|} \left[ 1 + \ln \frac{(\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2)^3}{\sigma^4 \omega^2} \right] + \dots$$

$$Y = \frac{x_+ - x_-}{2} + 2 \operatorname{Im} J = \frac{\pi}{\nu_f} \bar{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon'} \ln \frac{\sigma + \bar{\varepsilon}}{\sigma - \bar{\varepsilon}} + \dots$$

Рассмотрим предельные случаи:

а) Быстрые прохождения ( $J_a \ll 1$ ,  $J_b \ll 1$ ).

Из общей формулы (П.2.5) получаем:

$$\sin \pi \mu = [\sin^2 Y + 2(J_a + J_b) - 4\sqrt{J_a J_b} \cos X \cos Y]^{1/2}, \quad (\text{П.2.6})$$

$$n_3 = -\sin Y / \sin \pi \mu.$$

При быстрых пересечениях почти всегда  $|n_3| = 1$  за исключением узких полос по  $Y$ :  $|Y - m\pi| \lesssim [J_a + J_b - 2\sqrt{J_a J_b} (-1)^m \cos X]^{1/2}$ . Это условие определяет резонансную область, в которой проекция  $S_z$  может существенно изменяться. Частота изменения пропорциональна  $\sqrt{J}$ .

Для гармонической синхротронной модуляции условие резонанса

$Y = m\pi$  запишется в виде

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\nu_f} + \frac{\omega^2}{2\pi|\varepsilon'|} \ln \frac{\sigma + \bar{\varepsilon}}{\sigma - \bar{\varepsilon}} + \dots = m.$$

Поправка к положению резонанса  $\sim \omega^2 / (2\pi\varepsilon')$  мала с логарифмической точностью. В точках резонанса  $Y = m\pi$  проекция  $n_3 = 0$ , а частота медленного изменения проекции  $S_z$  равна ( $\psi = \pi/4$ ):

$$\mu \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\sqrt{|\varepsilon'|}} \sin \left[ \frac{\pi}{4} + m \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2}}{\nu_f} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\nu_f} \arcsin \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma} + \dots \right]. \quad (\text{П.2.7})$$

Нетрудно заметить, что величина (П.2.7) является асимптотикой

функции Бесселя при  $\sigma \gg \nu_f$ , т.е.

$$\nu_f \mu = \omega J_m(\sigma/\nu_f) = \omega_{km}. \quad (\text{П.2.8})$$

Сравнивая формулы (П.2.8) и (I.7.I7), видим, что при быстрых прохождениях описываемый метод эквивалентен методу усреднения (в котором модуляционные резонансы считаются разделенными).

б) Медленные прохождения ( $\exp J_a \gg 1, \exp J_b \gg 1$ )

В этом случае получаем:

$$\sin \pi \mu = \left[ \sin^2 X + e^{-2J_a} + e^{-2J_b} - 2e^{-J_a - J_b} \cos X \cos Y \right]^{1/2},$$

$$n_3 = \sin X / \sin \pi \mu.$$

Почти всегда  $n_3 = 1$ . Исключением являются резонансные области по  $X$ :

$$|X - m\pi| \lesssim \left[ e^{-2J_a} + e^{-2J_b} - 2e^{-J_a - J_b} (-1)^m \cos Y \right]^{1/2}.$$

В точке резонанса  $X = m\pi$  частота медленной прецессии  $\sim e^{-J}$ .

Для рассматриваемого примера синхротронной модуляции условие резонанса запишется в виде:

$$\int_0^{2\pi} \omega \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{2}{\pi \nu_f} \left[ \sqrt{\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2} + \bar{\varepsilon} \arcsin \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma} \right] + \frac{\omega^2}{2\pi |\varepsilon'|} \left[ 1 + \ln \frac{(\sigma^2 - \bar{\varepsilon}^2)^3}{\sigma^4 \omega^2} \right] + \dots \quad (\text{П.2.9})$$

Частота медленной прецессии равна

$$\mu = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{\omega^2}{|\varepsilon'|}\right) \sin \left[ \left(m + \frac{\bar{\varepsilon}}{\nu_f}\right) \frac{\pi}{2} + \frac{\omega^2}{4|\varepsilon'|} \ln \frac{\sigma + \bar{\varepsilon}}{\sigma - \bar{\varepsilon}} + \dots \right] \quad (\text{П.2.10})$$

Для медленных прохождений поправка к фазам, связанная с мощностью пересекаемого резонанса  $\omega$  не мала.

Эти результаты могут быть также получены по теории возмущений в системе, связанной с направлением  $\vec{\omega}$ . Однако, теория возмущения, как уже отмечалось, не дает правильного предэкспоненциального множителя.



в) Смешанный случай ( $J_a \ll 1$  ,  $e^{J_b} \gg 1$  )

Из общей формулы получаем:

$$\mu \approx 1/2 ,$$

$$n_3 \approx e^{-J_b} \sin \gamma - \sqrt{2J_a} \sin \chi ,$$

$$n_1 + i n_2 \approx i \exp -\frac{i}{2} (\varphi_+ + \varphi_-^{(2)} - \varphi_-^{(1)}) .$$

В смешанном случае малые значения  $|n_3|$ , в отличие от быстрых и медленных прохождений, не означают резонанса ( $\mu \neq K$ ). Смысл этого решения можно понять следующим образом. При быстром пересечении "снизу вверх"  $S_z$  не успевает измениться, затем, при медленном пересечении "сверху вниз"  $S_z$  изменяет знак. Следовательно, спин совершает поворот ( $\mu \approx 1/2$ ) вокруг некоторого направления, поперечного к оси  $\vec{n}_s$ .

г) Промежуточный случай ( $J_a \sim 1$  ,  $J_b \sim 1$  ).

В этой ситуации направление  $\vec{n}$  существенно зависит от  $\chi$  и  $\gamma$  во всем интервале их изменения. Проекция  $n_3$  пробегает все возможные значения

$$0 \leq |n_3| \leq e^{-J_a - J_b} + \sqrt{(1 - e^{-2J_a})(1 - e^{-2J_b})} .$$

Наибольшая чувствительность  $\vec{n}$  к положению точки ( $\chi$  ,  $\gamma$ ) наблюдается вблизи резонансов  $\mu = m$  , которые возможны, когда

$$J_a \approx J_b = J \quad , \quad \cos \chi \approx \cos \gamma \approx \pm 1$$

Приближенные формулы вблизи резонанса имеют вид:

$$\sin \pi \mu \approx \left[ \frac{(J_a - J_b)^2}{e^{2J} - 1} + (1 - e^{-2J})(\Delta \chi)^2 + e^{-2J}(\Delta \gamma)^2 \right]^{1/2} ,$$

$$n_3 \approx \left[ e^{-2J} \Delta \gamma - (1 - e^{-2J}) \Delta \chi \right] / \sin \pi \mu .$$

### § 3. Способы получения встречных пучков с противоположным у одного из пучков направлением поляризации

Опишем еще одно практически важное применение исследований в области спиновых резонансов. Можно проводить эксперименты на встречных поляризованных пучках с обращенным у одного из пучков направлением поляризации. Например, электроны и позитроны под действием синхротронного излучения в одном накопителе поляризуются в противоположных направлениях. Чтобы получить пучки с одинаковым направлением поляризации, изменим направление поляризации позитронов (или электронов) на противоположное. Для этого разведем энергии электронов и позитронов включением радиального электрического поля  $E_x$ . Это приведет к отличию частот прецессий спинов электронов и позитронов:

$$\Delta \nu = \nu_{\text{поз.}} - \nu_{\text{эл.}} = 2 \frac{\partial \nu}{\partial \gamma} \Delta \gamma = 2 \gamma \frac{\partial \nu}{\partial \gamma} \frac{\langle E_x \rangle}{\langle H_z \rangle}.$$

Устроим спиновый резонанс с мощностью  $\omega_k$ , введением внешнего модулированного поля (см. I.8.3 или I.8.7). Ширина резонанса  $|\omega_k|$  не должна перекрывать соседний резонанс для электронов.

$$|\omega_k| \ll |\Delta \nu|$$

Изменяя частоту осцилляции  $\omega_{ext}$ , можно медленно пройти резонанс и изменить направление поляризации позитронов. Для этого нужно выполнить условие адиабатичности:

$$|\dot{\omega}_{ext}| \ll \omega_s^2 / |\omega_k|^2.$$

Состояние поляризации с обращенным направлением динамически столь же устойчиво, как и "естественное" и лишь вследствие радиационных процессов будет медленно релаксировать к последнему.

Конечно, в этом способе принципиально учитывать искажение синхротронной модуляцией энергии. В простейшем случае можно зна-

чение  $|\omega_k|$  и  $|\Delta\nu|$  выбрать малыми <sup>ж)</sup> по сравнению с расстоянием до модуляционных резонансов  $\nu_j$ . При достаточно большой амплитуде  $\zeta$  синхротронной модуляции частоты прецессии необходимо учесть и изменение мощности  $|\omega_k|$  самого резонанса, вносимое этой модуляцией.

Совсем другие способы можно использовать при движении пучков по разным траекториям, как, например, в накопителе DORIS (ФРГ) и DCI (Франция). При этом можно получать устойчивыми и по отношению к радиационным процессам состояния поляризации с любым относительным направлением.

Приведем пример получения продольной поляризации с любым относительным знаком спиральности. При введении в промежуток встречи радиальных магнитных полей, состояния с одинаковой спиральностью осуществляются, если в месте встречи пучков углы наклона траекторий к основным плоскостям орбит (плоскости орбит параллельны) равны (лобовая встреча):  $\varphi = \pi/2 \nu_0$ . Состояние с разными спиральностями осуществляется, если углы наклонов, например, равны  $\pm \varphi$  (угол встречи пучков  $2\varphi$ , рис.7).

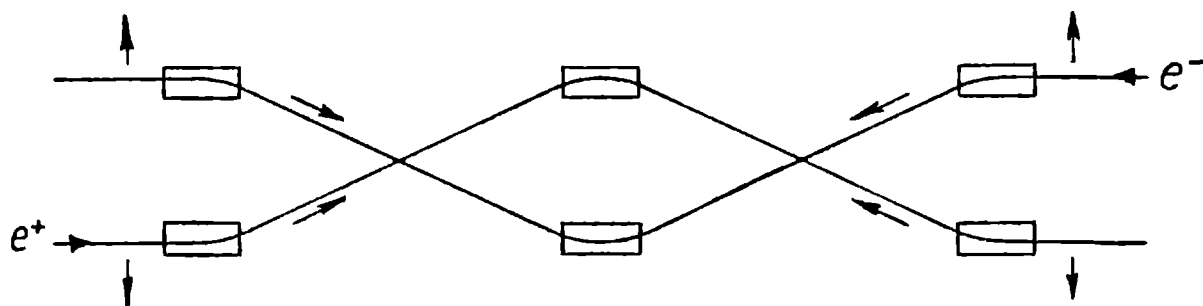


Рис.7. Схема получения электрон-позитронных встречных пучков с разными спиральностями

Дополнительные возможности управления орбитой и спином открывает использование для этих целей двунаправленных полей, на-

<sup>ж)</sup> Кроме "динамических" ограничений в накопителях электронов и позитронов существуют и "радиационные" ограничения, связанные с деполаризацией из-за квантовых флуктуаций синхротронного излучения в области резонанса (см. Гл. III).

пример, последовательно расположенных в промежутках вертикальных и радиальных магнитных полей.

#### § 4. Ускорение поляризованных частиц в ускорителях с вертикальным полем

Как хорошо известно, трудности сохранения поляризации пучков при ускорении (или замедлении) связаны с прохождением спиновых резонансов [7, 15-20]. В обычной ситуации, когда направление равновесной поляризации близко к направлению среднего магнитного поля, при ускорении частиц проходятся резонансы:

$$\nu_0 = \gamma \frac{q_a}{q_0} \approx \nu_k \equiv K_0 + K_z \nu_z + K_x \nu_x, \quad (\text{П.4.1})$$

где  $\nu_z$  и  $\nu_x$  — частоты вертикальных и радиальных бетатронных колебаний,  $K_0$ ,  $K_z$ ,  $K_x$  — целые числа. (Мы пока отвлекаемся от медленных синхротронных колебаний). Каждой паре чисел  $K_z$  и  $K_x$  отвечает серия резонансов с различными номерами азимутальных гармоник  $K_0$ . Резонансы при  $K_z = K_x = 0$  обязаны радиальным и продольным полям на замкнутых орбитах, появляющимся при искажениях структуры магнитного поля. Среди резонансов  $\nu_0 = K_0 \pm \nu_z$  подчеркнуты резонансы с номерами  $K_0$  кратными числу элементов периодичности, не связанные непосредственно с искажениями магнитной системы. Мощности резонансов  $\nu_0 = K_0 \pm \nu_x$  пропорциональны связи вертикальных колебаний с радиальными. Мощности нелинейных резонансов ( $|K_z| + |K_x| \geq 2$ ) значительно меньше линейных и быстро убывают с ростом номеров  $K_z$  и  $K_x$ .

Ориентация спина после прохождения каждого резонанса определяется его начальной ориентацией и скоростью прохождения. При быстром прохождении направление спина вдоль поля сохраняется. Спин, ориентированный вдоль поля, после медленного прохождения оказывается перевернутым. В промежуточной ситуации ориентация

спина, вообще говоря, сильно отклоняется от направления поля.

Из-за разброса частот прецессий и мощностей резонансов для разных частиц в пучке (приводящий к размешиванию фаз прецессий вокруг поля) наиболее устойчивой оказывается поляризация, направленная вдоль поля между резонансами. С необходимостью это означает быстрое, либо медленное прохождение каждого резонанса.

Считая, что за время ускорения происходит размешивание по фазам прецессии, получаем, что поляризация после каждого прохождения направлена вдоль поля ускорителя, а ее степень определяется формулой (П.1.21). Таким образом, изменение степени поляризации не мало лишь в случае промежуточного прохождения, когда  $J \sim 1$ .

При ускорении возможны следующие ситуации.

а) Все резонансы проходят быстро. Условием малости деполяризации будет:

$$4 \sum_k J_k = \pi \sum_k \frac{|\omega_k|^2}{|\varepsilon'_k|} \ll 1. \quad (\text{П.4.2})$$

Хорошим примером использования быстрого прохождения резонансов является ускорение поляризованных протонов в ZGS до энергии 12 ГэВ при степени поляризации 70% /28/. С ростом максимальной энергии выполнить это условие становится все труднее из-за возрастания числа проходимых резонансов и их мощностей.

б) Часть резонансов проходится медленно, остальные быстро. Условием малости деполяризации будет:

$$4 \sum_{J_k \ll 1} J_k + 2 \sum_{J_k \gg 1} e^{-2J_k} \ll 1. \quad (\text{П.4.3})$$

в) Встречаются резонансы с промежуточным прохождением – неблагоприятная ситуация.

Приведем формулы для расчета самых мощных резонансов /15–20, 42, 50/. Наиболее мощными являются резонансы со свободными вертикальными

колебаниями:

$$\nu_0 = \pm \nu_z + K N, \quad (K = 0, \pm 1, \dots) \quad (\text{П.4.4})$$

( $N$  — число периодов магнитной структуры на орбите) и целые резонансы

$$\nu_0 = K. \quad (\text{П.4.5})$$

Для "собственных" резонансов (П.4.4) мощность  $\omega_K$  равна:

$$\omega_K^+ = \nu_0 a_b \langle f_z'' \exp(i \nu_K \tilde{\mathcal{K}}_z) \rangle \quad \text{для резонансов } \nu_0 = -\nu_z + K N' \quad (\text{П.4.6})$$

$$\omega_K^- = \nu_0 a_b^* \langle f_z'' \exp(i \nu_K \tilde{\mathcal{K}}_z) \rangle \quad \text{для резонансов } \nu_0 = \nu_z + K N',$$

где  $f_z$  — решение Флоке вертикальных колебаний.

Мощности целых резонансов связаны с несовершенством магнитной структуры. Основная причина их появления — наличие радиальных магнитных полей на орбите. Мощности целых резонансов вычисляются по формулам:

$$\omega_K = \nu_0 \left\langle \frac{z_s''}{R} e^{i K \tilde{\mathcal{K}}_z} \right\rangle, \quad (\text{П.4.7})$$

где  $z_s$  — отклонение замкнутой орбиты, вызываемое радиальными магнитными полями  $\mathcal{K}_x$ :

$$z_s'' + g_z z_s = R \mathcal{K}_x. \quad (\text{П.4.8})$$

С помощью решения уравнения для  $z_s$

$$\frac{z_s}{R} = \frac{f_z}{2i} \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta + \text{к.с.} \quad (\text{П.4.9})$$

выражение для  $\omega_K$  можно привести к виду:

$$\omega_K = \frac{\nu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_x F_K e^{i K \tilde{\mathcal{K}}_z} d\theta, \quad (\text{П.4.10})$$

где  $F_K$  — функция отклика (I.8.9).

Спектр возмущающего поля  $\mathcal{K}_x$  практически является равномерным. Это означает, что наиболее выделенными являются гармоники, максимально близкие к спектру решения Флоке, т.е.  $\ell \approx \pm \nu_2 + K N$ .

а) Учет синхротронной модуляции энергии.

Синхротронная модуляция частоты прецессии приводит к расщеплению каждого резонанса (П.4.I) на модуляционные резонансы.

Начнем с рассмотрения быстрого пересечения основного резонанса. Если мощность основного резонанса  $\omega_K$ , то мощности модуляционных резонансов в первом приближении по  $\omega_K$  (см. (I.7.I7)), равны:

$$\omega_{Km} = \omega_K J_m(\sigma/\nu_g).$$

Условие быстрого пересечения основного резонанса ( $|\omega_K|^2 \ll |\bar{\varepsilon}'|$ ) означает, что и модуляционные резонансы будут пересекаться также быстро. Поэтому изменение степени поляризации после прохождения (с учетом усреднения по фазам синхротронных колебаний) вычисляется по формуле:

$$S_2^+ - S_2^- = S_2 \frac{\tilde{J}_1}{\bar{\varepsilon}'} \sum_m |\omega_{Km}|^2 = S_2 \frac{\tilde{J}_1}{\bar{\varepsilon}'} |\omega_K|^2, \quad (\text{П.4.II})$$

где использовано, что

$$\sum_m |\omega_{Km}|^2 = |\omega_K|^2.$$

Таким образом, результат быстрого пересечения основного резонанса учет синхротронной модуляции не меняет.

Кардинально меняется ситуация при медленном пересечении основного резонанса. В этом случае поляризация будет вообще утеряна, если пересекается модуляционный резонанс с промежуточной скоростью прохождения, т.е. в рассматриваемом приближении при условии  $\bar{\varepsilon}' \approx |\omega_K|^2 J_m^2$ .

Стоит отметить и случай  $\sigma \gg \nu_f$ , когда при условии медленности пересечения основного резонанса ( $|\omega_k|^2 \gg |\bar{\varepsilon}'|$ ) скорость пересечения может быть недостаточно малой и все модуляционные резонансы проходятся быстро ( $|\bar{\varepsilon}'| \gg |\omega_{km}|^2 \approx |\omega_k|^2 \frac{\nu_f}{\sigma}$ ). Однако в этой ситуации, несмотря на быстроту пересечения каждого модуляционного резонанса, пучок деполяризуется из-за большого числа характерных резонансов:  $m_{\text{хар}} \sim \sigma / \nu_f$ .

Поляризация не будет утеряна в случае, когда модуляционные резонансы с низкими номерами  $m \leq m_0$  проходятся медленно, а с высокими  $m > m_0$  достаточно быстро. Для этого требуется резкое спадание с номером "  $m$  " мощностей модуляционных резонансов.

Это имеет место при

$$\sigma \ll \nu_f. \quad (\text{П.4.12})$$

В практически важной ситуации  $\sigma \approx \nu_f$  мощности всех модуляционных резонансов малы при условии медленности и синхротронной модуляции:

$$|\omega_k|^2 \gg \sigma \cdot \nu_f. \quad (\text{П.4.13})$$

Заметим, что в этом случае условие резонанса

$$\langle \sqrt{|\omega_k|^2 + \bar{\varepsilon}^2} \rangle = m \nu_f \quad (\text{П.4.14})$$

может быть выполнено лишь для достаточно большого номера "  $m$  " ( $|\omega_k| \gg \nu_f$ ). При условии (П.4.12) или (П.4.13) можно исключить промежуточные пересечения модуляционных резонансов выбором скорости пересечения  $\bar{\varepsilon}'$ .

Из изложенного следует, что деполяризацию можно также предотвратить, используя медленное прохождение. Однако простое уменьшение скорости пересечения резонанса может быть мало полезным, так как при этом необходимо с высокой точностью знать и контролировать имеющиеся возмущения.



б) Дополнительные меры предотвращения деполяризации при ускорении.

За деполяризацию может быть ответственна одна или несколько серий резонансов с фиксированными числами  $K_z$  и  $K_x$ , прохождение которых не является ни достаточно быстрым, ни достаточно медленным. Очевидными рекомендациями по подавлению эффектов деполяризации являются компенсация опасных гармоник возмущающих полей, либо увеличение скорости прохождения резонансов. В конкретных условиях это может оказаться слишком сложным как из-за недостаточной степени знания и контроля имеющихся возмущений, так и вследствие технических ограничений на скорость прохождения.

Дополнительными мерами могут служить следующие. Если опасной серией служат резонансы с бетатронными частотами, возможно применение системы, обеспечивающей быстрое прохождение за счет малого скачка бетатронных частот в моменты прохождений резонансов /20,28/.

Если опасной серией являются резонансы с частотами обращения  $\nu_0 = K_\theta$ , можно наоборот, с помощью специальных возмущений повысить мощности этих резонансов настолько, чтобы обеспечить медленность прохождений, с соблюдением условия (П.4.13) (либо П.4.12)).

Приведем пример. Для увеличения мощностей резонансов введем в прямолинейный промежуток длиной  $\theta_0$  постоянное магнитное поле  $H_{||}$  вдоль скорости движения частиц. Мощности резонансов  $\omega_K$ , обязанные введенному полю, будут равны (I.8.3):

$$\omega_K = \frac{q}{q_0} \frac{H_{||}}{\langle H_z \rangle} \frac{\theta_0}{2\pi}.$$

Заметим, что при введении возмущающего поля именно в промежуток, мощности резонансов  $\omega_K$  одинаковы для всех номеров  $K_\theta$ . Величина магнитного поля должна быть такой, чтобы обеспечить медлен-

ность прохождения с учетом дополнительных условий. Тогда резонансы  $\nu_0 = K_0$  будут проходиться адиабатически с сохранением степени поляризации ускоренных частиц.

При больших энергиях вместо продольного поля целесообразнее использовать поперечные поля. Для одновременной компенсации искажения замкнутой орбиты на выходе из промежутка следует использовать не однонаправленное поле. Можно ввести радиальное магнитное поле, с компенсацией возникающего вертикального искажения замкнутой орбиты в соседнем промежутке отраженным радиальным полем. При этом компенсации спинового движения не происходит из-за поворота поляризации в вертикальном поле между промежутками. Введение достаточно большого числа таких участков позволяет значительно уменьшить вертикальное искажение орбиты.

Отметим, что метод усиления мощностей спиновых резонансов можно, в принципе, использовать и для резонансов с бетатронными частотами с тем отличием, что вводимые в промежуток поля должны быть переменными. Частота изменения полей должна быть близка к дробной части резонансной комбинации бетатронных частот. Эти поля могут вызывать нежелательную раскачку бетатронных колебаний. Однако точное равенство частот не требуется ввиду конечной ширины спиновых резонансов. Отметим также, что мощность введенных гармоник должна превышать разброс бетатронных частот в пучке. Введение высокочастотного магнитного поля с упомянутыми ограничениями представляет собой техническую задачу, по-видимому, не менее сложную, чем создание системы, обеспечивающей быстрое прохождение за счет скачков бетатронных частот.

Возможность медленного пересечения спиновых резонансов с помощью усиления резонансной гармоник была экспериментально проверена на накопителе ВЭП-2М /45/. Анализ возможностей ускорения поляризованных протонов в синхротроне ИТЭФ (Москва) с помощью описанных мер проведен в работе /94/.

## § 5. Ускорение поляризованных частиц до высоких энергий

С увеличением максимальной энергии трудности сохранения поляризации будут быстро возрастать из-за увеличения числа резонансов, разброса их мощностей и частот прецессии. Более универсальными и перспективными в области больших энергий являются способы, основанные на существенной перестройке спинового движения. Основой таких способов является устойчивость поляризации в произвольно меняющихся вдоль орбиты полях. Предельным вариантом может служить описанный выше пример с одной змейкой, переворачивающей вертикальную поляризацию (см. Гл. I, § 3в). В этом примере частота прецессии всегда равна половине, независимо от энергии. Поэтому вообще невозможны прохождения резонансов и в процессе ускорения будет сохранена степень поляризации.

Включение дополнительных полей в промежутке может производиться как до инжекции пучка, так и после. В момент инжекции поляризация пучка должна быть направлена вдоль  $\vec{n}_z$  в месте ввода пучка в ускоритель. Если дополнительные поля вводятся после инжекции (поперечно поляризованного) пучка, их включение должно производиться адиабатически медленно, чтобы в процессе перестройки спинового движения сохранить степень поляризации. Если поле вводится до инжекции, частицы удобно инжектировать продольно поляризованными непосредственно в противоположный промежуток I (рис. 2), где направление равновесной поляризации параллельно скорости.

Для того, чтобы непрерывно проследить переход от обычной ситуации с вертикальным полем (в которой частота прецессии пропорциональна энергии) к предельной ситуации, когда частота прецессии вообще не зависит от энергии, рассмотрим следующий пример. Пусть в прямолинейный промежуток ускорителя вводится продольное магнитное поле величины  $H_{||}$  на длине  $\ell$ , поворачивающее спин

вокруг скорости на угол

$$\varphi = \frac{q}{\gamma} H_{||} \ell.$$

Продольное поле не изменяет равновесной орбиты частицы, а вносимую им связь при необходимости можно компенсировать дополнительными линзами. Величину поля  $H_{||}$  изменяем пропорционально  $\gamma$  так, чтобы угол поворота спина  $\varphi$  не зависел от энергии.

Для отыскания направления равновесной поляризации и частоты прецессии  $\nu$  найдем матрицу  $\Lambda$  поворота спина за оборот частицы в ускорителе. Это удобно сделать в двумерном представлении. Матрица  $\Lambda$ , отсчитанная от точки  $\theta = 0$  противоположащего промежутка, является произведением матриц поворотов вокруг вертикального направления на основном участке и продольного направления на участке с введенными полями:

$$\Lambda = e^{-i\frac{\varphi}{4}\sigma_z} e^{-i\frac{\varphi}{2}\sigma_y} e^{-i\frac{\varphi}{4}\sigma_z}, \quad (\text{П.5.1})$$

где  $\varphi = 2\pi \nu_0$  — угол поворота вокруг вертикального поля на основных участках. ▲

С помощью матрицы (П.5.1) нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \cos \pi \nu &= \frac{1}{2} \text{Sp } \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \vec{n}_s(0) &= \frac{i}{2 \sin \pi \nu} \text{Sp } \vec{\sigma} \Lambda = \frac{\sin \frac{\varphi}{2} \vec{e}_y + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \vec{e}_z}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{П.5.2})$$

При выключенном продольном поле ( $\varphi = 0$ ) получаем обычную зависимость частоты прецессии от энергии ( $\vec{n}_s = \vec{e}_z$ ):

$$\nu = \frac{\varphi}{2\pi} = \gamma q_a / q_0.$$

Если  $\varphi \neq 0$  величина  $\cos \pi \nu$  как функция энергии испытывает ограниченные колебания в интервале  $\pm \cos \frac{\varphi}{2}$  (рис.8), а на-

правление равновесной поляризации в противоположном промежутке отклоняется от вертикального.

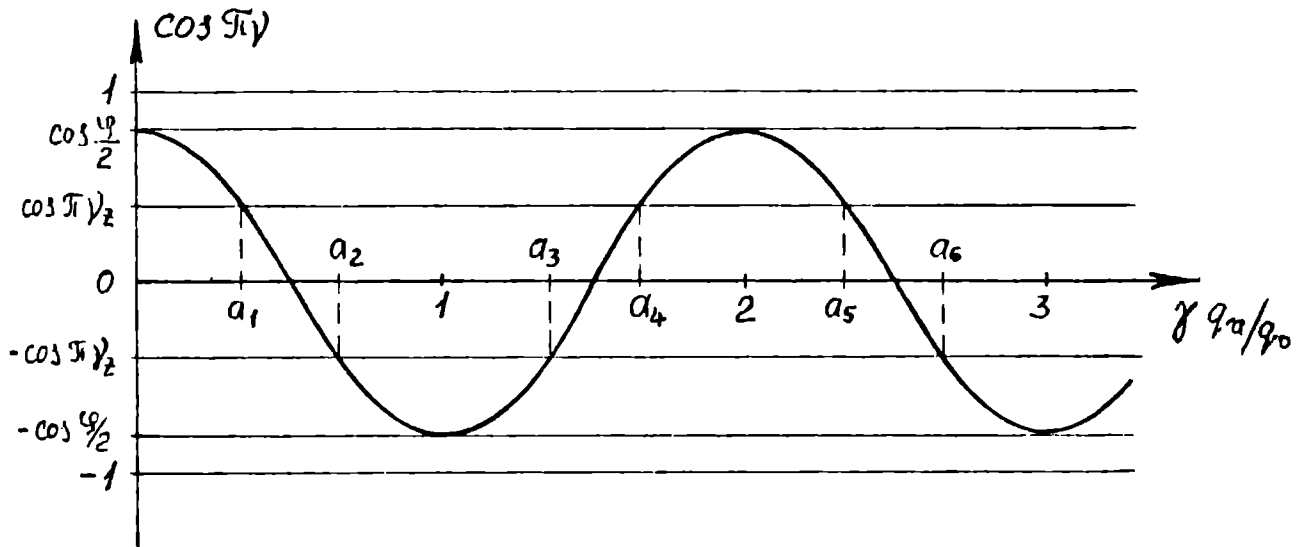


Рис.8. График зависимости  $\cos \pi \nu$  от энергии

Резонансы  $\nu = K_\theta$  ( $\cos \pi \nu = \pm 1$ ) становятся невозможными уже при малых значениях  $\varphi$ . Минимальное отклонение  $\nu$  от ближайшего целого числа равно при  $\varphi \ll 1$ :

$$\Delta \nu_{\min} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

и является мощностью резонанса  $|\omega_k| = \varphi/2\pi$ . На графике, изображенном на рис.8 можно провести также прямые  $\cos \pi \nu = \pm \cos \pi \nu_k$ . Пересечение резонансов  $\nu = \nu_k$  будет происходить в точках пересечения графика  $\cos \pi \nu$  с этими прямыми. На рис.8 обозначены резонансные точки  $a_1, a_2, \dots$ , относящиеся к резонансам с бетатронной частотой вертикальных колебаний:  $\nu = \pm \nu_2 + K_\theta$ .

Для предотвращения деполаризации эти резонансы должны, как уже говорилось, проходить либо достаточно быстро, либо достаточно медленно.

Увеличение угла поворота спина в промежутке  $\varphi$  позволяет сильно подавить деполаризующее влияние резонансов и с бетатронными частотами. Например, все линейные резонансы  $\nu = \pm \nu_{x,2} + K_\theta$  (так же, как и резонансы  $\nu = K_\theta$ ) будут невозможными в процессе ускорения, если соблюдено условие

$$|\cos \frac{\varphi}{2}| < |\cos \pi \nu_{z,x}|, \quad (\text{п.5.3})$$

не зависящее от энергии, и поэтому выполнение этого условия возможно при любой амплитуде синхротронных колебаний энергии.

Описанным приемом можно устранить влияние многих серий резонансов с различными номерами  $K_z$  и  $K_x$ . Деполяризующие эффекты будут обязаны лишь резонансам очень высоких порядков и пренебрежимо малы. В предельном случае, когда  $\varphi = \pi$ ,  $\vec{n}(0) = \vec{e}_y$  дробная часть частоты прецессии всегда равна половине ( $\cos \pi \nu = 0$ ) и появляется возможность выбором рабочих частот бетатронных колебаний  $\nu_z$  и  $\nu_x$  наиболее эффективно отстроиться от спиновых резонансов. Имеется также возможность смещения обобщенной частоты прецессии спина от значения равного половине с помощью продольного поля, введенного в противолежащий промежуток (или эквивалентной системы поперечных полей).

При высоких энергиях ( $\gamma q_a/q_0 \gg 1$ ) для поворота спина в промежутке рационально использовать вместо продольного поля поперечные к скорости поля. Можно поворачивать спин вокруг любого горизонтального направления. Используя определенные комбинации из радиальных и вертикальных полей всегда можно совместить требования поворота спина на заданный угол и восстановление орбиты на выходе из промежутка. Пример поворота спина вокруг скорости на угол  $\pi$  указан на Рис.3, а вокруг радиального направления на Рис.4.

Приведем еще пример змейки с более экономным интегралом поля (Рис.9). В участок II длины  $\ell_{II}$  вводим винтовое поле:

$$H_x + i H_z = H \exp[i \varphi (y - y_I)],$$

где  $H$  и  $\varphi$  — постоянны,  $y_I$  — координата на входе во II участок. Пусть  $M = \varphi \ell_{II} / 2\pi$  — число периодов поля на полной длине  $\ell_{II}$ .

Для поворота спина на угол  $\varphi$  после прохождения такого участка требуется интеграл поля, равный

$$H \ell_{\Pi} = \frac{1}{q_a} \sqrt{\varphi^2 + 4\pi M \varphi} \quad (\text{П.5.4})$$

Результирующая ось поворота спина участка с винтовым полем лежит в плоскости  $(\vec{H}(y), \vec{e}_y)$  и составляет со скоростью угол

$$\alpha_0 = \arctg \frac{\sqrt{\varphi^2 + 4\pi M \varphi}}{2\pi M}.$$

Магнитное поле на входе в участок II  $\vec{H}(y_I)$  ориентируем вдоль  $\vec{e}_x$ . Тогда после прохождения винтового поля орбита будет смещена вдоль  $\vec{e}_x$ . Это смещение можно скомпенсировать, если в участки до и после винтового поля ввести вертикальные поля с противоположными знаками.

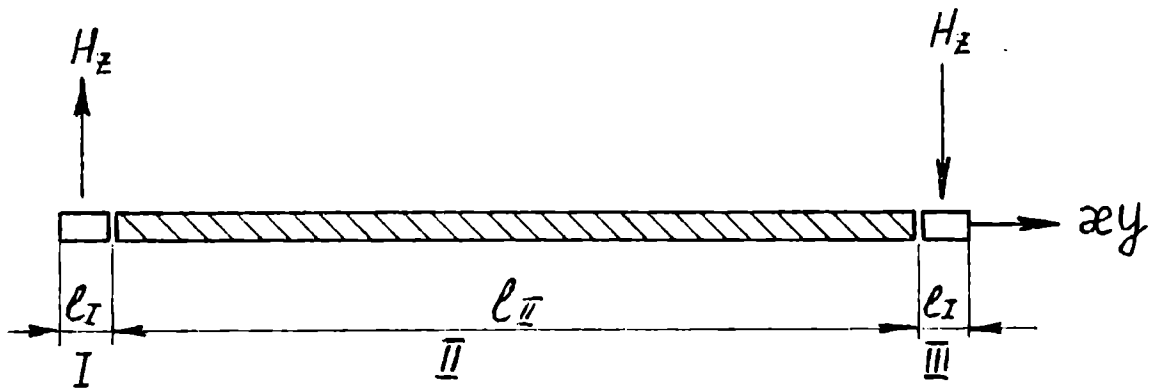


Рис.9. Схема змейки с винтовым полем

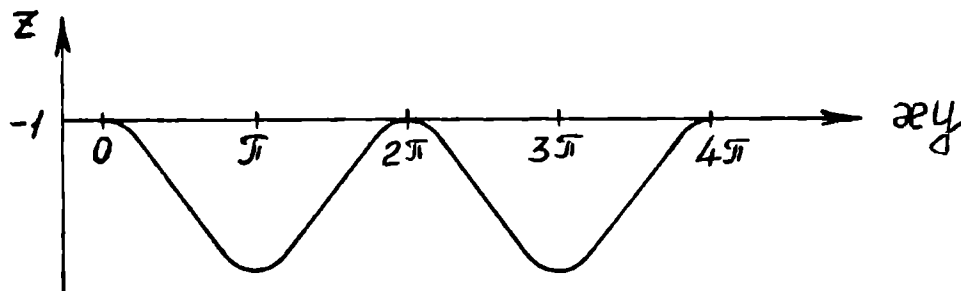


Рис.10. График вертикального смещения в змейке

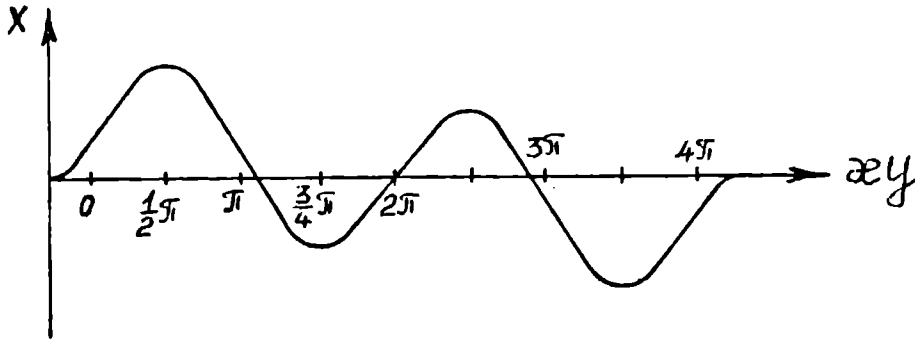


Рис. II. График горизонтального смещения в змейке

Вертикальные поля не изменяют результирующий угол поворота спина  $\psi$ . Направление оси поворота останется по-прежнему лежащим в плоскости орбиты. Интеграл вертикального поля выберем из условия полного восстановления орбиты. В частности, расположив участки I и III с полем той же величины  $H$  вплотную к участку II, для длины  $\ell_I$  имеем:

$$\ell_I = \frac{\ell_{II}}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{\pi M}} - 1 \right].$$

Полный интеграл поля равен

$$HL = H(\ell_{II} + 2\ell_I) = \frac{1}{q_a} \left[ \left(1 + \frac{2}{\pi M}\right) (\psi^2 + 4\pi M \psi) \right]^{1/2}$$

Угол  $\alpha$  между осью вращения спина и скоростью вычисляется по формуле:

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{\psi^2 + 4\pi M \psi}}{2\pi M} - \frac{1}{2} \sqrt{\psi^2 + 4\pi M \psi} \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{\pi M}} - 1 \right].$$

Угол  $\alpha$ , практически, довольно мал ( $\psi \leq \pi$ ).

Выпишем формулы для вычисления максимальных отклонений орбиты в описанных схемах:

$$z_{\max} = \frac{\sqrt{\psi^2 + 4\pi M \psi}}{2\pi^2 M^2 \nu_0} \ell_{II} \approx \frac{\sqrt{\psi}}{(\pi M)^{3/2} \nu_0} \ell_{II},$$

$$x_{\max} \approx \frac{3}{4} \frac{\sqrt{\psi}}{(\pi M)^{3/2} \nu_0} \ell_{II}.$$



Для примера, при  $L = 3$  м,  $\gamma = 2,5$ ,  $M = 2$  для протонов имеем:

Таблица 2

| $\varphi$ | $HL$ (Т.М) | $z_{max}$ (см) | $x_{max}$ (см) | $\alpha$ |
|-----------|------------|----------------|----------------|----------|
| $\pi$     | 18         | 7              | 5              | - 0,05   |
| $\pi/2$   | 13         | 5              | 3              | - 0,004  |

Непрерывное винтовое поле можно заменить винтообразной системой кусочно-постоянных полей. Приближая, например, два периода восемью участками, имеем следующие параметры для рассматриваемого примера:

Таблица 3

| $\varphi$ | $HL$ (Т.М) | $z_{max}$ (см) | $x_{max}$ (см) | $\alpha$ |
|-----------|------------|----------------|----------------|----------|
| $\pi$     | 21         | 7              | 4              | - 0,03   |
| $\pi/2$   | 15         | 5              | 3              | + 0,01   |

Так как ось поворота спина практически совпадает с направлением скорости ( $\alpha \ll 1$ ), змейку можно произвольно ориентировать в плоскости ( $x, z$ ).

Возможен также вариант ускорения поляризованных частиц при использовании двух переворотов вертикальной поляризации в противоположащих промежутках ускорителя. Устойчивое направление равновесной поляризации в этом случае остается вертикальным, однако, меняющим знак после каждого переворота. Для получения нерезонансной частоты прецессии нужно, чтобы оси поворота спина в противоположащих промежутках были разными. Например, если в одном промежутке использовать конфигурацию полей, изображенную на рис.3, а в противоположащем – изображенную на рис.4, то частота прецессии спина также равна половине независимо от энергии (Гл. I, §3г).

Установка элементов типа змеек или соленоидов в уже действующих кольцах может в некоторых случаях потребовать конструктивных изменений в магнитной системе, связанных с нехваткой места в промежутке или необходимостью увеличения апертуры камеры в области змейки. Может оказаться целесообразной комбинированная методика — подавление эффекта нескольких опасных резонансов на низкой энергии начального этапа ускорения с переходом на использование змеек при высоких энергиях.

При инжекции в кольцо поляризация пучка должна быть направлена вдоль  $\vec{n}_s$  в месте инжекции; в процессе ускорения  $\vec{n}_s$  может совершать сложное, но полностью контролируемое движение с сохранением степени поляризации. Например, может быть удобным инжектировать продольно поляризованный пучок из источника в пустой промежуток, где  $\vec{n}_s$  параллельно скорости. В сложных комплексах при наличии нескольких последовательных этапов ускорения, направление  $\vec{n}_s$  в местах инжекции и выпуска должно быть согласовано между всеми ускоряющими элементами. При необходимости, это согласование легко обеспечить обычными поворотными магнитами, соленоидами, либо винтовыми системами.

#### § 6. Устойчивость поляризации при ускорении в ускорителях со змейками

Для вычисления степени деполаризации необходимо связать поляризацию пучка на максимальной энергии ускорителя с поляризацией пучка, инжектируемого при низкой энергии. Использование теории возмущения по отклонению оси прецессии  $\vec{n}$  от равновесной  $\vec{n}_s$  не всегда целесообразно. В процессе ускорения, в принципе, допустимо исчезновение поляризации с восстановлением ее в определенном месте. Например, в ускорителе с одной змейкой направление  $\vec{n}$  на основном участке орбиты (I.3.4).

$$\vec{n} = \vec{e}_x \sin \nu_0 (\tilde{\mathcal{K}}_z - \mathcal{I}_1) + \vec{e}_y \cos \nu_0 (\tilde{\mathcal{K}}_z - \mathcal{I}_1)$$

очень сильно зависит от энергии (эта формула применима для любой замкнутой орбиты). Если при низкой энергии разброс  $|\Delta \vec{n}| \sim \Delta \nu_0 \approx \zeta$ , мал, то при достаточно высокой энергии (при  $\zeta \gg 1$ ) пучок имеет малую степень поляризации в любом месте орбиты. Исключением является единственное место  $\theta = \pi$ , где  $\vec{n}$  направлено по скорости для любой траектории ( $\Delta \vec{n}_{\theta=\pi} = 0$ ).

Поэтому, при вычислении степени деполяризации нужно, в принципе, просматривать каждую траекторию частицы. Это можно сделать в самом общем виде. Вычислим  $\vec{n}(\gamma, \theta)$  и  $\nu$  на каждой траектории при каждом значении энергии. Тогда в системе отсчета  $\vec{n}(\gamma, \theta)$ ,  $\vec{\ell}_1(\gamma, \theta)$ ,  $\vec{\ell}_2(\gamma, \theta)$  при изменении энергии возникает следующее поле:

$$\vec{W} = \nu \vec{n} - \frac{1}{2} \left\{ \left[ \vec{n} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} \right] + \left[ \vec{\ell}_1 \frac{\partial \vec{\ell}_1}{\partial \gamma} \right] + \left[ \vec{\ell}_2 \frac{\partial \vec{\ell}_2}{\partial \gamma} \right] \right\} \gamma'. \quad (\text{П.6.1})$$

Вычислим отклонение  $\vec{n}$ , связанное лишь с изменением энергии.

В первом приближении получаем:

$$\delta \vec{n} = \text{Im} \vec{\ell} \exp(-i \int \nu d\theta) \int_{T_1}^{T_2} \left[ \gamma' \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} \vec{\ell}^* \exp(i \int \nu d\theta) \right] d\theta, \quad (\text{П.6.2})$$

где  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно, время начала ускорения и его окончания. Формула (П.6.2) позволяет вычислять степень деполяризации в адиабатическом приближении, т.е. предполагается, что в любой момент процесса ускорения выполнено условие:

$$\left| \gamma' \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} \right| \ll |\nu - \nu_k|, \quad (\text{П.6.3})$$

где  $\nu_k$  — ближайшая к  $\nu$  учитываемая комбинация из частот орбитального движения. При вычислении по формуле (П.6.2) отбрасывают слабые гармоники возмущения, которые не удовлетворяют условию (П.6.3). Их возмущающее действие затем учитывается методом

усреднения. Из описанного выше следует, что влияние слабых возмущений может быть пренебрежимым в случаях, когда пересечение этих резонансов является быстрым либо времени ускорения недостаточно для их проявления.

Рассмотрим пример идеального ускорителя с одной змейкой (Гл. I § 3в). Используя формулы (I.3.4) получаем (если пренебречь малым изменением амплитуды бетатронных колебаний в процессе ускорения):

$$\left( \gamma' \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} \vec{\eta} \right)_{\theta_0 \div 2\pi} = - \nu_0' (\tilde{\mathcal{K}}_z - \pi).$$

Следовательно:

$$\delta \vec{n} = \nu_0' \theta \left( \pi - \frac{\theta}{2} \right) \vec{e}_z, \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

Например, в противолежащем промежутке (где осуществляется продольная поляризация)  $\vec{n}$  отклоняется на величину

$$|\delta \vec{n}| = \nu_0' \pi^2 / 2.$$

Это отклонение, равное по порядку величины, приращению частоты  $\nu_0 = \gamma q_a / q_0$  на обороте частицы в ускорителе, пренебрежимо мало.

Учет вертикального отклонения от плоскости орбиты кардинально усложняет сохранение поляризации при ускорении в традиционном накопителе. В ускорителе со змейкой учет вертикального искажения не изменяет существенным образом вывод о малости отклонения  $|\delta \vec{n}|$ , вычисляемого по формуле (П.6.2). Следовательно, в принципе, лишь спиновые резонансы достаточно высокого порядка (не удовлетворяющие условию адиабатичности (П.6.3)) могут вносить существенные изменения. Но выбором частоты прецессии и бетатронной частоты всегда можно удовлетворить требованиям адиабатичности. При этом немаловажным является вычисление разброса спиновой частоты прецессии, который возникает при учете вертикального отклонения.

Вычислим сдвиг спиновой частоты, вызываемый вертикальным искажением равновесной орбиты. Обозначим за  $\omega_k$  — мощности резонансов  $\nu_0 = K$  в ускорителе без змейки (определяемые формулой (П.4.7)). Сдвиг частоты равен:

$$\begin{aligned} \Delta \nu &= \nu_n - \frac{1}{2} \approx \langle \vec{\omega} \vec{n}_s \rangle = \frac{\nu_0}{R} \langle z_s'' \sin \nu_0 (\tilde{x}_z - \tilde{y}) \rangle = \\ &= \sum_k \left[ i \omega_k \frac{\sin \tilde{y} \nu_0}{\nu_0 - K} + \text{к.с.} \right] \frac{1}{2\pi} . \end{aligned} \quad (\text{П.6.4})$$

Величина  $\Delta \nu$  максимальна вблизи значений  $\nu_0$ , которые были резонансными в ускорителе без змейки, т.е. вблизи  $\nu_0 \approx \pm \nu_2 + K N$ . В этом случае  $\Delta \nu \approx |\omega_k(\nu_k)|$ . Так как сдвиг  $\Delta \nu$  одинаков для всех частиц в пучке, его, в принципе, можно скомпенсировать специально введенными возмущениями. В области предельно высоких энергий, когда  $|\omega_k| \gtrsim 1$  (при этом формула (П.6.4) некорректна) действие радиальных возмущений сравнивается с действием змейки.

Важно заметить, что вертикальные бетатронные колебания вследствие симметрии движения спина относительно плоскости орбиты, не изменяют частоту прецессии  $\nu = 1/2$ . Вертикальные колебания вносят лишь разброс осей прецессии  $\vec{n}$ . С помощью формулы (I.4.I4) можно вычислить среднеквадратичный разброс  $\vec{n}$  в противоположащем промежутке:

$$\langle (\Delta \vec{n})^2 \rangle = \frac{2 \langle |\omega_k^\pm|^2 \rangle}{\cos^2 \tilde{y} \nu_2} \frac{\sin^4 \frac{\tilde{y}}{2} (\nu_0 \mp \nu_2 - K N)}{(\nu_0 \mp \nu_2 - K N)^2} \quad (\text{П.6.5})$$

где  $\omega_k^\pm$  — мощности резонансов (П.4.6) в ускорителе без змейки. Разбросом  $\vec{n}$  можно пренебречь в области  $|\omega_k| \ll 1$ .

Таким образом, введение змейки качественным образом снижает требования на точность выполнения магнитных систем ускорителей с

поляризованными пучками. Возможности этого метода ограничиваются лишь энергиями, при которых выход частиц из плоскости орбиты (вызываемый вертикальными колебаниями частицы и неидеальностью магнитной системы) приводит к сильному возмущению оси прецессии спинов. Выяснение возможностей сохранения поляризации в этом случае (при  $|\omega_k| \gtrsim 1$ ) требует тщательного анализа, учитывающего эффекты нарушения адиабатичности комбинационными резонансами высших порядков.

### § 7. Сохранение поляризации пучка до предельно высоких энергий

Пока мощности самых сильных резонансов остаются малыми ( $|\omega_k| \ll 1$ ) деполаризующее действие всех возмущений можно пренебречь введением одной или двух переворачивающих змеек. При энергиях, когда условие малости  $|\omega_k|$  перестанет выполняться, действие возмущающих радиальных полей сравнивается с действием змейки. Поэтому введение нескольких змеек не гарантирует сохранение поляризации при ускорении. Анализ возможностей сохранения поляризации в таких ситуациях становится актуальным в связи с появлением проектов, как УНК (СССР) и ФИАЛ (США).

Система собственных резонансов из-за большой величины  $N$  настолько разрежена, что их мощности всегда малы по сравнению с расстояниями между соседними резонансами. Это означает, что при прохождении частицей пути порядка одного периода магнитной структуры, возмущение оси прецессии мало ( $N \gg |\omega_k| \gtrsim 1$ ). Подавить влияние сильных резонансов можно, разрушив когерентность сложения спиновых возмущений вдоль орбиты. Изложим возможные схемы.

#### а) Применение $M$ пар змеек

Рассмотрим ситуацию, когда в прямолинейные промежутки периодической магнитной системы ускорителя введены  $M$  пар симметрично

расположенных змеек, переворачивающих вертикальную поляризацию. Оси поворотов поляризации двух змеек в каждой паре составляет между собой некоторый угол  $\varphi$ , не зависящий от энергии. В такой системе равновесная поляризация  $\vec{n}_s(\theta)$  вертикальна вне змеек и меняет знак после прохождения частицей каждой змейки. Обобщенная спиновая частота при этом равна

$$\nu = \frac{M}{J_1} \varphi. \quad (\text{П.7.1})$$

Разброс спиновой частоты, вызываемый вертикальными бетатронными колебаниями, определяется формулой:

$$\Delta\nu = \frac{J_1}{8M} \frac{\langle |\omega_K|^2 \rangle \sin \frac{2J_1}{M} \nu}{\sin \frac{J_1}{M} (\nu - \nu_z) \sin \frac{J_1}{M} (\nu + \nu_z)} \left[ \frac{\sin \frac{J_1}{2M} (\nu_0 \mp \nu_z - KN)}{\frac{J_1}{2M} (\nu_0 \mp \nu_z - KN)} \right]^2 \quad (\text{П.7.2})$$

Вблизи значений энергии, резонансных в ускорителе без змеек,

$$\nu_0 = \pm \nu_z + KN \quad (\text{П.7.3})$$

разброс  $\Delta\nu$  достигает максимального значения, равного

$$|\Delta\nu|_{\max} = \frac{J_1}{2M} \frac{\langle |\omega_K|^2 \rangle \sin \frac{2J_1}{M} \nu}{\sin \frac{J_1}{M} (\nu - \nu_z) \sin \frac{J_1}{M} (\nu + \nu_z)}. \quad (\text{П.7.4})$$

Приведем также формулу в точках (П.7.3) для отклонения оси прецессии  $\Delta\vec{n}$  вблизи змейки при  $\theta = 0$  (где функция  $|\Delta\vec{n}(\theta)|$  достигает максимума):

$$\Delta\vec{n}(0) = -\frac{J_1}{M} \Im m \vec{\eta} \left[ \frac{\omega_K}{1 - \exp i \frac{2J_1}{M} (\nu \pm \nu_z)} + \frac{\omega_K^*}{1 - \exp i \frac{2J_1}{M} (\nu \mp \nu_z)} \right]. \quad (\text{П.7.5})$$

Для минимизации  $|\Delta\nu|$  и  $|\Delta\vec{n}|$  полезно угол  $\varphi$  и бетатронную частоту  $\nu_z$  выбирать так, чтобы знаменатели в выражениях (П.7.2) и (П.7.5) были не малыми. В частности, если  $\nu$  и  $\nu_z$  такие, что  $|\nu - \frac{M}{2}| \ll M$  и  $|\nu_z - KM| \ll M$ , получаем следующие оценки:

$$|\Delta \nu| \approx \frac{\mathcal{H}^2}{4M^2} |\omega_k|^2 \left| \nu - \frac{M}{2} \right|^2, \quad (\Delta \vec{n})^2 \approx \frac{\mathcal{H}^2}{2} \frac{|\omega_k|^2}{M^2}.$$

В области  $M \gg |\omega_k|$  имеем (при  $\nu \approx M/2$ )

$$|\Delta \vec{n}| \ll 1 \quad \text{и} \quad |\Delta \nu| \ll 1.$$

Таким образом, введение большого числа пар змеек решает задачу сохранения поляризации при ускорении до предельно высоких энергий.

Влияние возмущений, связанных с несовершенствами магнитной системы ускорителя, определяется формулами, аналогичными (П.7.2) и (П.7.5), в которых амплитуда бетатронных колебаний  $a_b$  должна быть заменена на вынужденную (см. П.4.9):

$$a_b \rightarrow a_s = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta.$$

Это оправдано относительно малым изменением амплитуды  $a_s(\theta)$  на длинах порядка расстояния между змейками, из-за резонансного характера искажений замкнутой орбиты. Поэтому достаточное число змеек также хорошо подавляет и возмущение поляризации несовершенствами магнитной системы.

#### б) Использование специальной структуры периода магнитной системы

Можно эффективно подавить мощности характеристических резонансов (П.4.6) и (П.4.7) с помощью специально организуемой корреляции между поворотами спина в магнитах и бетатронными колебаниями внутри периода магнитной системы. Продемонстрируем принцип для резонансов  $\nu_0 \approx -\nu_2 + K N$ . Мощности резонансов пропорциональны фактору

$$F = \int_0^{2\pi/N} f_z'' \exp(i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_z) d\theta. \quad (\text{П.7.6})$$



Подбором магнитной структуры этот фактор можно уменьшить до достаточно малого значения. Пример такой магнитной структуры изображен на Рис.12. Интегрируя по частям (П.7.6), получаем

$$F = f'_z\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \exp(i\nu_0 \frac{2\pi}{N}) - f'_z(0) + f'_z(d) (1 - \exp(i\nu_0 \frac{2\pi}{N})),$$

где  $2\pi\nu_0/N$  – угол поворота спина дипольным магнитом  $d$ ,  $f'_z(d)$  – значение производной решения Флоке в диполе. В точках спиновых резонансов ( $\nu_0 = -\nu_z + \kappa N$ ) первые два слагаемых в  $F$  сокращаются и поэтому

$$F = f'_z(d) (1 - \exp(i\nu_z \frac{2\pi}{N})).$$

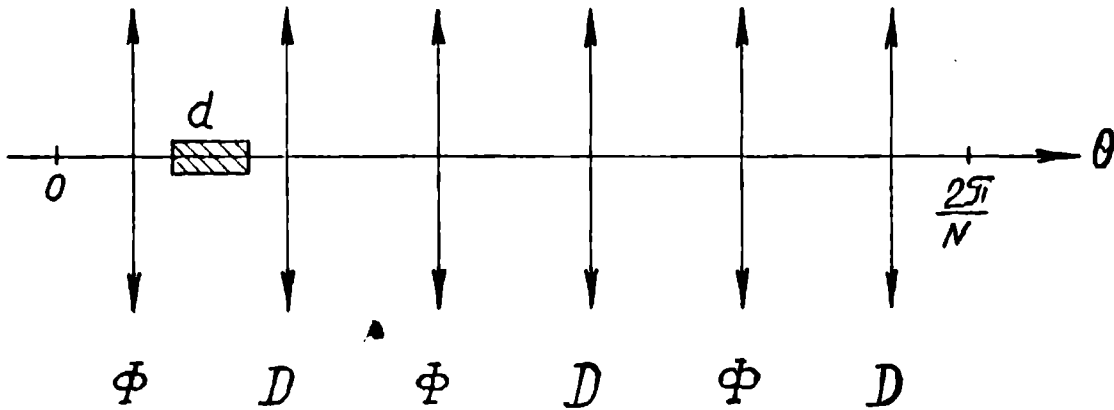


Рис.12. Структура периода магнитной системы.

$\Phi, D$  – фокусирующие и дефокусирующие квадрупольи,  
 $d$  – поворотный магнит. Период фокусирующей системы равен  $2\pi / (3N)$

Выбирая  $\nu_z$  вблизи  $N$ , можно уменьшить мощности характеристических резонансов в  $N/|\nu_z - N|$  раз (в том числе и резонансов  $\nu_0 \approx \nu_z + \kappa N$ ). Подчеркнем, что точка  $\nu_z = N$  не означает резонанса для бетатронного движения, а лежит вблизи центра устойчивости, так как число периодов фокусирующей системы равно

3N . Поэтому принципиально возможно и полное устранение действия характеристических резонансов.

Отметим, что сокращение мощностей основных резонансов позволяет для устранения деполаризации ограничиться применением лишь одной или двух змеек.

### в) Способ модуляции полей дипольных магнитов

Еще один возможный способ основывается на разрушении корреляции между прецессией спина и вертикальными колебаниями частиц, путем модуляции углов поворота спина дипольными магнитами <sup>ж)</sup>. Допустим, что величина поля в диполях модулируется по закону

$$H_z = 1 + h \cos \Omega_m \theta,$$

где  $h = \text{const}$  – амплитуда модуляции,  $\Omega_m$  – целое число. Частота модуляции  $\Omega_m$  должна быть достаточно велика, чтобы возмущение спина радиальными полями на длине  $2\pi/\Omega_m$  было малым. При этом характеристические резонансы расщепляются на серии модуляционных:

$$\nu_0 = \pm \nu_z + K_1 N + K_2 \Omega_m$$

Мощности этих резонансов уменьшаются в  $J_{K_2}(\nu_0 h / \Omega_m)$  раз ( $J_{K_2}$  – функция Бесселя). Для существенного уменьшения мощностей (в  $\sqrt{\nu_0 h / \Omega_m}$  раз) необходимо выполнение условия:

$$\nu_0 h \gg \Omega_m.$$

Таким образом, применение изложенных методов подавления деполаризации при ускорении, в особенности, основанных на существенной перестройке спинового движения, позволит добиться успеха в получении поляризованных пучков высоких энергий в существующих и проектируемых ускорителях.

---

ж) Идея этого метода предложена В.И.Балбековым.

## ДИФФУЗИЯ СПИНОВ ЧАСТИЦ

При длительном существовании пучков в накопителях становится возможным проявление поляризующего и деполаризующего действия довольно слабых "источников" электро-магнитного поля. Например, необходимо учитывать воздействие синхротронного излучения, остаточного газа, рассеяния частиц друг на друге внутри пучка, различных электро-магнитных шумов и т.д.

Кроме прямого изменения спина непосредственно полями "источников", происходит изменение из-за рассеяния траекторий частицы. Последний механизм проявляется в неоднородном поле накопителя и его описанию посвящена данная глава. Деполаризующие эффекты, объясняемые спин-орбитальной связью, заведомо преобладают над прямым воздействием в актах рассеяния при приближении к резонансам из-за возрастания чувствительности спинового движения к параметрам траектории.

На такой механизм деполаризации указали авторы работы /22/. Ими было показано, что при отклонении равновесной орбиты от плоской, квантовые флуктуации энергии при синхротронном излучении могут приводить к деполаризации пучка электронов (позитронов).

Потребовалось описать все возможные причины возникновения спин-орбитальной связи в накопителе с изменяющимися полями.

В этой главе исследуются, кроме того, деполаризующие эффекты в области спиновых резонансов. Такая теория "резонансной" диффузии позволяет проанализировать деполаризующее воздействие встречного пучка. Аналогичный анализ необходим в традиционных накопителях на достаточно высокие энергии, когда разброс частот прецессий в пучке становится больше расстояний между резонансами.

## § I. Диффузия в нерезонансной области

В стационарных условиях движения в накопителе вектор угловой частоты прецессии  $\vec{W}$  может быть записан как функция координат  $\vec{z}$  и импульсов  $\vec{p}$  частицы.

В отсутствие диффузии траектории частицы угловая частота прецессии  $\vec{W}$  является регулярной функцией времени и определяется заданием импульсов и координат в начальный момент. С учетом рассеяния частиц частота  $\vec{W}(\vec{p}, \vec{z})$  испытывает хаотическое изменение, что приводит к диффузии спинов. Поведение поляризации для рассматриваемого механизма диффузия существенно зависит от свойств движения спина во внешнем поле.

В общем случае, как уже отмечалось, спиновым интегралом движения является проекция спина на ось прецессии  $\vec{n}$ , которая однозначно определяется заданием импульса и координаты частицы. В нерезонансном случае, из-за разброса частот прецессии, средний спин для группы частиц, движущихся вблизи равновесной орбиты, будет направлен по оси прецессии на равновесной траектории:  $\langle \vec{S} \rangle = \langle S_n \rangle \vec{n}_s$ . При движении по траектории в поле накопителя проекция  $S_n$  является точным интегралом движения. Его изменение может быть связано лишь с действием дополнительных источников электромагнитного поля. В каждом акте рассеяния траектории изменение  $S_n$  связано с изменением траектории частицы:

$$\delta S_n = \vec{S} \delta \vec{n} = S_n \vec{n} \delta \vec{n} + \sqrt{S^2 - S_n^2} \operatorname{Re} e^{-i\psi} (\vec{p} \delta \vec{n}), \quad (\text{III.I.I})$$

где  $\psi$  — фаза вращения спина вокруг  $\vec{n}$ .

Обозначим за  $\tau_n$  характерное время релаксации, за которое ось прецессии  $\vec{n}$  изменяется на величину среднего разброса  $|\Delta \vec{n}|$  в пучке, из-за рассеяния импульсов  $\vec{p}$  частиц. Обычно  $\tau_n$  порядка характерных времен релаксации распределения частиц вблизи

равновесной орбиты (порядка времени радиационного затухания амплитуд бетатронных и фазовых колебаний). Если изменение динамического движения за время  $\tau_H$  мало:

$$|\nu - \nu_k| \gg \tau_H^{-1}, \quad (\text{Ш.І.2})$$

для описания деполяризации пучка достаточно найти среднюю скорость изменения спиновой переменной действия. При усреднении по фазам второй член в (Ш.І.І), учитывающий в первом порядке по  $\delta \vec{p}$  воздействие "диссипативных" сил (сил трения), обращается в нуль. Так как  $2 \vec{n} \delta \vec{n} = -(\delta \vec{n})^2$ , получаем

$$\langle \dot{S}_{\vec{n}} \rangle = - \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} (\delta \vec{n})^2 \right\rangle S_{\vec{n}}, \quad (\text{Ш.І.3})$$

где  $\left\langle \frac{d}{dt} (\delta \vec{n})^2 \right\rangle$  означает усредненное изменение квадрата угла рассеяния  $\vec{n}$  в единицу времени.

Рассматривая  $\vec{n}$  как функцию координат и импульсов  $(\vec{z}, \vec{p})$  можно выразить  $\frac{d}{dt} (\delta \vec{n})^2$  через тензор рассеяния импульса

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{\delta p_{\alpha} \delta p_{\beta}}, \quad (\text{Ш.І.4})$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{(\delta \vec{n})^2} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_{\beta}} d_{\alpha\beta}.$$

Уравнение (Ш.І.3) показывает, что поляризация пучка экспоненциально затухает с декрементом

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} (\delta \vec{n})^2 \right\rangle. \quad (\text{Ш.І.5})$$

Функции спин-орбитальной связи  $p \partial \vec{n} / \partial p_{\alpha}$  определяются фокусирующими свойствами и имеющими неидеальностями магнитной системы и характеризуют чувствительность поляризации к изменению траектории частицы. Значения  $\partial \vec{n} / \partial p_{\alpha}$  в каждом месте орбиты определяются полями во всей орбите. Поэтому деполяризация существ-

вует и в случае, когда источник флуктуации импульса и возмущающие поля сосредоточены в разных местах орбиты. С другой стороны, в случае локализованного источника флуктуаций для подавления деполяризации достаточно уменьшить величину  $\rho \partial \vec{n} / \partial \rho$  лишь в области источника.

## § 2. Вычисление времени деполяризации в идеальном накопителе

В простейшем случае круглого накопителя с однородной фокусировкой для вычисления  $\tau_d$  используем выражение (I.6.5) для отклонения  $\Delta \vec{n}$ . Из (Ш.1.5) имеем

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \frac{\nu^2 \nu_z^4}{(\nu^2 - \nu_z^2)^2} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta z')^2}{R^2} \right\rangle. \quad (\text{Ш.2.1})$$

Время деполяризации в идеальном накопителе определяется скоростью диффузии импульса в вертикальном направлении. Время резко уменьшается вблизи резонанса с частотой вертикальных бетатронных колебаний. Эта формула может служить оценкой деполяризующих эффектов и в некруглом накопителе с жесткой фокусировкой.

При этом скорость деполяризации возрастает пропорционально  $(\nu - \nu_k)^{-2}$  вблизи возможных в линейном приближении резонансов:

$$\nu \approx \nu_k = \pm \nu_z + k N$$

где  $N$  — число элементов периодичности на орбите.

Скорость деполяризации в идеальном накопителе может быть выражена через вертикальный (бетатронный) размер пучка  $\sigma_z = 2\sqrt{\langle z^2 \rangle}$  и декремент трения  $\Lambda_z$  с помощью соотношения

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\delta z')^2 \right\rangle = \nu_z^2 \sigma_z^2 \Lambda_z. \quad (\text{Ш.2.2})$$

Оценим время деполяризации для некоторых процессов. Скорость диффузии вертикального угла за счет квантовых флуктуаций синхротронного излучения примерно равна

$$\langle \frac{d}{dt} (\delta z')^2 \rangle \approx \frac{\lambda z_e}{R} \gamma^3,$$

где  $\lambda = \hbar/m$  — комптоновская длина,  $z_e = e^2/m$  — классический радиус электрона. Вертикальный размер пучка в идеальном накопителе был бы равен (при  $\Lambda_z \approx \Lambda$ ):

$$\sigma_z \approx \frac{1}{\gamma_z} \sqrt{\lambda R},$$

что намного порядков меньше наблюдаемых в накопителе на высокие энергии. Это связано с тем, что (из-за вылета квантов излучения частицы вперед в узкий конус с углом  $\approx \gamma^{-1}$ ) скорость диффузии импульса в продольном направлении примерно в  $\gamma^2$  раз превышает скорость диффузии в поперечном направлении /82/:

$$\frac{d}{dt} \frac{(\overline{\delta \gamma})^2}{\gamma^2} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \gamma^5 \frac{\lambda z_e}{R^3} \approx \gamma^2 \frac{d}{dt} \frac{(\overline{\delta z'})^2}{R^2}.$$

Поэтому существенно учитывать связь вертикального движения с продольным и радиальным. Даже малая связь резко увеличивает вертикальный размер пучка и диффузию спинов.

Аналогичные соображения можно привести для эффектов рассеяния, обязанных столкновениям частиц внутри пучка. При этом ( $\gamma \Delta \theta \lesssim 1$ ) /95, 96/:

$$\frac{d}{dt} \frac{(\overline{\delta z'})^2}{R^2} \approx \pi \frac{n z_e}{\gamma^3 \Delta \theta} \ln \left( \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \frac{\sigma}{z_e} \right) \approx \frac{1}{\gamma^2} \frac{d}{dt} \frac{(\overline{\delta \gamma})^2}{\gamma^2}.$$

Здесь  $n$  — число частиц в единице объема пучка,  $\Delta \gamma / \gamma$  — максимально возможный относительный разброс энергий в пучке,  $\sigma$  — поперечный размер пучка,  $\Delta \theta$  — угловой разброс частиц. Этот эффект довольно сильно убывает с энергией и становится малым по сравнению с эффектами квантовых флуктуаций излучения.

Нетрудно учесть и другие эффекты, у которых нет резкой выделенности диффузии импульса в продольном направлении. Оценим, на-

пример, время деполяризации за счет многократных упругих столкновений на атомах остаточного газа камеры накопителя. Скорость диффузии вертикального импульса при этом равна /82/

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta z')^2}{R^2} \right\rangle \approx \frac{4\pi n_0 z_e^2}{r^2} \ln(183 z_{\text{я}}^{-1/3}),$$

где  $n_0$  — число молекул остаточного газа в единице объема,  
 $z_{\text{я}}$  — заряд ядра атомов газа.

Результирующая скорость деполяризации определяется суммой  $\tau_d^{-1}$ , обусловленных различным механизмом рассеяния траекторий частиц.

Оценки показывают, что для указанных процессов скорость деполяризации все же практически мала в идеальном накопителе, за исключением областей в непосредственной близости от спиновых резонансов. Однако, даже относительно малая связь вертикального движения с продольным, может значительно увеличить скорость деполяризации из-за резкой выделенности диффузии энергии. Поэтому изучение эффектов флуктуации энергии приобретает особую важность.

При достаточно высоких энергиях для электронов выделяется эффект квантовых флуктуаций излучения, увеличивающийся с ростом энергии.

### § 3. Общие формулы линейного приближения

Рассмотрим деполяризующее действие флуктуаций энергии, пренебрегая флуктуациями импульса в поперечных к орбите направлениях. Общую формулу (III.1.5) для скорости деполяризации можно конкретизировать в приближении линейном по отклонению траектории частицы от равновесной. В периодической системе ортов для вариации оси прецессии из (I.4.14) получаем

$$\vec{d} \equiv r \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = - \text{Im} \left[ \vec{l} e^{-i\nu\theta} r \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\theta} \omega_{\perp} e^{i\nu\theta} d\theta \right]. \quad (\text{III.3.1})$$



Разлагая  $w_{\perp}$  в линейном приближении по отклонению траекторий от равновесной, имеем:

$$w_{\perp} = \frac{\partial w_{\perp}}{\partial r}(r-r_s) + \frac{\partial w_{\perp}}{\partial q_{\alpha}} q_{\alpha} \quad (\text{Ш.3.2})$$

где  $q_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) – поперечные отклонения координат и импульсов частиц, производные  $\partial w_{\perp} / \partial r$  и  $\partial w_{\perp} / \partial q_{\alpha}$ , взятые на равновесной орбите, являются периодическими функциями азимута  $\theta$ .

В общем случае, решение для  $q_{\alpha}$  запишется в виде [82]:

$$q_{\alpha} = \frac{r-r_s}{r} \Psi_{\alpha}(\theta) + U_{\alpha\beta} C_{\beta}, \quad (\text{Ш.3.3})$$

где  $\Psi_{\alpha}$  – дисперсионная функция, определяющая замкнутую траекторию,  $U_{\alpha\beta} C_{\beta}$  – описывает бетатронные колебания ( $C_{\beta} = \text{const}$ ).

$U_{\alpha\beta}$  – 4x4 матрица из нормальных решений:

$$U_{\alpha\beta} = (f_1, f_1^*, f_2, f_2^*),$$

где  $f_1(\theta+2\pi) = \exp(-2\pi i \nu_1) f_1(\theta)$ ;  $f_2(\theta+2\pi) = e^{-2\pi i \nu_3} f_2(\theta)$  – решения Флоке,  $\nu_1$ ;  $\nu_3$  – частоты бетатронных колебаний ( $\nu_2 = -\nu_1$ ,  $\nu_4 = -\nu_3$ ).

Подставляя разложение (Ш.3.2) для  $w_{\perp}$  в (Ш.3.1) и производя суммирование по периодам обращения частиц в накопителе, получаем, что

$$\vec{d} = \text{Im} \vec{l} \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} \left( r \frac{\partial w_{\perp}}{\partial r} + \frac{\partial w_{\perp}}{\partial q_{\alpha}} \Psi_{\alpha} \right)_{\theta+\tau} e^{i\nu\tau} d\tau}{1 - \exp(2\pi i \nu)} + \right. \\ \left. + \frac{(U^{-1})_{\beta\alpha} \Psi_{\alpha}}{\exp[2\pi i(\nu - \nu_{\beta})] - 1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial w_{\perp}}{\partial q_{\alpha}} U_{\alpha\beta} \right)_{\theta+\tau} e^{i\nu\tau} d\tau \right\}. \quad (\text{Ш.3.4})$$

При получении (Ш.3.4) использовано соотношение  $r \partial C_{\beta} / \partial r = -U_{\beta\alpha}^{-1} \Psi_{\alpha}$ , которое прямо следует из (Ш.3.3).

Скорость деполяризации

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \left\langle \vec{d}^2 \frac{d}{dt} \frac{(\delta r)^2}{r^2} \right\rangle \quad (\text{Ш.3.5})$$

резко возрастает вблизи возможных в линейном приближении резонансов  $\nu = K$ ,  $\nu = K + \nu_\alpha$ .

Важно подчеркнуть, что функция  $\vec{d}$  описывает не только изменения оси прецессии на замкнутых орбитах, но и учитывает бетатронные колебания, возникающие при изменении энергии.

#### § 4. Деполаризующее влияние флуктуаций энергии при сильных возмущениях спинового движения

Введение в накопитель сильных полей может приводить не только к изменению направления равновесной поляризации, но и к увеличению функции спин-орбитальной связи  $\vec{d}$  как на участке с введенными полями, так и вне его. Показательным является пример с одной змейкой. Равновесная поляризация в этом случае лежит в плоскости орбиты на основных участках накопителя и направлена вдоль результирующей оси вращения змейки в противоположащем промежутке.

При высоких энергиях ( $\nu_0 \gg 1$ ) основным деполаризующим фактором является диффузия угла вращения спина вокруг поля на основных участках. Величину функции спин-орбитальной связи можно вычислить, используя выражение (I.6.22) для отклонения оси прецессии:

$$\vec{d}^2 = \nu_0^2 (\tilde{\mathcal{H}}_z - \pi)^2. \quad (\text{Ш.4.1})$$

Следовательно, функция спин-орбитальной связи равна нулю в противоположащем промежутке, достигая максимального значения вблизи области змейки. Скорость деполаризации равна

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \left\langle \vec{d}^2 \frac{d}{dt} \frac{(\delta\gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle,$$

что, например, для круглого накопителя составляет

$$\tau_d^{-1} = \frac{\nu_0^2 \pi^2}{3} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta\gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{Ш.4.2})$$

Эта величина примерно в квадрат числа оборотов спина на основном участке превосходит скорость диффузии относительной энергии.

Рассмотренный механизм диффузии является наиболее сильным. Он исчезает, если направление равновесной поляризации остается вертикальным на основных участках (например, в накопителе с двумя змейками). Однако, если восстановление вертикальной поляризации происходит не для каждого значения энергии, а только для равновесной, функция спин-орбитальной связи может оставаться еще слишком большой. Поэтому для минимизации скорости диффузии спинов, кроме восстановления вертикального направления равновесной поляризации требуется появляющаяся функцию спин-орбитальной связи компенсировать с помощью вводимых в участок змейки фокусирующих элементов. Обратимся к примерам.

#### а) Идеальный накопитель со вставкой радиальных полей

В таком накопителе для вычисления функции  $\vec{d}$  можно использовать выражение (I.6.I8) для отклонения  $\Delta \vec{n}$ . В случае, когда квадрупольные линзы на участке вставки отсутствуют, произведение  $g_x \eta_z = 0$  на любом азимуте накопителя. Поэтому из (I.6.I9) имеем:

$$\vec{d} = -\nu_0 \text{Im} \vec{\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\theta} g_z \psi_z \eta_x^* d\theta + \gamma \frac{\partial a_z}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z \eta_x^* d\theta + \gamma \frac{\partial a_z^*}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z^* \eta_x^* d\theta \right]. \quad (\text{Ш.4.3})$$

Производная  $\gamma \partial a_z / \partial \gamma$  вычисляется с помощью соотношения, полученного из (I.6.I5):

$$a_z = \frac{1}{2i} \left[ \left( \frac{z'}{R} - \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \psi_z' \right) f_z - \left( \frac{z}{R} - \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \psi_z \right) f_z' \right]^* \quad (\text{Ш.4.4})$$

Отсюда

$$\gamma \frac{\partial a_z}{\partial \gamma} = \frac{1}{2i} (\psi_z f_z' - \psi_z' f_z^*) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x f_z^* d\theta. \quad (\text{Ш.4.5})$$

Таким образом, если величина  $g_z$  равна нулю на участке вставки, то и функция спин-орбитальной связи равна нулю на основном участке. В области вставки функция  $\vec{d}$  равна

$$\vec{d} = \nu_0 \operatorname{Im} \vec{\eta} \int_0^\theta \mathcal{K}_x \left[ 1 - e^{i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_x F_\nu(\theta)} \right] d\theta \quad (\text{Ш.4.6})$$

где  $F_\nu$  — периодическая функция отклика (I.8.9). Поэтому деполяризация пучка определяется диффузией энергии только на участке вставки. В частности, для круглого накопителя и сглаженной фокусировки из (Ш.4.6) имеем

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \frac{\nu_z^4}{(\nu_z^2 - \nu_0^2)^2} \left\langle \left( \int_0^\theta \mathcal{K}_x d\theta \right)^2 \frac{d}{dt} \frac{(\delta\gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle, \quad (\text{Ш.4.7})$$

Обеспечение высокой светимости встречных пучков предполагает использование вблизи места встречи сильных квадруполов. В этом случае получение нулевой  $\psi_z$ -функции на основном участке является недостаточным условием для зануления  $\vec{d}$  на этом участке. Дополнительным требованием является равенство нулю выражения (см. I.6.18):

$$\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^\theta g_x x \eta_z^* d\theta = 0.$$

Это эквивалентно условию (см. I.3.2):

$$\int_0^{\theta_0} g_x f_x \eta_z^* d\theta = i \int_0^{\theta_0} g_x f_x \sin \varphi_\theta d\theta = 0, \quad (\text{Ш.4.8})$$

где  $\varphi_\theta = \nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_x$ . Условию (Ш.4.8) можно, например, удовлетворить, если квадруполы расположить в области вблизи места встречи  $\theta = \theta_{(*)}$

$$\theta_{(*)} - \Delta\theta < \theta < \theta_{(*)} + \Delta\theta,$$

в которой  $\sin \varphi_\theta = \pm \frac{\pi}{2} = \text{const}$ . Тогда условие

$$\int_0^{\theta_0} g_x f_x d\theta = f'_x(\theta_{(*)} - \Delta\theta) - f'_x(\theta_{(*)} + \Delta\theta) = 0$$

позволяет занулить функцию  $\vec{d}$  на основном участке.

Выпишем общую формулу для вычисления  $\vec{d}$  при использовании традиционно ориентированных (вертикально) квадруполей. С помощью интегрирования по частям получаем

$$\vec{d} = \nu_0 \operatorname{Im} \frac{\vec{\eta}}{2i} \left\{ \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_x \left[ f_z \int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z^* \eta_x^* d\theta - f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} g_z f_z \eta_x^* d\theta \right] d\theta + \right. \quad (\text{Ш.4.9})$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z \left[ f_x \int_{-\infty}^{\theta} g_x f_x^* \eta_z^* d\theta - f_x^* \int_{-\infty}^{\theta} g_x f_x \eta_z^* d\theta \right] d\theta \right\}.$$

Отметим также возможность использования повернутых вокруг орбиты квадруполей, расширяющих свободу оперирования с пучками вблизи места встречи. Для зануления функции  $\vec{d}$  на основном участке в этом случае предъявляются следующие требования:

1) В матрице преобразования бетатронного движения через участок вставки отсутствует связь  $z - x$  движения.

2) Дисперсионная вертикальная функция  $\psi_z$  остается равной нулю на основном участке.

3) К требованию (Ш.4.10)

$$\int_0^{\theta_0} f_x'' \sin \varphi_{\theta} d\theta = 0$$

добавляется условие

$$\int_0^{\theta_0} \psi_x'' \sin \varphi_{\theta} d\theta = 0,$$

которое в общем случае не является следствием первого.

#### б) Пример с двумя змейками

Если в накопителе на высокие энергии одна змейка значительно увеличивает деполяризующие эффекты, то введение двух змеек оставляет направление равновесной поляризации вертикальным и деполяризующие эффекты могут стать того же порядка, что и без змеек.

Вычисление функции спин-орбитальной связи в этом случае аналогично предыдущему примеру идеального накопителя с радиальными

полями. Формула для  $\vec{d}$  имеет тот же вид (III.4.9) с заменой  $\eta_x$  и  $\eta_z$  на проекции ортогонального решения (I.3.5) для двух змеек.

Если на участках змеек отсутствуют фокусирующие элементы, то функция  $\vec{d}$  остается равной нулю на основном участке (конечно, при условии восстановления орбиты).

Выпишем условия сохранения нулевого значения  $\vec{d}$  на основных участках при использовании традиционно ориентированных квадруполов:

1) Дисперсионная функция  $\Psi_z$  остается равной нулю на основных участках.

$$2) \int_0^{\theta_0} g_z \Psi_z \eta_x^* d\theta = \int_{\pi}^{\pi+\theta_0} g_z \Psi_z \eta_x^* d\theta = 0.$$

$$3) \int_0^{\theta_0} g_x f_x^* \eta_z^* d\theta = \int_{\pi}^{\pi+\theta_0} g_x f_x^* \eta_z^* d\theta = 0,$$

(III.4.II)

$$\int_0^{\theta_0} g_x f_x \eta_z^* d\theta = \int_{\pi}^{\pi+\theta_0} g_x f_x \eta_z^* d\theta = 0.$$

При выполнении этих условий деполяризация пучка может быть связана лишь с диффузией энергии на участках змеек.

#### § 5. Деполяризующее влияние искажений равновесной орбиты

В идеальном накопителе оси прецессии спинов определяются только вертикальными отклонениями координат и импульсов частиц и не зависят от энергии. Поэтому  $\partial \vec{n} / \partial \gamma = 0$  и деполяризующее действие флуктуаций энергии отсутствует. Однако при достаточно высокой энергии любое уже малое отклонение от идеальной магнитной системы накопителя может приводить к резкому возрастанию скорости деполяризации. Вопрос, каким требованиям должен удовлетворять накопитель для сохранения поляризованных пучков, стал актуален в связи с проектированием и строительством накопителей электронов

и позитронов на энергии 10–100 ГэВ.

Наиболее опасным является воздействие радиального магнитного поля и воздействие его радиального градиента. Деполяризующие эффекты, связанные с продольным полем примерно в  $\nu_0^2$  раз меньше эффектов от радиального поля той же величины.

Рассмотрим влияние радиального магнитного поля  $H_x(\tilde{z}_s)$ , которое может появиться, например, при наклонах магнитов поворотных участков, при вертикальных сдвигах фокусирующих элементов. Изучение этих эффектов было начато авторами работы /22/.

Зависимость  $\tilde{H}$  от энергии определяется зависимостью от энергии частоты прецессии  $W_g$ , пропорциональной большому значению  $\nu_0$ . Выражения для спиновых возмущений являются следующими:

$$w_a \simeq \nu_0 \tilde{z}_s'' / R, \quad (III.5.1)$$

$$W_g \simeq \nu_0 \mathcal{K}_2 - \nu_0 \frac{x''}{R},$$

где вертикальные отклонения замкнутой орбиты  $\tilde{z}_s$  удовлетворяют уравнению

$$\tilde{z}_s'' + g_2 \tilde{z}_s = R H_x(\tilde{z}_0) / \langle H_z \rangle = R \mathcal{K}_x, \quad (III.5.2)$$

а  $\nu_0 = \gamma q_a / q_0$  — явно зависит от энергии.

Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} \vec{d}^2 &= \frac{\nu_0^2}{R^2} \left| \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ e^{i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_2} \int_{-\infty}^{\theta} (1 + i\nu_0 \frac{x'}{R}) \tilde{z}_s'' e^{-i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_2} d\theta \right] \right|^2 = \\ &= \frac{\nu_0^4}{R^2} \left| \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_2 \left( \int_{-\infty}^{\theta} \tilde{z}_s'' e^{-i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_2} d\theta \right) d\theta + \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_2(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} \tilde{z}_s''(\theta_1) \left[ \text{Im} f_x(\theta) f_x'(\theta_1) \right] e^{-i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_2} d\theta d\theta_1 \right|^2. \end{aligned} \quad (III.5.3)$$

При вычислении производной по энергии учтено, что  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{X}'$  в момент скачка энергии непрерывны (в этот момент испытывает скачок, в соответствии с уравнением (I.6.I), лишь  $x''$ ).

Первый член в формуле (Ш.5.3) обязан изменению с энергией средней частоты прецессии спина. Для гармоник с номером  $K$ , близким к  $\nu_0$  этот член резонансно увеличивается пропорционально  $(\nu_0 - K)^{-2}$ . Второй член, связанный с модуляцией частоты прецессии радиальными колебаниями возрастает обратно пропорционально первой степени расстройки вблизи резонансов  $K \approx \nu_0$  и  $K \approx \nu_0 \pm \nu_x$ .

Для накопителей на большие энергии характерно большое число элементов магнитной системы и жесткая фокусировка ( $\nu_x, \nu_z \gg 1$ ). Поэтому в таких установках наибольшую опасность представляют эффекты, обусловленные зависимостями средней частоты прецессии (величина второго члена в (Ш.5.3) примерно в  $\nu_x$  раз меньше первого). Мощность резонансов  $\nu_0 = \pm \nu_x + K$  примерно в  $\nu_x$  раз меньше, чем резонансов  $\nu_0 = K$ . Поэтому воздействие радиального поля, за исключением малых окрестностей вблизи резонансов  $\nu_0 = \pm \nu_x + K$ , можно описать формулой \*)

$$\langle \vec{d}^2 \rangle = \frac{\nu_0^4}{R^2} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_2 \left( \int_{-\infty}^{\theta} \tilde{z}_s'' e^{-i\nu_0 \tilde{x}_2} d\theta \right) d\theta \right|^2 \right\rangle \approx \nu_0^2 \sum_K \frac{|\omega_K|^2}{(\nu_0 - K)^4}, \quad (\text{Ш.5.4})$$

где  $\omega_K$  - гармоника ряда Фурье спинного возмущения:

$$\nu_0 z_s'' \exp[-i\nu_0 \int_0^{\theta} (\mathcal{K}_2 - 1) d\theta] = \sum_K \omega_K e^{-iK\theta} R. \quad (\text{Ш.5.5})$$

Формулу (Ш.5.4) можно получить и более прямым вычислением. Так как  $\omega_K$  мощности целых резонансов, то изменение оси прецессии определяются формулой

$$\Delta \vec{n} = \text{Im} \vec{\ell} \sum_K \frac{\omega_K}{\nu_0 - K} e^{-iK\theta}. \quad (\text{Ш.5.6})$$

Пренебрегая изменением  $\omega_K$  ( $\partial \omega_K / \partial \gamma \approx 0$ ) и дифференцируя лишь знаменатели в (Ш.5.6) получаем сразу формулу (Ш.5.4) ( $\gamma \frac{\partial \nu_0}{\partial \gamma} = \nu_0$ ).

\*) Рассматривается случай традиционного накопителя с вертикальным полем постоянного знака ( $\mathcal{K}_2 > 0$ ) и с большим числом периодов на обороте частицы.



Вывод же формулы (Ш.5.4) приведен лишь для того, чтобы продемонстрировать метод вычислений, позволяющий учесть все деполяризующие эффекты, обусловленные радиальным полем.

Если угол поворота спина вокруг поля при прохождении одного элемента периодичности мал ( $\nu_0 \ll N$ ), то можно положить  $\mathcal{H}_z = I$ ,  $\omega_k = \nu_0 K^2 (Z_s)_k$  и формула (Ш.5.4) будет соответствовать полученной в работе /22/.

Функция спин-орбитальной связи не превосходит единицы, если для ближайшей гармоники

$$|\omega_k| \lesssim (\nu_0 - K)^2 / \nu_0 \quad (\text{Ш.5.7})$$

Возмущающие поля могут быть связаны с систематическими погрешностями элементов периодической системы накопителя или со случайными. Расстояния между линиями частотного спектра систематических возмущений, в единицах частоты обращения в накопителе, порядка большого числа элементов периодичности. Параметры накопителя должны выбираться так, чтобы частота прецессии  $\nu_0$  могла бы находиться на достаточном удалении от частот этих возмущений. Расстояния же между спектральными линиями случайных возмущений порядка частоты обращения в накопителе. Но в виду того, что корреляция возмущений от отдельных элементов системы будет отсутствовать, результирующая амплитуда гармоник возмущающего поля будет примерно в  $\sqrt{Q}$  раз меньше, чем для систематических возмущений ( $Q$  - число независимых элементов системы).

Определим средневероятную скорость деполяризации по заданной точности исполнения магнитной системы. Пусть на орбите имеется  $Q$  некоррелированных между собой участков с радиальными полями

$h_n = H_x(\theta_n) / \langle H_z \rangle$ . Пусть на каждом  $n$ -ом элементе с радиальным полем  $h_n$ , занимающим долю орбиты  $\eta_n = \ell_n / 2\pi R$ , не успевают существенно измениться угол поворота спина вокруг верти-

кального направления и решение Флоке уравнения бетатронных колебаний. Тогда мощность резонанса  $\nu_0 = K$ , обязанная появлению радиального поля, равна (см. (I.8.7)):

$$|w_K^{(n)}| = \nu_0 \eta_n |h_n F_{\nu=K}^{(n)}|$$

Результирующее воздействие всех некоррелированных  $Q$  участков будет определяться суммой

$$|w_K|^2 = \sum_{n=1}^Q |w_K^{(n)}|^2 = \nu_0^2 \sum_{n=1}^Q \eta_n^2 \overline{h_n^2} |F_{\nu=K}^{(n)}|^2 \quad (\text{III.5.8})$$

Величина  $|F_\nu|$  пропорциональна  $|f_z|$ , и поэтому в мощность  $|w_K|$  основной вклад дают участки с большими  $\beta$ -функциями.

Как видим из (I.8.9) величины  $|F_K|$  мало меняются при изменении номера  $K$  на величину порядка единицы. Исключением являются случаи, когда  $[\nu_0]$  - целая часть  $\nu_0$  - близка к  $\pm \nu_2 + m\pi$  и, когда мощность  $|w_K|$  существенно вырастает и определяется ближайшей гармоникой. С учетом изложенного, в формуле (III.5.4) можно просуммировать по номеру  $K$ :

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} (\nu_0 - K)^{-4} = (\pi^4/3) (1 + 2 \cos^2 \pi \nu_0) / \sin^4 \pi \nu_0.$$

Скорость деполаризации таким образом равна

$$\tau_d^{-1} \approx \frac{\pi^4}{6} \nu_0^4 \frac{1 + 2 \cos^2 \pi \nu_0}{\sin^4 \pi \nu_0} \sum_{n=1}^Q \overline{h_n^2} \eta_n^2 |F_{\nu_0}^{(n)}|^2 \left\langle \frac{d(\delta f)^2}{dt \gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{III.5.9})$$

Эта формула позволяет находить средневероятную скорость деполаризации при заданной точности изготовления и установки элементов магнитной системы накопителя. Например, пусть точность установки квадрупольных линз равна  $\Delta Z_L$ . В области линз появляется радиальное поле, равное

$$h = g_z \Delta Z_L / R.$$

В накопителе со сглаженной фокусировкой из (Ш.5.9) имеем, при  $|\sin \pi \nu_0| = 1$  :

$$\tau_d^{-1} \simeq \frac{\pi^4}{6} \nu_0^4 \nu_z^4 \frac{\overline{\Delta Z_L^2}}{Q_L R^2} |F_{[\nu_0]}|^2 \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta \gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle, \quad (\text{Ш.5.10})$$

где  $Q_L$  — число линз.

Рассмотрим еще пример. При случайных наклонах магнитов с вертикальным полем на угол  $\alpha_M$  возникает радиальное поле  $h = K_2 \alpha_M$ . Предполагая одинаковыми все  $Q_M$  участков, получаем следующую формулу \*)

$$\tau_d^{-1} \simeq \frac{\pi^4}{6} \nu_0^4 \frac{\overline{\alpha_M^2}}{Q_M} |F_{[\nu_0]}|^2 \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta \gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{Ш.5.11})$$

Возмущающие радиальные поля приводят также к вертикальному искажению равновесной орбиты. Для случайных возмущений все гармоники поля  $h$  примерно одинаковы вплоть до очень высоких номеров порядка  $\eta_n^{-1}$ . Формула для средневероятного отклонения  $\overline{Z_s^2}$  на азимуте  $\theta$  имеет вид [82]:

$$\overline{Z_s^2} = \frac{\pi^2}{2} \frac{R^2 |f_2(\theta)|^2}{\sin^2 \pi \nu_z} \sum_{n=1}^Q \eta_n^2 \overline{h_n^2} |f_2^n|^2.$$

Используя примерную пропорциональность  $|F_y|$  и  $|f_2|$  в различных местах орбиты, скорость деполяризации (Ш.5.9) можно выразить через вертикальные отклонения равновесной орбиты (при  $|\sin \pi \nu| = 1$ ):

$$\tau_d^{-1} \simeq \frac{\pi^2}{3} \nu_0^4 \frac{(\sin^2 \pi \nu_z) \overline{Z_s^2}}{R^2 |f_2|^2} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta \gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{Ш.5.12})$$

\*) Строго говоря, приближать поворотный участок дельта-функцией неправильно. Учет конечной длины магнита приводит к формуле (Ш.5.9) с заменой  $h_n F_K^n$  в центре магнита на

$$h_n F_K^n \rightarrow (2\pi \eta_n)^{-1} \left| \int h F_K \exp(-i\kappa\theta) d\theta \right|$$

Однако такая поправка обычно численно мала.

При стремлении  $\nu_z$  к целому числу  $K$ , несмотря на увеличение  $\sqrt{z^2} \sim |\nu_z - K|^{-1}$ , скорость деполяризации остается примерно такой же за исключением областей, когда одновременно возможны спиновые резонансы:  $\pm \nu_z = m\rho + [\nu_0]$ .

Подчеркнем, что формула (Ш.5.12) выписана для случайных возмущений. Для специальных возмущений можно, в принципе, иметь независимо любые по величине вертикальные отклонения равновесной орбиты и скорость деполяризации (так как разные гармоники радиального поля существенно влияют на вертикальные отклонения и спиновую диффузию):

Отметим также, что если известны места с возможным радиальным полем, можно ослабить их влияние, уменьшив в этих точках характеристическую функцию  $|F_y|$  выбором вертикальной фокусировки и поворотных магнитов в накопителе.

#### § 6. Влияние связи вертикального движения с радиальным и фазовым

В реальных накопителях вертикальный размер пучка намного превышает размер, вычисленный для идеального накопителя, для которого замкнутые орбиты являются плоскими без продольного магнитного поля на них. Это указывает на то, что вертикальный размер определяется параметрами связи вертикального движения с радиальным и фазовым. Эти же параметры дают вклад и в диффузию спинов.

Вычислим скорость деполяризации при наличии возмущающего радиального градиента радиального поля

$$g = \frac{R}{\langle H_z \rangle} \frac{\partial H_x}{\partial x}.$$

В приближении малой связи уравнения (I.5.3) в рассматриваемом случае становятся следующими:

$$\begin{aligned} x'' + g_x x &= R \mathcal{K}_z \Delta\gamma/\gamma, \\ z'' + g_z z &= g x. \end{aligned} \tag{Ш.6.1}$$

Решение (Ш.6.1) можно записать в виде:

$$x = a_x f_x + a_x^* f_x^* + \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \psi_x, \quad (\text{Ш.6.2})$$

$$z = a_z f_z + a_z^* f_z^* + a_x f_{x_2} + a_x^* f_{x_2}^* + \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \psi_z,$$

где  $a_x, a_z$  — амплитуды свободных  $x$  и  $z$  колебаний с частотами  $\pm \nu_x + m\rho$ ,  $\pm \nu_z + m\rho$ . Слагаемые  $a_x f_{x_2} + a_x^* f_{x_2}^*$  и  $(\Delta \gamma / \gamma) \psi_z$  описывают "вынужденное" вертикальное движение с частотами  $\pm \nu_x + K$  и  $K$  соответственно. Поперечное  $x$  и  $z$  движение возбуждается флуктуациями энергии. В момент вылета кванта излучения остаются непрерывными  $x, x', z, z'$ , но скачком изменяются вместе с  $\delta \gamma$  амплитуды  $a_x$  и  $a_z$ ; поэтому "вынужденная" и свободная части  $z$  — колебаний при возбуждении вертикального размера флуктуациями энергии имеют один порядок величины. Следовательно, градиент  $\gamma$  приводит к появлению сразу несколько серий резонансов с частотами  $\pm \nu_z + m\rho, \pm \nu_x + K, K$ , вблизи которых диффузия спинов будет сильно увеличиваться.

Прямое вычисление функции

$$\vec{d}^2 = \nu_0^2 \left| \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^0 z'' e^{-i\nu_0 \tilde{x}_z} d\theta \right|^2 \quad (\text{Ш.6.3})$$

с подстановкой решения в виде (Ш.6.2) довольно громоздко. Вычисление можно сделать более компактным, используя интегрирование по частям и условия непрерывности поперечного движения в момент вылета квантов

$$\frac{\partial z}{\partial \gamma} = \frac{\partial z'}{\partial \gamma} = \frac{\partial x}{\partial \gamma} = \frac{\partial x'}{\partial \gamma} = 0.$$

Для этого удобно уравнение (Ш.6.1) записать в эквивалентной форме, вводя зависящие от времени амплитуды  $C_x(\theta), C_z(\theta)$  (ср. I.6.3)

$$x = c_x f_x + c_x^* f_x^*, \quad z = c_z f_z + c_z^* f_z^*, \quad (\text{Ш.6.4})$$

$$c'_x = \frac{1}{2i} \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \mathcal{K}_z f_x^*, \quad c'_z = \frac{1}{2i} g x f_z^*.$$

Интегрируя по частям из (Ш.6.3) получаем ( $\partial c_x / \partial \gamma = \partial c_z / \partial \gamma = 0$ ):

$$\vec{d}^2 = \nu_0^2 \left| \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\theta} g x F_{\nu} e^{-i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_z} d\theta \right|^2$$

и следовательно

$$\vec{d}^2 \approx \frac{\nu_0^2}{4} \left| \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z \left[ f_x^* \int_{-\infty}^{\theta} g f_x F_{\nu} e^{-i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_z} d\theta - f_x \int_{-\infty}^{\theta} g f_x^* F_{\nu} e^{-i\nu_0 \tilde{\mathcal{K}}_z} d\theta \right] d\theta \right|^2. \quad (\text{Ш.6.5})$$

Основное деполаризующее действие оказывают гармоники  $g$ , для которых номер  $k$  наиболее близок к  $\nu_0 + m\rho$  и  $\nu_0 + m\rho \pm \nu_x$ . Вертикальный размер пучка наиболее чувствителен к резонансам  $k \approx \nu_z - \nu_x + m\rho$ . Например, при сближении частот  $\nu_x$  и  $\nu_z$  размер возрастает пропорционально  $|\nu_x - \nu_z|^{-1}$ , скорость же диффузии спинов практически не меняется. Это объясняется тем, что для спиновой диффузии существенны отклонения  $\tilde{z}$  — движения, появляющиеся после излучения кванта на временах порядка  $|\nu_0 - \nu_k|^{-1}$ . Эти отклонения, очевидно, не зависят при  $|\nu_0 - \nu_k| \gg |\nu_z - \nu_x|$  от близости частот  $\nu_z$  и  $\nu_x$ . Пропорционально  $|\nu_z - \nu_x|^{-1}$  увеличиваются скачки свободной части  $\tilde{z}$  — колебаний и вынужденной, однако, сумма этих скачков (из-за непрерывности  $z, z', x, x'$  в момент скачка) на временах  $|\nu_0 - \nu_k|^{-1}$  остается прежней.

Независимость скорости диффузии от резонансов орбитального движения является общим свойством рассматриваемого механизма диффузии. Мы приходим к важному выводу, что можно увеличивать размеры пучка без увеличения скорости диффузии спинов. Этот вывод имеет практическое значение, так как параметр  $g$  может использоваться для получения оптимальной светимости встречных пучков.

Формула (III.6.5) позволяет также найти средневероятную скорость деполяризации по заданной точности изготовления и установки фокусирующих элементов. Для некоррелированных  $Q$  участков с градиентом  $g$  получаем (для квантовых флуктуаций излучения):

$$\tau_d^{-1} = \frac{\pi^2}{8} \nu_0^2 \sum_{n=1}^Q \eta_n^2 \overline{g_n^2} |F_{\nu_0}|^2 \left\{ \left[ \frac{1}{\sin^2 \pi(\nu_0 + \nu_n)} + \frac{1}{\sin^2 \pi(\nu_0 - \nu_n)} \right] \cdot \frac{|f_x^n|^2 \langle \chi_z^3 | \int_{-\infty}^{\infty} \chi_z f_x d\theta |^2 \rangle}{\langle \chi_z^3 \rangle} + 4 \frac{|\psi_x^n|^2}{\sin^2 \pi \nu_0} \right\} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta \gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{III.6.6})$$

Радиальный градиент  $g$  может появиться при случайных поворотах квадрупольных линз вокруг направления орбиты. При повороте линз на малый угол  $\alpha_L$  появляется градиент  $g = \alpha_L g_z$ . В накопителе со сглаженной фокусировкой при  $\nu_x = [\nu_x] + \frac{1}{4}$ ,  $\nu_0 = [\nu_0] + \frac{1}{2}$  имеем

$$\tau_d^{-1} \simeq \pi^2 \nu_0^2 \frac{\alpha_L^2}{Q_L} |F_{\nu_0}|^2 \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta \gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{III.6.7})$$

Сравнивая (III.5.9) и (III.6.6) видим, что деполяризующие эффекты, вызываемые связью вертикального движения с радиальным, растут с энергией медленнее, чем обусловленные радиальным магнитным полем. Основной вклад в (III.6.6) дают участки с наибольшим значением  $|g f_x F_{\nu_0}|^2$ . Поэтому уменьшение функции отклика  $|F_{\nu_0}|$  в "опасных" местах позволяет уменьшить деполяризующее влияние градиента  $g$ .

Для некоррелированных вдоль орбиты возмущений  $g$  можно получить соотношение между скоростью диффузии спинов и вертикальным размером, возбуждаемым флуктуациями энергии из-за связи  $Z-X$  колебаний. Формула для средневероятного значения  $\overline{z^2}$  имеет при  $|\nu_z - \nu_x| \ll 1$  вид \*):

\*) Здесь мы не касаемся вопроса об отличии значения  $\overline{z^2}$  и размера пучка, связанном с появлением угла оси сгустка с плоскостью орбиты.

$$\bar{Z}^2 = \frac{R^2 |f_z(\theta)|^2 \langle \mathcal{K}_z^3 | \int_{-\infty}^{\theta} \mathcal{K}_z f_x d\theta |^2 \rangle}{16 |\nu_z - \nu_x|^2 \langle \mathcal{K}_z^3 \rangle} \left( \frac{1}{\Lambda_z} + \frac{1}{\Lambda_x} \right) \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \eta_n^2 |f_z f_x|^2 \left\langle \frac{d(\delta \gamma)^2}{dt} \right\rangle, \quad (\text{III.6.8})$$

где  $\Lambda_z$  и  $\Lambda_x$  — декременты радиационного затухания.

Используя примерную пропорциональность  $|F_{\nu_0}|^2 \sim |f_z|^2$  с помощью (III.6.6) получаем при  $\nu_0 = [\nu_0] + \frac{1}{2}$ ,  $\nu_x = [\nu_x] + 1/4$  :

$$\bar{Z}^{-1} \simeq 16 \pi^2 \nu_0^2 \frac{|F_{\nu_0}|^2}{|f_z|^2} \frac{|\nu_z - \nu_x|^2 \bar{Z}^2}{R^2 |f_z|^2} \frac{\Lambda_z \Lambda_x}{\Lambda_z + \Lambda_x}. \quad (\text{III.6.9})$$

Формула (III.6.9) носит иллюстративный характер для оценки влияния случайных возмущений. Для систематических возмущений возможно любое соотношение между вертикальным размером и скоростью деполяризации.

## § 7. Диффузия спинов в области резонансов

Деполяризующее воздействие флуктуаций энергии сильно увеличивается при приближении к спиновым резонансам. Обычно энергию частиц и параметры магнитной системы накопителя следует выбирать так, чтобы отстроиться от наиболее мощных резонансов. Однако всегда существуют резонирующие гармоники достаточно высокого порядка и необходимо понять насколько слабые резонансы еще могут оказывать влияние на степень поляризации. Кроме этого, существуют ситуации, когда вообще невозможно отстроиться и от мощных резонансов. Примером могут служить обычные накопители на достаточно высокие энергии такие, что разброс частот прецессий в пучке становится больше расстояний между резонансами. Другим важным случаем являются накопители, работающие со встречными поляризованными пучками.



Рассмотрим диффузию спинов в области уединенного резонанса:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad \vec{\omega} = \varepsilon \vec{n}_s + \text{Re}(\vec{\ell}' \omega e^{i\psi_s}) \quad (\text{III.7.1})$$

Мощность резонанса  $\omega$  связана с отклонением траектории от равновесной. Если  $\Lambda$  – декремент радиационного затухания  $\vec{\omega}$ , то за время  $\sim \Lambda^{-1}$  происходит случайное изменение направления  $\vec{\omega}$  из-за процессов диффузии и трения. При  $\omega \gg \Lambda$  поляризация исчезает в резонансной ситуации ( $\varepsilon = 0$ ) за время  $\sim \omega^{-1}$  просто из-за разброса мощности  $\omega$  в пучке. Такое размешивание поляризации является, однако, чисто динамическим. Например, поляризованный вдоль  $\vec{n}_s$  пучок, при адиабатическом изменении  $\varepsilon$  от  $-\infty$  до 0 становится неполяризованным. В точном резонансе поляризация отсутствует из-за полного разброса направлений  $\vec{\omega}$ . Но при дальнейшем адиабатическом изменении  $\varepsilon$  в нерезонансную область можно восстановить начальную степень поляризации.

Полная же потеря информации о поляризации в области резонанса из-за процессов диффузии и трения происходит за большее время, которое при  $\omega \gg \Lambda$  определяется формулой (III.1.5):

$$\tau_d^{-1} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} (\delta \vec{n})^2 \right\rangle \approx \frac{\omega^2}{\omega^2} \Lambda \quad (\text{III.7.2})$$

В области резонанса скорость диффузии спинов достигает максимального значения  $\Lambda$ .

Для резонанса малой мощности время деполаризации оценивается следующим образом. За время  $\Lambda^{-1}$ , пока направление  $\vec{\omega}$  остается примерно постоянным, малое изменение проекции спина вдоль  $\vec{n}_s$  равно

$$|\delta S_z|_0 \approx S_\perp \omega \Lambda^{-1}$$

Складывая эти некоррелированные изменения  $S_z$

$$\bar{S}_z \approx \frac{\partial}{\partial S_z} (\delta S_z)_0^2 \cdot \Lambda \approx -S_z \omega^2 / \Lambda$$

получаем

$$\tau_d^{-1} \approx \omega^2 / \Lambda. \quad (\text{III.7.3})$$

Эта формула позволяет учесть влияние слабых резонансов при малом разбросе  $\varepsilon$  (при  $|\varepsilon| \lesssim 1$ ).

Оценим деполяризующее влияние скорости диффузии частот прецессии. Пусть  $\sigma_\varepsilon^2 = \langle \frac{d(\delta\varepsilon)^2}{dt} \rangle / 4\Lambda$  — установившийся разброс положений резонанса, обязанный квантовым флуктуациям энергии. Величина  $\dot{\varepsilon} \approx \sigma_\varepsilon \Lambda$  определяет характерную скорость изменения расстройки из-за процессов диффузии и трения. Если резонанс достаточно мощный

$$\omega^2 \gg \sigma_\varepsilon \Lambda,$$

пересечение резонанса происходит медленно и уже при однократном попадании в резонанс спин случайным образом сильно изменяется. За время  $\Lambda^{-1}$ , когда в области резонанса побывают почти все частицы, произойдет деполяризация пучка. Таким образом, характерная скорость деполяризации при  $\omega^2 \gg \sigma_\varepsilon \Lambda$  равна

$$\tau_d^{-1} \approx \Lambda.$$

Для резонанса малой мощности ( $\omega^2 \ll \sigma_\varepsilon \Lambda$ ) исчезновение поляризации произойдет после многократного быстрого пересечения резонанса. В течение времени  $\Lambda^{-1}$  в среднем произойдет примерно одно пересечение со скоростью  $\approx \sigma_\varepsilon \Lambda$ . Величина  $S_2$  при этом изменится на величину:

$$\delta S_2 \approx \omega / \sqrt{\sigma_\varepsilon \Lambda}.$$

Складывая эти некоррелированные изменения  $S_2$ , получаем, что скорость деполяризации в этом случае примерно равна

$$\tau_d^{-1} \approx \omega^2 / \sigma_\varepsilon \quad (\text{III.7.4})$$

и значительно меньше скорости траекторной релаксации распределения частиц  $\Lambda$ . Результат не зависит от величины  $\Lambda$ .

Из-за особой важности этого случая найдем скорость деполяризации с учетом численного коэффициента. Пусть расстройка  $\mathcal{E}$  для простоты зависит от одной переменной действия  $I$  (например, энергии, или квадрата амплитуды бетатронных колебаний). Резонанс осуществляется при  $I = I_r$  :

$$\mathcal{E}(I_r) = 0.$$

Изменение  $S_z$  при однократном прохождении описывается формулой (П.1.8):

$$\delta S_z = S_\perp \sqrt{\frac{2\pi\omega^2}{|\mathcal{E}'|}} \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right),$$

где  $\psi$  — значение фазы прецессии, которое от прохождения к прохождению изменяется случайно, скорость прохождения  $\mathcal{E}'$  определяется в момент, когда  $\mathcal{E} = 0$ . Поскольку последовательные прохождения происходят некоррелировано, выражение для средней скорости изменения  $S_z$  имеет вид

$$\overline{\dot{S}_z} = \frac{\mathcal{X}}{2} \frac{\partial}{\partial S_z} \overline{(\delta S_z)^2} = -\pi \mathcal{X} \frac{\omega^2}{|\mathcal{E}'|} S_z. \quad (\text{Ш.7.5})$$

Здесь  $\mathcal{X}$  — число пересечений частицей резонанса в единицу времени. Если  $f(I)$  — стационарная функция распределения частиц (с нормировкой  $\int_0^\infty f dI = 1$ ), то

$$\mathcal{X} = I_r' f(I_r).$$

Подставляя это значение  $\mathcal{X}$  в (Ш.7.5) получаем

$$\tau_d^{-1} = \pi \left[ \frac{\omega^2}{d\mathcal{E}/dI} f(I) \right]_{I=I_r} = \pi \langle \omega^2 \delta(\mathcal{E}) \rangle,$$

где  $\delta(\mathcal{E})$  — дельта-функция. В общем случае, нужно произвести суммирование по всем резонансам с малой мощностью <sup>ж)</sup>:

$$\tau_d^{-1} = \pi \sum_k \langle |\omega_k|^2 \delta(\nu - \nu_k) \rangle. \quad (\text{Ш.7.6})$$

<sup>ж)</sup> Формула (Ш.7.6) справедлива, конечно, при любом числе переменных действий, от которых зависит расстройка  $\mathcal{E}(I_1, I_2, \dots)$ .

Более строгое обоснование формулы (Ш.7.6) на основе уравнения для плотности поляризации приводится в главе IV § 3. Этот результат дает возможность исследовать устойчивость поляризации в накопителях на высокие энергии и на встречных пучках в широком диапазоне их параметров.

### § 8. Диффузия спинов при большом разбросе частот прецессии

Продолжим изучение деполаризующих эффектов в традиционных накопителях. В накопителях на достаточно высокие энергии разброс спиновой частоты  $\nu = \gamma q_a / q_0$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{2} \langle \sigma^2 \rangle = \nu^2 \langle \frac{(\Delta\gamma)^2}{\gamma^2} \rangle \quad (\text{Ш.8.1})$$

достигает величины порядка или больше единицы и перекрывает соседние резонансы. Важным при этом является учет синхротронной модуляции энергии с частотой  $\nu_\gamma$ :

$$\nu = \bar{\nu} + \sigma \cos \psi_\gamma,$$

где  $\sigma = \nu(\Delta\gamma)_0 / \gamma$  — амплитуда,  $\psi_\gamma$  — фаза синхротронных колебаний частоты прецессии, частоту синхротронной модуляции  $\psi'_\gamma = \nu_\gamma$  считаем меньше частоты обращения ( $\nu_\gamma \ll 1$ ).

Периодические прохождения резонанса при синхротронной модуляции рассматривались в гл. I § 7в и в гл. II § 2. Показано, что при полностью коррелированных последовательных пересечениях возможно "динамическое размешивание" поляризации лишь в узких областях спиновых резонансов с синхротронной частотой колебаний. Корреляцию нарушает стохастическое изменение частоты прецессии квантовыми флуктуациями энергии.

Выпишем условие, при котором сохраняется корреляция между последовательными пересечениями резонанса. Уход фазы

$$\Delta\psi = \int_0^\theta \sigma \cos \psi_g d\theta \approx \frac{\sigma}{\nu_g} \sin \psi_g$$

за время порядка периода синхротронных колебаний из-за диффузии энергии составит величину

$$(\Delta\psi)_d \approx \frac{1}{\nu_g} \overline{\frac{d(\delta\psi)^2}{dt}} \approx \frac{d(\delta\varepsilon)^2}{dt} / \nu_g^3 \approx \sigma_v^2 \Lambda_g / \nu_g^3,$$

где  $\Lambda_g$  – декремент радиационного затухания фазовых колебаний. Следовательно, последовательные пересечения резонанса будут коррелированными при условии

$$\sigma_v^2 \Lambda_g \ll \nu_g^3. \quad (\text{Ш.8.2})$$

Выполнение условия (Ш.8.2) дает возможность для вычисления скорости деполяризации воспользоваться формулой (Ш.5.1). Для определенности предположим, что наиболее мощные резонансы обязаны радиальному полю на равновесной орбите. Функцию спин-орбитальной связи можно вычислить с помощью формулы (I.7.16) для  $\Delta\vec{n}$ , включающей модуляционные резонансы:

$$\Delta\vec{n} = \text{Re} \left\{ (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{-i\nu(\tilde{x}_z - \theta) - i\frac{\sigma}{\nu_g} \sin \psi_g} \sum_{k,m} \frac{\omega_k J_m(\sigma/\nu_g)}{(\bar{\nu} - k - m\nu_g)} e^{i(m\psi_g - k\theta)} \right\},$$

где  $\omega_k$  – мощности резонансов с частотой обращения, которые для случайных возмущений определяются формулой (Ш.5.8). При вычислении производной по энергии используем, что

$$g \frac{\partial}{\partial g} (\sigma \cos \psi_g) = \nu, \quad \frac{\partial}{\partial g} (\sigma \sin \psi_g) = 0$$

Для величины  $\langle \vec{d}^2 \rangle$  получаем:

$$\langle \vec{d}^2 \rangle = \nu^2 \sum_{k,m} \frac{|\omega_k|^2 \langle J_m^2(\sigma/\nu_g) \rangle}{[(\bar{\nu} - k - m\nu_g)^2 - \nu_g^2]^2}. \quad (\text{Ш.8.3})$$

Здесь скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по равновесному распределению амплитуд  $\sigma$  в пучке. Например, при гауссовском распре-

делении

$$f(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma_v^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\sigma_v^2}\right)$$

получаем

$$\langle J_m^2 \rangle = I_m\left(\frac{\sigma_v^2}{\nu_f^2}\right) \exp\left(-\frac{\sigma_v^2}{\nu_f^2}\right),$$

где  $I_m$  — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Пока  $\sigma_v \ll 1$ , существует область

$$|\bar{\nu} - \kappa| \gg \max(\sigma_v, \nu_f), \quad (\text{Ш.8.4})$$

в которой модуляционными резонансами можно пренебречь. В этой области в знаменателе формулы (Ш.8.3) можно пренебречь частотами  $\nu_f$ :

$$[(\bar{\nu} - \kappa - m\nu_f)^2 - \nu_f^2]^2 \rightarrow (\bar{\nu} - \kappa)^4$$

Поскольку  $\sum_m J_m^2 = 1$ , то формула (Ш.8.3) при условии (Ш.8.4) переходит в (Ш.5.4).

Заведомо мал вклад модуляционных резонансов при  $\sigma_v^2 \ll \nu_f^2 / |\bar{\nu} - \kappa|$ . Учет синхротронных колебаний частоты прецессии приводит в этом случае к появлению узких резонансных линий, отстоящих друг от друга на величину синхротронной частоты.

При  $\sigma_v^2 \gg \nu_f^2 / |\bar{\nu} - \kappa|$  можно воспользоваться известной асимптотикой функции  $I_m$  при больших аргументах [97]:

$$I_m(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(t - \frac{m^2}{2t}\right).$$

Для случайных возмущений, у которых мощности  $|\overline{\mathcal{W}_\kappa}|^2 = |\overline{\mathcal{W}_{[\nu]}}|^2$  примерно равны, после суммирования по "m" для значения  $|\sin \pi \bar{\nu}| = 1$  и  $|\sin(\pi(\bar{\nu} - \kappa)/\nu_f)| \approx 1$  получаем

$$\langle d^2 \rangle \approx \frac{\pi^4}{3} \nu^2 |\overline{\mathcal{W}_{[\nu]}}|^2 \left\{ 1 + \frac{3}{\pi^2 \sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-8\sigma_v^2)^{-1}}{\nu_f^3 \sigma_v} \right\}. \quad (\text{Ш.8.5})$$

Сравнивая со скоростью деполяризации (Ш.5.9) видим, что добавочный к единице член в фигурных скобках (Ш.8.5) описывает дополни-

тельный вклад модуляционных резонансов. Этот дополнительный член обязан прохождением соседних резонансов  $\nu = K$  на больших амплитудах  $\sigma$ , где частицы проводят экспоненциально малую долю времени.

Если  $\sigma_y$  больше единицы, всегда существуют номера " $K$ " для которых условие (III.8.4) нарушается. Число таких резонансов порядка  $\sigma_y$ . Предполагая, что частота  $\nu_f$  выбрана так, чтобы минимальная расстройка была порядка  $\nu_f$  для всех существенных резонансов, получаем после суммирования по  $K$  следующее выражение, применимое в области  $\sigma_y \gg 1$ :

$$\langle \vec{d}^2 \rangle \simeq \frac{\pi^2}{2\nu_f^2} \nu^2 |\mathcal{W}_{[\nu]}|^2. \quad (\text{III.8.6})$$

Таким образом, синхротронные пересечения резонансов при  $\sigma_y \gg 1$  увеличивают скорость деполяризации, по крайней мере, в  $3/(2\pi^2 \nu_f^2)$  раз.

При очень больших энергиях возможно нарушение условия (III.8.2) и последовательные пересечения резонансов становятся полностью некоррелированными. Спиновая диффузия описывается формулой (III.7.6). Эту же формулу можно использовать в случае, когда последовательные пересечения остаются коррелированными, но из-за разброса синхротронной частоты перекрываются соседние модуляционные резонансы  $\bar{\nu} = K + m \nu_f$ , т.е. при условии \*)

$$\Delta \nu_f \gg \nu_f^2 / \sigma_y. \quad (\text{III.8.7})$$

При гауссовском распределении по отклонениям частиц от равновесной имеем ( $\nu = \bar{\nu} + \Delta \nu$ ):

$$\begin{aligned} \langle \delta(\nu - K) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\bar{\nu} - K + \Delta \nu) \exp\left(-\frac{(\Delta \nu)^2}{2\sigma_y^2}\right) \frac{d\Delta \nu}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp\left[-\frac{(\bar{\nu} - K)^2}{2\sigma_y^2}\right]. \end{aligned}$$

\*) Условия (III.8.2) и (III.8.7) выписаны для наиболее мощных модуляционных резонансов с номерами  $m \sim \sigma_y / \nu_f$ .

При  $\zeta_\nu \ll 1$  диффузия спинов из-за некоррелированных пересечений экспоненциально мала и может сравниваться с обычной диффузией, обусловленный "дрожанием" оси прецессии  $\vec{n}$  :

$$\tau_d^{-1} \approx \frac{\pi^4}{6} \nu^2 |\omega_{LV}|^2 \left\{ \left\langle \frac{d(\delta r)^2}{dt} \right\rangle + \frac{12}{\pi^3 \sqrt{\pi}} \frac{\exp(-1/8\zeta_\nu^2)}{\nu^2} \right\} \quad (\text{Ш.8.8})$$

При  $\zeta_\nu \gg 1$  "нерезонансная" диффузия мала и скорость деполяризации равна

$$\tau_d^{-1} = \pi |\omega_{LV}|^2. \quad (\text{Ш.8.9})$$

Отметим отсутствие резонансной зависимости от энергии скорости диффузии спинов при  $\zeta_\nu \gg 1$ .

### § 9. Устойчивость поляризации встречных пучков

Из-за сильной нелинейности коллективного поля встречных частиц мощности связанных с ним спиновых резонансов слабо уменьшаются с повышением их номеров. Частоты орбитального движения становятся зависящими от амплитуд колебаний частицы возле равновесной орбиты. Средняя частота прецессии при больших энергиях испытывает синхротронные колебания большой амплитуды. В этих условиях, всегда существуют резонирующие гармоники, которые и определяют деполяризацию пучка.

Деполяризующее действие встречных сгустков в накопителях описывается резонансным механизмом диффузии (формулой (Ш.7.6)). При этом не важна физическая природа источника диффузии. Результат вычисляется по известному распределению амплитуд орбитального движения вблизи равновесной орбиты.

Полезно отметить, что для достижения максимальной светимости встречных пучков специально вводится (или уже имеется за счет ошибок реализации магнитной системы) связь вертикальных и радиальных колебаний.



Поперечные размеры сгустков, обусловленные квантовыми флуктуациями синхротронного излучения, остаются того же порядка, что и изменение этих размеров встречными частицами (эффектами "динамической" стохастичности). В этих условиях деполяризация спиновыми резонансами

$$\nu = \nu_k = K_\theta + K_z \nu_z + K_x \nu_x \quad (\text{Ш.9.1})$$

линейного приближения ( $|K_z| + |K_x| \leq 1$ ), в основном, обязана возмущающим полям связи  $\tilde{z} - x$  движения, а не полям встречных сгустков (если это не так, учет линейных резонансов может производиться рассмотренным выше способом). Основное деполяризующее действие встречного пучка связано с резонансами высших порядков, от которых невозможно отстроиться.

Рассмотрим для примера случай, когда равновесная поляризация направлена по вертикали и мало отличается от направления магнитного поля накопителя. Формула для мощностей резонансов (Ш.9.1) поля встречных сгустков записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{\nu}{\langle H_z \rangle} \langle 2 H_x \exp i \nu_k \tilde{K}_z \rangle = \\ &= \frac{\nu}{\langle H_z \rangle} \langle z'' \exp i \nu_k \tilde{K}_z \rangle, \end{aligned} \quad (\text{Ш.9.2})$$

где  $\nu = \nu_c$ ,  $H_x$  - магнитное поле встречных сгустков, усреднение производится при фиксированной энергии. Вертикальное движение описывается уравнением

$$\tilde{z}'' + g_z \tilde{z} = g_x + 2 R H_x(z, x, \theta) / \langle H_z \rangle. \quad (\text{Ш.9.3})$$

Предполагая, что связь  $\tilde{z} - x$  движений мала (при этом можно пренебречь обратным влиянием вертикального движения на радиальное) при решении уравнения (Ш.9.3) по теории возмущений, нужно в функцию  $H_x(z, x, \theta)$  подставить решения уравнения (Ш.6.1) для  $\tilde{z}$  и  $x$ .

Вычисление мощностей резонансов высших порядков, связанных с встречным пучком, удобно производить по формуле, вытекающей из (Ш.9.2) и (Ш.9.3):

$$\omega_k = 2\nu \langle H_x F_y e^{i\nu_k \tilde{x}_z} \rangle, \quad (\text{Ш.9.4})$$

где  $F_y$  — периодическая функция отклика (I.8.9).

Вычисление величин  $|\omega_k|^2$  в общем случае довольно громоздкое и его целесообразней производить с помощью ЭВМ. Для иллюстрации рассмотрим электрон-позитронные встречные пучки в накопителе с одной дорожкой. Ограничимся исследованием спиновых резонансов с частотой вертикальных колебаний ( $K_x = 0$ ,  $|K_z| \geq 2$ ) и будем считать, что  $H_x = H_x(z, 0, \theta)$ . Азимутальное распределение плотности частиц считаем пропорциональным дельта-функциям, удвоенное число которых на обороте (равное числу мест встречи в накопителе) будем считать равным числу суперпериодов магнитной системы  $P$ . В местах встреч учтем лишь свободные вертикальные колебания,

$$z_{\theta=0} = a_z \cos \psi_z,$$

где амплитуда  $a_z = 2|C_z|/|f_z|_0$  определяется значением  $\beta$ -функции в месте встречи. Неучтенные вынужденные колебания при резонансном механизме диффузии (в отличие от нерезонансного) не могут привести к существенному изменению эффекта.

Вычислим фурье-гармоники кулоновского поля встречных сгустков для гауссовского распределения по поперечному сечению пучка. В используемой модели величина  $|\omega_k|^2$  равна нулю при четном  $K_z$ . При нечетном  $|K_z| \gg 1$  имеем:

при  $\langle a_z^2 \rangle \ll K_z^2 z_0^2$

$$\langle |\omega_k|^2 \rangle = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi} |K_z|^3} \frac{N_e^2 z_0^2 \nu^2 |F_\nu|^2}{\gamma^2 x_0^2} \frac{(1 + 2\langle a_z^2 \rangle / z_0^2)^{1/4}}{(1 + \langle a_z^2 \rangle / z_0^2)^{1/2}} \left[ \frac{\langle a_z^2 \rangle}{\langle a_z^2 \rangle + z_0^2 + z_0 \sqrt{z_0^2 + 2\langle a_z^2 \rangle}} \right]^{|K_z|},$$

при  $K_z^2 x_0^2 \gg \langle a_z^2 \rangle \gg K_z^2 z_0^2$

$$\langle |w_k|^2 \rangle = \frac{16}{\pi^3 K_z^2} \frac{N_e^2 z_e^2 v^2 |F_v|^2}{\gamma^2 x_0^2}, \quad (\text{Ш.9.5})$$

при  $\langle a_z^2 \rangle \gg K_z^2 x_0^2$

$$\langle |w_k|^2 \rangle = \frac{4}{\pi^2} \frac{N_e^2 z_e^2 v^2 |F_v|^2}{\gamma^2 \langle a_z^2 \rangle} \ln \frac{\langle a_z^2 \rangle}{K_z^2 x_0^2}.$$

Здесь  $N_e$  — число встречных частиц в накопителе,  $2x_0$ ,  $2z_0$  — радиальный и вертикальный размеры встречного пучка в местах встреч,  $\langle a_z^2 \rangle$  — среднеквадратичная амплитуда вертикальных бетатронных колебаний в местах встреч.

Одним из основных характерных параметров встреч является сдвиг бетатронных частот  $(\Delta \nu_z)_0$  и  $(\Delta \nu_x)_0$  равновесной частицы, вносимый встречными частицами. Для гауссовского распределения плотности частиц по поперечному сечению встречного пучка получаем:

$$(\Delta \nu_z)_0 = \frac{2 N_e z_e R |f_z|_0^2}{\pi \gamma z_0 (z_0 + x_0)}, \quad (\Delta \nu_x)_0 = \frac{2 N_e z_e R |f_x|_0^2}{\pi \gamma x_0 (z_0 + x_0)}, \quad (\text{Ш.9.6})$$

где  $|f_z|_0$ ,  $|f_x|_0$  — величины функций Флоке в местах встреч. Такого порядка оказывается и разброс бетатронных частот в пучке. В условиях устойчивости встреч сдвиги частот  $(\Delta \nu_z)_0$  и  $(\Delta \nu_x)_0$  много меньше единицы (за единицу, напомним, принята частота обращения в накопителе).

Заданная гармоника поля встречного пучка может резонировать с частотой  $\nu$  в интервале  $\Delta \nu$ , по крайней мере порядка

$$\sigma_b = |K_z (\Delta \nu_z)_0|$$

В условиях, когда амплитуда синхротронных колебаний частоты прецессии  $\sigma_\nu$  много меньше  $\sigma_b$  ( $\sigma_\nu \ll \sigma_b$ ), модуляцией частоты  $\nu$  можно пренебречь. При этом скорость деполяризации из формулы

(Ш.7.6) для однопараметрической зависимости  $\mathcal{E}_k = \nu - k\rho - k_z \nu_z(a_z^2)$ , вычисляется следующим образом:

$$\tau_d^{-1} = \pi \sum_k \frac{|w_k|^2 \exp(-a_z^2 / \langle a_z^2 \rangle)}{|k_z| \langle a_z^2 \rangle |\partial \nu_z / \partial a_z^2|} \quad (\text{Ш.9.7})$$

Все величины под знаком суммы берутся в точках  $a_z^2$ , для которых  $\nu = \nu_k(a_z^2)$ . По порядку величины скорость деполяризации (Ш.9.7) примерно равна

$$\tau_d^{-1} \approx \pi \langle |w_k|^2 \rangle / \sigma_b$$

где  $\langle |w_k|^2 \rangle$  — наибольшая по величине гармоника, для которой значения  $\nu - \nu_k(a_z^2)$  лежат в интервале  $0 \div \sigma_b$ .

Вертикальные размеры встречающихся пучков при максимальной светимости одного порядка. При этом диффузия спинов происходит с наибольшей скоростью, если резонанс  $\nu = k\rho + k_z \nu_z(a_z^2)$  осуществляется для значения амплитуды, равного ( $|k_z| \gg 1$ ):

$$a_z^2 = k_z \frac{\langle a_z^2 \rangle z_0}{\sqrt{z_0^2 + 2\langle a_z^2 \rangle}} \quad (\text{Ш.9.8})$$

Поэтому максимальная скорость диффузии резонирующей гармоникой с номером  $|k_z|$  равна:

$$(\tau_d^{-1})_{\max} = \frac{4}{\pi} \frac{N_e z_e}{f R} \nu^2 \frac{|f_\nu|_0^2}{|f_z|_0^2} A \left[ \frac{\langle a_z^2 \rangle}{\langle a_z^2 \rangle + z_0^2 + z_0 \sqrt{z_0^2 + 2\langle a_z^2 \rangle}} \right]^{|k_z|} \quad (\text{Ш.9.9})$$

где  $A$  — фактор, зависящий от значения  $a_z^2$  (Ш.9.8):

при  $a_z^2 \gg x_0^2$

$$A = \frac{\langle a_z^2 \rangle}{|k_z| x_0^2} \frac{z_0^2}{z_0^2 + \langle a_z^2 \rangle},$$

при  $x_0^2 \gg a_z^2 \gg z_0^2$

$$A = \left[ \frac{\pi \langle a_z^2 \rangle}{|k_z|^3 x_0^2} \right]^{1/2} \frac{[1 + 2\langle a_z^2 \rangle / z_0^2]^{1/4}}{1 + \langle a_z^2 \rangle / z_0^2},$$

при  $a_z^2 \ll z_0^2$

$$A = \frac{4 z_0^2}{|K_z|^3 \langle a_z^2 \rangle \chi_0}.$$

Рассмотрим другую область, когда при достаточно высоких энергиях становится возможным соотношение:

$$\sigma_y \gg \sigma_b.$$

При этом эффективная ширина спиновых резонансов становится порядка  $\sigma_y$  и вероятность попадания в этот интервал гармоник с большой мощностью возрастает. Модуляционные резонансы с синхротронной частотой проявляться не будут, если последовательные пересечения резонансы при синхротронной модуляции прецессии будут полностью некоррелированными, т.е. при условии:

$$\sigma_{eff} = \max(\sigma_b, \frac{\sigma_y^2}{\nu_y^2} \Lambda_y) \gg \nu_y.$$

Скорость деполяризации при гауссовском распределении по  $\Delta\nu = \nu - \bar{\nu}$  с помощью (Ш.7.6) вычисляется по формуле

$$\tau_d^{-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_k \frac{\langle |w_k|^2 \rangle}{\sigma_y} \exp\left[-\frac{(\bar{\nu} - \nu_k)^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad (\text{Ш.9.10})$$

где величины  $\langle |w_k|^2 \rangle$  определяются из (Ш.9.5).

Максимальная скорость деполяризации резонирующей гармоникой равна

$$(\tau_d^{-1})_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\langle |w_k|^2 \rangle}{\sigma_y}, \quad (\text{Ш.9.11})$$

При  $\sigma_{eff} \ll \nu_y$  проявляются спиновые резонансы с синхротронными колебаниями. Скорость деполяризации будет значительно меньше в этом случае, чем найденная по формуле (Ш.9.10), если  $\bar{\nu} - \nu_k$  не совпадает с  $m \nu_y$ . Происходит "нерезонансная" диффузия, скорость которой вычисляется по формуле (Ш.1.5).

Оценим вероятность существования свободного от деполаризующих резонансов интервала  $\nu$  для случая, когда пучок одновременно поляризуется каким-либо механизмом со скоростью  $\lambda_p$ . Приравнивая

$$(\tau_d^{-1})_{\max} = \lambda_p,$$

можно найти максимальный номер  $|K_z|_{\max}$  "работающих" спиновых резонансов. При достаточной близости к резонансам с номерами  $|K_z| \leq |K_z|_{\max}$  происходит деполаризация пучка. "Опасный интервал по  $\nu$ ", в котором происходит деполаризация, при  $\sigma_\nu \ll \sigma_b$  примерно равен

$$\Delta \nu \approx \sigma_b \approx |K_z| (\Delta \nu_z)_0,$$

Для больших номеров  $K_z$  распределение резонансов по  $\nu$  можно считать примерно равновероятным. Если сумма "опасных" интервалов по  $\nu$  не превышает числа суперпериодов накопителя

$$\sum_{|K_z| \leq |K_z|_{\max}} |\Delta \nu| \lesssim |K_z|_{\max}^2 (\Delta \nu_z)_0 \lesssim P, \quad (\text{Ш.9.12})$$

обязательно существуют интервалы энергии, в которых сохраняется поляризация  $\text{ж})$ . Условие (Ш.9.12) позволяет найти ограничение на максимальную светимость, при которой не разрушается поляризация.

Аналогичное (Ш.9.12) условие можно выписать для случая

$$\sigma_\nu \gg \sigma_b :$$

$$|K_z|_{\max} \sigma_\nu \lesssim P. \quad (\text{Ш.9.13})$$

Существенным для практических приложений является включение резонансов с частотами радиальных колебаний. В первом приближении

$\text{ж})$  При выборе значения  $\nu_z$  вблизи рационального числа  $m/n$  с невысокими  $n$  ( $n < |K_z|_{\max}$ ) происходит наложение спиновых резонансов, в связи с чем можно дополнительно (по сравнению с условием (Ш.9.12)) увеличить допустимый сдвиг  $(\Delta \nu_z)_0$ . Но при невысоких значениях  $n \neq 1$  может ухудшиться устойчивость встреч пучков.

это приведет к увеличению числа "работающих" резонансов. Интервалы энергий, в которых поляризация сохраняется, существуют при условии

$$|K_z|_{\max}^2 |K_x|_{\max} (\Delta \nu_z)_0 \lesssim \rho$$

заменяющего (Ш.9.12) и при условии

$$|K_z|_{\max} |K_x|_{\max} \sigma_\nu \lesssim \rho$$

записанного вместо \*) (Ш.9.13).

Обсудим полученные результаты. Условия сохранения поляризации слабо зависят от размеров пучков в местах встреч. Это дает возможность уменьшением  $\beta$ -функций увеличивать светимость без ухудшения устойчивости поляризации.

Представляет интерес проследить, как изменяются условия устойчивости поляризации при сближении частот бетатронных колебаний  $\nu_x$  и  $\nu_z$  (условия получения поляризации без встреч остаются при этом прежними). Мощности резонансов  $|\omega_k|$  при фиксированном  $(\Delta \nu_z)_0$  будут увеличиваться пропорционально  $|\nu_z - \nu_x|^{-1}$ . Это приводит к некоторому увеличению опасных интервалов резонансов обзванного встречному пучку. Однако более существенным является факт совпадения нелинейных резонансов с частотами вертикальных колебаний и радиальных. При  $\nu_z \rightarrow \nu_x$  вместо двумерной картины резонансов мы приходим к одномерной. Это дает возможность дополнительно поднять светимость поляризованных пучков.

Отметим также, что для повышения светимости поляризованных пучков, полезно выбирать частоту бетатронных колебаний вблизи целого резонанса сверху (аналогичный прием применяется для повышения светимости встречных пучков). Это уменьшает эффективный раз-

---

\*) Из-за малого вертикального размера сдвиг частоты вертикальных колебаний  $(\Delta \nu_z)_0$  обычно значительно превышает сдвиг частоты радиальных колебаний  $(\Delta \nu_x)_0$ .

брос частоты  $\nu_2$  по амплитудам колебаний возле равновесной орбиты по сравнению с (III.9.6) и затрудняет попадание в нелинейные резонансы. Ситуация, когда частоты  $\nu_2$  и  $\nu_x$  близки не только друг к другу, но и к целому числу, является, по-видимому, наиболее оптимальной как для сохранения поляризации, так и для обеспечения устойчивости самих встреч.



## КИНЕТИКА РАДИАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Эффект радиационной поляризации легких заряженных частиц (электронов, позитронов) высокой энергии при движении в однородном магнитном поле был обнаружен теоретически в 1963 году в работе Соколова и Тернова /21/. Было показано, что электроны, двигаясь все время поперек однородного магнитного поля, поляризуются за характерное время

$$\tau_p = [\hbar q_0^5 \gamma^2 H^3]^{-1}.$$

Асимптотическая степень поляризации равна  $8/(5\sqrt{3}) \approx 92\%$ .

Этот эффект можно пояснить классически, рассмотрев незаряженную частицу с большим собственным механическим моментом  $S \gg \frac{\hbar}{2}$  и магнитным моментом  $\vec{\mu} = q \vec{S}$ , движущуюся прямолинейно поперек магнитного поля  $\vec{H}$ . Тогда в собственной системе с магнитным полем  $\gamma \vec{H}$ , из-за прецессионного магнито-дипольного излучения магнитный момент будет "затухать" к положению "по полю" по уравнению ( $S_{||} = \vec{S} \vec{H} / H$ ):

$$\frac{dS_{||}}{d\tau} = -q [\hat{H} \vec{S}]_{||},$$

где  $\hat{H} = \frac{2}{3} d^3 \vec{\mu} / d\tau^3$  — тормозное магнитное поле излучения магнитного момента в собственной системе. Из уравнения следует, что проекция спина на направление поля будет изменяться в собственной системе со скоростью ( $S_{\perp}^2 = \vec{S}^2 - S_{||}^2$ )

$$\frac{dS_{||}}{d\tau} = \frac{2}{3} q^5 (\gamma H)^3 S_{\perp}^2$$

и соответственно в лабораторной системе

$$\dot{S}_{||} = \frac{2}{3} q^5 \gamma^2 H^3 S_{\perp}^2.$$

(IV.0.1)

Отсюда характерное время затухания (при малых отклонениях магнитного момента от направления поля) равно

$$\tau_p = \left| \frac{4S}{3} q^5 \gamma^2 H^3 \right|^{-1}.$$

Равновесная степень поляризации при  $S \gg \hbar$  равна 100%.

Для заряженной частицы с зарядом  $e$  и гиромагнитным фактором  $g$  ( $q = g e / (2m)$ ) необходимо дополнительно учесть зависящую от спина часть излучения заряда, вращающегося по окружности в магнитном поле. Это приводит к изменению численного множителя в уравнении для изменения  $S_{||}$ . Однако, для случая частицы с большим гиромагнитным фактором  $g \gg 1$ , частью излучения заряда, зависящей от спина, вообще можно пренебречь по сравнению с излучением магнитного момента.

Оценка времени поляризации, основанная на примере незаряженной частицы (нейтрона), была дана в работе /98/.

Для заряженной частицы со спином  $S \sim \hbar/2$  и гиромагнитным фактором  $g \lesssim 1$ , квантовые флуктуации поля излучения уменьшают степень равновесной поляризации. Так, для электронов она оказывается равной 92%.

### § I. Метод описания

Полученный Соколовым и Терновым результат, указал на существование поляризующего механизма. Для выяснения реальных возможностей получения поляризованных частиц в накопителях необходимо исследовать радиационную кинетику в неоднородных полях.

Изменение состояния поляризации под действием излучения в неоднородном поле представляет собой процесс существенно более сложный, чем в однородном. Усложнения связаны с взаимной зависимостью спинового и орбитального движения частицы и отсутствием постоянного направления равновесной поляризации. В работах по ра-

диационной поляризации в накопителях /21-27/ не было достигнуто исчерпывающее описание кинетики поляризации, поскольку в них рассматривались разобщенно и разными методами лишь отдельные ее аспекты. В работах /22,27/ и предыдущей главе изучались деполяризующие эффекты рассеяния траектории частиц квантовыми флуктуациями синхротронного излучения. Но эти эффекты являются основными, например, на недалеком расстоянии от мощных спиновых резонансов, где поляризующими эффектами можно пренебречь. С другой стороны, в работах / 25-27/, посвященных исследованию поляризующих эффектов в неоднородных полях, находилась средневероятная скорость изменения вектора спина за малые времена формирования излучения. Уравнение такого типа дает представление о "мгновенном, прямом" взаимодействии спина с излучением, но его недостаточно для описания поляризации за большие времена, когда существенную роль играет изменение излучением орбитального движения частиц с учетом спиновой поправки.

Наиболее простой путь для описания поляризации в неоднородных полях, это не основываться на уравнениях квантовой теории, а с самого начала исходить из классических уравнений движения заряженной частицы с произвольным спином и магнитным моментом и уравнений поля излучения, в которые переходят уравнения квантовой теории в классическом пределе. Переход к квантовому описанию осуществляется заменой классических величин (вектора спина и полевых переменных) соответствующими операторами по обычным правилам. Такой наглядный подход является вполне последовательным, поскольку в накопителях энергии характерных излучаемых квантов на много порядков меньше энергии частиц. Задача сводится к нахождению средней скорости изменения под действием излучения интегралов движения во внешнем поле. Особую роль играет введенное в предыдущих главах понятие оси прецессии  $\vec{n}$  (подвижной оси кванто-

вания для спина). С помощью этой физической характеристики удается достигнуть замкнутое и компактное описание кинетики поляризации в неоднородных полях.

Получим гамильтониан, описывающий квазиклассическое движение частицы со спином  $\vec{S}$  и магнитным моментом  $g\vec{S}$  в электромагнитном поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Движение спина описывается уравнением (I.I.2). Поэтому спиновая часть гамильтониана с линейной точностью по спину равна  $\vec{\Omega} \vec{S}$ . Таким образом искомый гамильтониан равен \*)

$$\mathcal{H}_{ext} = \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2} + eA^0 + \vec{\Omega} \vec{S},$$

где  $(A^0, \vec{A})$  — 4-потенциал поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ .

Именно такой вид гамильтониана обеспечивает правильные уравнения для частицы и спина. Этот гамильтониан определяет и спиновую зависимость ускорения заряженной частицы в электромагнитном поле.

Для описания взаимодействия с излучением по теории возмущения гамильтониан  $\mathcal{H}$  можно представить в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ext} + \hat{\mathcal{H}} \quad (\text{IV.I.I})$$

где

$$\hat{\mathcal{H}} = e(\hat{A}^0 - \vec{v} \hat{\vec{A}}) + \hat{\vec{\Omega}} \hat{\vec{S}}$$

гамильтониан взаимодействия частицы с излучением. Значком  $\hat{\dots}$  обозначаем величины, относящиеся к полю излучения, вектор  $\hat{\vec{\Omega}}$  выражается через  $\hat{\vec{E}}$  и  $\hat{\vec{H}}$  так же, как и вектор  $\vec{\Omega}$  через  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Уравнения поля излучения (уравнения Максвелла) можно записать в канонической форме

$$\dot{\hat{c}}_{\vec{k}} = \{ \hat{\mathcal{H}}, \hat{c}_{\vec{k}} \}, \quad (\text{IV.I.2})$$

---

\*) Гамильтониан мог бы быть получен и из известного нерелятивистского гамильтониана. Для спина  $1/2$  гамильтониан с линейной точностью по постоянной Планка  $2\pi\hbar$  можно также получить из уравнения Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом преобразованием Фолди-Вотхойзена.

где  $C_{\vec{k}}$ ,  $C_{\vec{k}}^*$  – канонические полевые переменные – амплитуды плоских волн в разложении потенциала поля излучения  $\hat{A}^i$ ,  $\{, \}$  – скобки Пуассона. Квантовое обобщение гамильтониана и уравнений движения осуществляется заменой классических переменных на операторы с известными коммутационными соотношениями.

Найдем среднюю скорость изменения спинового интеграла движения  $S_{\vec{n}} = \vec{S} \vec{n}(\vec{p}, \vec{z})$ . Изменение  $S_{\vec{n}}$  может быть связано только с полями излучения:

$$\dot{S}_{\vec{n}} = \dot{\vec{S}} \vec{n} + \vec{S} \dot{\vec{n}} = [\hat{\vec{\Omega}} \vec{S}] \vec{n} + \vec{S} \left( \vec{f} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \vec{n} \equiv [\hat{\vec{\omega}} \vec{S}] \vec{n}, \quad (\text{IV.I.3})$$

где  $\vec{f} = e(\vec{E} + [\vec{v} \hat{H}])$  – радиационная сила, действующая на частицу, а

$$\hat{\vec{\omega}} = \hat{\vec{\Omega}} - [\vec{n} \left( \vec{f} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \vec{n}]$$

эффективная добавка в угловую скорость прецессии, обязанная полю излучения. Вектор  $\hat{\vec{\Omega}}$  отвечает за прямое действие поля излучения на спин, второй, обязанный спин-орбитальной связи, учитывает возмущение излучением траектории частицы.

Начнем с классического рассмотрения эффектов излучения. Тогда для получения  $\dot{S}_{\vec{n}}$  нужно подставить в  $\hat{\vec{\omega}}$  индуцированное движением частицы поле излучения. Так как в уравнении (IV.I.3) поперечные к  $\vec{n}$  проекции спина  $\vec{S}$  вращаются с частотой спиновой прецессии  $\nu$ , не резонирующей с частотами движения, в векторе  $\hat{\vec{\omega}}$  нужно учесть лишь часть поля излучения, модулированную спиновой частотой. Используя формализм скобок Пуассона, выражения для  $\hat{\vec{\omega}}_{\kappa\lambda}$ , как функции вынужденных решений уравнений поля (IV.I.2), можно записать в виде

$$\hat{\vec{\omega}}_{\kappa\lambda} = \left\{ \int_{-\infty}^t \hat{\mathcal{H}}_{\vec{t}'} dt', \hat{\vec{\omega}} \right\}, \quad (\text{IV.I.4})$$

где скобки Пуассона затрагивают лишь полевые переменные  $C_{\vec{k}}$ ,  $C_{\vec{k}}^*$ , а интеграл берется по невозмущенной траектории частицы и спина.

За спиновую модуляцию излучения ответственна часть гамильтониана взаимодействия  $\hat{\mathcal{H}}_\psi$ , зависящая от фазы прецессии спина  $\psi$ . Нетрудно догадаться без прямого преобразования  $\hat{\mathcal{H}}$  к переменным действия - фазы, что  $\hat{\mathcal{H}}_\psi = \hat{\omega} \vec{S}$ . Действительно, лишь такой вид  $\hat{\mathcal{H}}_\psi$  дает правильное уравнение (IV.I.3) для  $S_{\vec{n}}$ :  $\dot{S}_{\vec{n}} = \{\hat{\mathcal{H}}_\psi, S_{\vec{n}}\}$ . Таким образом, заменяя в формуле (IV.I.4) гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}$  на  $\hat{\mathcal{H}}_\psi = \hat{\omega} \vec{S}$  и производя усреднение по времени получаем усредненное уравнение для изменения  $S_{\vec{n}}$  (ср. с (IV.0.I)):

$$\dot{S}_{\vec{n}} = \frac{\alpha_-}{\hbar} S_{\perp}^2, \quad (\text{IV.I.5})$$

где независящая от времени величина  $\alpha_-/\hbar$  вычисляется по формуле

$$\frac{\alpha_-}{\hbar} = \frac{1}{2} \text{Im} \left\langle \left\{ (\hat{\omega} \vec{\eta})_t, \int_{-\infty}^t (\hat{\omega} \vec{\eta})_{t'}^* dt' \right\} \right\rangle = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\langle \left\{ (\hat{\omega} \vec{\eta})_{t+\frac{\tau}{2}}, (\hat{\omega} \vec{\eta})_{t-\frac{\tau}{2}}^* \right\} \right\rangle, \quad (\text{IV.I.6})$$

скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени. Конкретное значение  $\alpha_-/\hbar$  зависит от траектории движения частицы и ее спина во внешнем поле. Поле излучения может воздействовать на поляризацию не только непосредственно, но и через траекторию, возмущая ось прецессии  $\vec{n}(\vec{p}, \vec{z})$ .

Из уравнения (IV.I.5) находим, что степень поляризации  $\zeta = \frac{S_{\vec{n}}}{S}$  начально неполяризованного пучка возрастает со временем следующим образом

$$\zeta(t) = t \hbar (\alpha_- S / \hbar). \quad (\text{IV.I.7})$$

Таким образом, в классической теории излучение приводит к полной поляризации (вдоль  $\vec{n}_s$ ) за характерное время

$$\tau_p \approx (\alpha_- S / \hbar)^{-1}.$$

В квантовой теории, кроме индуцированного движением поля излучения, возникает "флуктуирующее" свободное поле — поле в состоянии фотонного вакуума. Учет его среднего воздействия добавляет к уравнению (IV.I.5) член диффузионного типа  $-\alpha_+ S_{\vec{n}}$  ( $\alpha_+ > 0$ ) и уравнение для  $S_{\vec{n}}$ , применимое и для квантового спина, становится следующим:

$$\dot{S}_{\vec{n}} = \frac{\alpha_-}{\hbar} S_{\perp}^2 - \alpha_+ S_{\vec{n}}, \quad (\text{IV.I.8})$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle 0 | [(\vec{\omega} \vec{\eta})_{t+\frac{\tau}{2}} (\vec{\omega} \vec{\eta}^*)_{t-\frac{\tau}{2}}]_{\pm} | 0 \rangle,$$

где скобки  $[ ]_{\pm}$  обозначают антикоммутатор и коммутатор по переменным поля излучения,  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$  — означает усреднение по состоянию фотонного вакуума. Коэффициент  $\alpha_-/\hbar$  сохраняет то же значение, что и в классической теории. Диффузионный член  $-\alpha_+ S_{\vec{n}}$  в уравнении имеет чисто квантовое происхождение является не-локальной функцией траектории.

Квантовые флуктуации поля излучения приводят к ограничению равновесной степени поляризации, устанавливая ее, вообще говоря, на уровне меньше 100% ( $\alpha_+ \geq |\alpha_-|$ ). Наиболее сильно это выражено для частицы со спином половины. В этом случае уравнение становится элементарным ( $S_{\perp}^2 = \frac{\hbar}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) = \frac{\hbar}{2}$ ):

$$\dot{\zeta} = \alpha_- - \alpha_+ \zeta. \quad (\text{IV.I.9})$$

Степень поляризации  $\zeta = S_{\vec{n}}/s = 2 S_{\vec{n}}/\hbar$  асимптотически стремится к равновесному значению  $\alpha_-/\alpha_+$  с характерным временем, определяемым коэффициентом  $\alpha_+$ :  $\tau_p = \alpha_+^{-1}$ . При начальном условии  $\zeta_{t=0} = 0$  степень поляризации возрастает со временем следующим образом:

$$\zeta = \frac{\alpha_-}{\alpha_+} (1 - e^{-\alpha_+ t}).$$

Обратим внимание, что на малых временах (существенно меньших  $\alpha_+^{-1}$ ) степень поляризации линейно растет со временем с коэффициентом пропорциональности, определяемым поляризующими эффектами:  $\dot{J} = \alpha_- t$ .

Легко установить квантомеханический смысл коэффициентов  $\alpha_{\pm}$ . Сравнивая уравнение, описывающее изменение  $S_{\vec{n}}$  для спина  $I/2$ , с элементарным уравнением баланса для чисел заполнения двухуровневой системы, видим, что коэффициенты  $\alpha_{\pm}$  представляют собой сумму и разность вероятностей переворотов, относительно направления  $\vec{n}$ , в единицу времени

$$P_{\uparrow} \equiv P_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad , \quad P_{\downarrow} \equiv P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad , \text{ т.е.}$$

$$\alpha_+ = P_{\uparrow} + P_{\downarrow} \quad , \quad \alpha_- = P_{\uparrow} - P_{\downarrow} \quad .$$

Коэффициенты  $P_{\uparrow}$ ,  $P_{\downarrow}$  полностью определяют вероятности спиновых переходов и для частиц с произвольным спином  $j$  ( $\vec{S}^2 = \hbar^2 j(j+1)$ ). Из соответствующих уравнений баланса можно найти равновесную степень поляризации, которая будет равна

$$J_{st} = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \frac{P_{\uparrow}^{2j+1} + P_{\downarrow}^{2j+1}}{P_{\uparrow}^{2j+1} - P_{\downarrow}^{2j+1}} - \frac{1}{2j} \frac{P_{\uparrow} + P_{\downarrow}}{P_{\uparrow} - P_{\downarrow}} \quad .$$

Оценку скорости релаксации легко получить прямо из основного уравнения (IV.1.8):

$$\tau_p^{-1} \approx \max(\alpha_+, |\alpha_-| j) \quad .$$

При увеличении значения  $j$  равновесная степень поляризации быстро приближается к классическому пределу, т.е. к единице. Для частиц с небольшим значением  $j$  равновесная степень поляризации может достигать единицы лишь в специальных ситуациях (когда  $\alpha_+ = |\alpha_-|$ ).

Заметим, что в нашем рассмотрении еще не использовалась конкретная природа возмущающего электромагнитного поля. Поэтому уравнение (IV.1.8) можно применять для описания спиновой кинетики



частиц, взаимодействующих с любым источником стохастического поля. При этом скобки  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$  будут означать усреднение по невозмущенному частицей состоянию источника.

При вычислении радиационных коэффициентов  $\alpha_{\pm}$  удобно воспользоваться формулами для вакуумных средних от произведений компонент  $\hat{A}^i$  электромагнитного поля /99/:

$$\langle 0 | \hat{A}^i(\vec{z}', t') \hat{A}^k(\vec{z}, t) | 0 \rangle = \frac{\hbar}{\pi} \frac{g_{ik}}{(t' - t - i0)^2 + |\vec{z}' - \vec{z}|^2}, \quad (\text{IV.I.IO})$$

где  $g_{ik} = 0 \quad i \neq k$ ,  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ .

## § 2. Поляризация ультрарелятивистских электронов в неоднородных полях

Для вычисления степени равновесной поляризации и времени релаксации необходимо знать траекторию частицы и спина. Важным является случай ультрарелятивистского движения, когда изменение ускорения частицы на длине формирования излучения  $\tau \simeq (q_0 H)^{-1}$  относительно мало, что сводится к условию:

$$|\dot{\vec{H}}| \simeq |\partial \vec{H} / \partial y| \ll q_0 H^2. \quad (\text{IV.2.I})$$

Для электронов и позитронов, кроме этого, мал угол поворота спина  $\Delta \Psi$  относительно скорости на длине формирования излучения <sup>ж)</sup>:

$$\Delta \Psi \simeq q_a H / q_0 H = q_a / q_0 \ll 1.$$

Учитывая, что  $\hat{f}_v \sim \gamma \hat{f}_{tz}$ , получаем из (IV.I.3) следующее выражение для  $\hat{\vec{\omega}}$ :

$$\hat{\vec{\omega}} = -\frac{q_0}{\gamma} \hat{\vec{H}}_v - \frac{q_0}{\gamma^2} \hat{\vec{H}}_{tz} - q_0 \hat{E}_v [\vec{n} \vec{d}] / \gamma,$$

<sup>ж)</sup> Задача о радиационной поляризации частиц с немалым аномальным моментом ( $q_a \sim q_0$ ) в однородном магнитном поле решена в работах /32, 35/.

где  $\vec{d} = \gamma \partial \vec{n} / \partial \gamma$  - функция спин-орбитальной связи (Ш.3.1).

В результате получаем следующие формулы для коэффициентов  $\alpha_{\pm}$ :

$$\alpha_- = -\hbar q_0^2 \gamma^5 \langle |\dot{\vec{v}}|^2 [\vec{v} \dot{\vec{v}}] (\vec{n} - \vec{d}) \rangle, \quad (\text{IV.2.2})$$

$$\alpha_+ = \frac{5\sqrt{3}}{8} \hbar q_0^2 \gamma^5 \langle |\dot{\vec{v}}|^3 \left[ 1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \dot{\vec{v}})^2 + \frac{11}{18} \vec{d}^2 \right] \rangle$$

Таким образом, за характерное время  $\alpha_+^{-1}$  устанавливается равновесная степень поляризации

$$\langle \rangle = -\frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\langle |\dot{\vec{v}}|^2 [\vec{v} \dot{\vec{v}}] (\vec{n} - \vec{d}) \rangle}{\langle |\dot{\vec{v}}|^3 \left[ 1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \dot{\vec{v}})^2 + \frac{11}{18} \vec{d}^2 \right] \rangle}. \quad (\text{IV.2.3})$$

В наиболее простом случае однородного магнитного поля ( $\vec{d} = 0$ ,  $\vec{n} = [\vec{v} \dot{\vec{v}}] / |\dot{\vec{v}}|$ ) эти формулы дают хорошо известный результат Соколова и Тернова. Видим, что самополяризация может иметь место и в накопителях со сложной конфигурацией поля, с большим отклонением направления равновесной поляризации  $\vec{n}_s$  от аксиального. Влияние неоднородности ведущего поля на процесс самополяризации в накопителе сводится в целом к отклонению направления равновесной поляризации  $\vec{n}_s$  от направления  $[\vec{v} \dot{\vec{v}}]$  и к появлению эффектов, обязанных связи неравновесного орбитального и спинового движений. Последние эффекты в формулах (IV.2.2) - (IV.2.3) учитываются членами, содержащими функцию спин-орбитальной связи  $\vec{d}$ .

Член в  $\alpha_+$  пропорциональный  $\vec{d}^2$  описывает деполяризующее воздействие хаотических скачков траектории, возникающих из-за квантовых флуктуаций синхротронного излучения - эффект, рассмотренный в предыдущей главе III. Величина функции спин-орбитальной связи возрастает при приближении к спиновым резонансам и при  $|\vec{d}| \gg 1$  скорость релаксации равна (Ш.3.5):

$$\alpha_+ = \frac{1}{2} \langle \vec{d}^2 \frac{d(\delta\gamma)^2}{dt \gamma^2} \rangle,$$

где  $\frac{1}{2} \frac{d(\delta\gamma)^2}{dt} = \frac{55}{48\sqrt{3}} \hbar q_0^2 \gamma^7 |\dot{\vec{v}}|^3$  - коэффициент диффузии  $\gamma$ .

Вблизи мощных спиновых резонансов равновесная степень поляризации близка к нулю ( $\zeta \ll 1$ ).

Член в  $\alpha_-$ , пропорциональный  $\vec{d}$ , описывает дополнительный эффективный механизм радиационной самополяризации, вообще отсутствующий в почти постоянном по направлению магнитном поле. Эффект имеет классическую интерпретацию и обязан зависимости силы радиационного торможения от спина. Сила радиационного торможения для ультрарелятивистской частицы записывается в виде (/100/ и § 3).

$$\vec{f}_{rad} = -\frac{2}{3} e^2 \gamma^4 |\dot{\vec{v}}|^2 \vec{v} + 2 q_0^2 \gamma^5 |\dot{\vec{v}}|^2 (\vec{s} [\vec{v} \dot{\vec{v}}]) \vec{v}.$$

Спиновая часть этой силы приводит к дополнительной модуляции направления  $\vec{n}(\vec{p}, \vec{z})$  с частотой прецессии спина (в случаях, если направление  $\vec{n}$  не совпадает с  $[\vec{v} \dot{\vec{v}}]$ ). Дополнительная средняя скорость изменения  $S_{\vec{n}}$  будет равна

$$(\dot{S}_{\vec{n}})_f = \langle \vec{s} (\vec{f}_{rad} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \vec{n} \rangle = q_0^2 \gamma^5 \langle |\dot{\vec{v}}|^2 [\vec{v} \dot{\vec{v}}] (\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \vec{n} \rangle S_{\perp}^2, \quad (\text{IV.2.4})$$

что и дает добавку, пропорциональную  $\vec{d}$  в формуле (IV.2.2) для  $\alpha_-$ . Этот механизм может приводить, в зависимости от знака производной  $\partial \vec{n} / \partial \gamma$  как к уменьшению, так и к увеличению равновесной степени поляризации.

Максимально возможная степень равновесной поляризации благодаря новому механизму поляризации достигается в неоднородном поле. Исследование формулы (IV.2.3) показывает, что максимальная степень имеет место в случае, когда

$$\vec{n}_s = -\sqrt{\frac{7}{11}} \frac{[\vec{v} \dot{\vec{v}}]}{|\dot{\vec{v}}|} \pm \sqrt{\frac{4}{11}} \vec{v}, \quad \vec{d} = \frac{2\sqrt{7}}{11} \left[ \sqrt{\frac{4}{11}} \frac{[\vec{v} \dot{\vec{v}}]}{|\dot{\vec{v}}|} \pm \sqrt{\frac{7}{11}} \vec{v} \right]. \quad (\text{IV.2.5})$$

При этом максимальная степень равновесной поляризации, равная

$$\zeta_{max} = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{77}} \approx 95\%$$

оказывается больше, чем при движении в однородном магнитном поле (в однородном поле  $\gamma = 8/(5\sqrt{3}) \approx 92\%$ ). Такой случай можно осуществить, например, при небольших энергиях ( $\gamma q_a/q_0 \lesssim 1$ ) в азимутально симметричном накопителе, наложив на орбиту однородное по азимуту продольное магнитное поле  $/35/$ . Практически, используя магнитную змейку, т.е. вводя в определенное место орбиты магнитное поле с большим значением  $\langle H^3 \rangle$  (см. § 5), такие значения  $\vec{n}_s$  и  $\vec{d}$  достаточно приготовить в одном месте орбиты.

В определенных ситуациях, когда обычный эффект самополяризации полностью отсутствует, описанный механизм может обеспечить высокую степень поляризации. Наиболее простым примером такого рода может служить описанный выше накопитель с продольным полем, поворачивающим спин в промежутке на поворота (см. рис. 2). В этом примере равновесное направление поляризации на участках с вертикальным магнитным полем (где частицы излучают) поперечно полю, и прямое действие излучения не может поляризовать пучок. Тем не менее, благодаря спин-орбитальной связи степень поляризации может достигать 60-70%. При этом функция спин-орбитальной связи равна<sup>\*</sup>)

$$\vec{d} = \pm \sqrt{\frac{18}{11}} \frac{[\vec{v} \vec{v}]}{|\vec{v}|} \quad (\text{IV.2.6})$$

Таким образом, благодаря новому механизму поляризации существуют широкие возможности получения высокой степени поляризации при любом угле между направлениями  $\vec{n}_s$  и  $[\vec{v} \vec{v}]$ .

### § 3. Уравнение для плотности поляризации электронов в накопителях

В предыдущих параграфах исследовалась кинетика поляризации частиц в накопителях в условиях, когда радиационное время релак-

<sup>\*</sup>) При  $\gamma q_a/q_0 \gg 1$  из-за сильного деполяризующего воздействия квантовых флуктуаций синхротронного излучения на поворотных участках степень поляризации становится малой в накопителях с примерно одинаковой вдоль орбиты величиной поля. Но, вводя вблизи противоположащего змейке промежутка, где значение  $\vec{d}$  равно (IV.2.6), достаточно большое поле, можно сильно повысить степень равновесной поляризации.

саци орбитального движения велико по сравнению с характерными периодами прецессии спина в неоднородном поле. Фактически это предполагает достаточную удаленность от спиновых резонансов. Для количественного описания воздействия излучения на поляризацию, применимого и в резонансной ситуации, получим общее уравнение для матрицы плотности в пространстве спиновых и орбитальных переменных.

Исходим из уравнения для расширенной матрицы  $R$ , описывающего движение системы частица + излучение:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \{ \mathcal{H}_{ext} + \mathcal{H}_{rad} + \hat{\mathcal{H}}, R \} = 0,$$

где  $\mathcal{H}_{rad}$  — гамильтониан "свободного" поля излучения,  $\hat{\mathcal{H}}$  — гамильтониан взаимодействия с излучением (IV.1.1). Матрица плотности электрона  $\rho$  получается из  $R$  упрощением по полевым переменным  $c_k$ :  $\rho = S_{c_k} R$ . Уравнение для  $\rho$  в низшем порядке по взаимодействию имеет вид \*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{ \mathcal{H}_{ext}, \rho \} = \frac{1}{2} S_{c_k} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \hat{\mathcal{H}}_{t+\frac{\tau}{2}} \left\{ \hat{\mathcal{H}}_{t-\frac{\tau}{2}}, \rho |0\rangle\langle 0| \right\} \right\}, \quad (IV.3.1)$$

где  $\hat{\mathcal{H}}$  — оператор в представлении взаимодействия,  $|0\rangle$  — волновая функция фотонного вакуума. Для получения явного выражения правой части (IV.3.1) нужно вычислить интегралы от вакуумных средних по классическим траекториям. В ультрарелятивистском случае, когда ускорение частицы мало меняется на длине формирования излучения, вычисления сводятся к взятию вычетов при  $\tau = 0$  и  $\tau = i\sqrt{12}/|\vec{r}\vec{v}|$ .

Для частицы со спином 1/2 матрица  $\rho$  представляется в виде:

$$\rho = \frac{1}{2} (f + \vec{b} \cdot \vec{\zeta}),$$

\*) При получении в (IV.3.1) члена, описывающего взаимодействие с излучением, следует оставить под интегралом лишь симметричную по  $\tau$  часть, так как несимметричная часть имеет вид скобки Пуассона и может быть учтена перенормировкой гамильтониана  $\mathcal{H}_{ext}$ .

где  $\vec{\sigma}$  — матрицы Паули,  $f = Sp \rho$  — функция распределения по орбитальным переменным,  $\vec{\zeta} = Sp \vec{\sigma} \rho$  — плотность поляризации (здесь  $Sp$  означает упрощение по спиновым индексам). В квазиклассическом случае  $f$  и  $\vec{\zeta}$  можно рассматривать как функции координат и импульсов частицы  $\vec{z}$  и  $\vec{p}$ .

В уравнении для  $f$  спиновыми поправками можно пренебречь, так как разброс орбитальных квантовых чисел при  $\gamma \gg 1$  велик:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_0 f = St f,$$

где  $\left(\frac{d}{dt}\right)_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{z}} + e(\vec{E} + [\vec{v} \vec{H}]) \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$  производная вдоль траектории во внешнем поле, правая часть описывает перемешивание частиц в пучке под действием радиационного трения и квантовых флуктуаций излучения [82]:

$$St = -\frac{\partial}{\partial \vec{p}} \vec{f} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \frac{d}{dt} \overline{\delta p_{\alpha} \delta p_{\beta}} \frac{\partial}{\partial p_{\beta}}, \quad (\text{IV.3.2})$$

$$\vec{f} = -\frac{2}{3} e^2 \gamma^4 |\dot{\vec{v}}|^2 \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} \overline{\delta p_{\alpha} \delta p_{\beta}} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \hbar q_0^2 \gamma^5 |\dot{\vec{v}}|^3 p_{\alpha} p_{\beta}.$$

Для плотности поляризации  $\vec{\zeta}(\vec{p}, \vec{z}, t)$  после всех вычислений получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_0 \vec{\zeta} - [\vec{\Omega} \vec{\zeta}] = St \vec{\zeta} - \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \left( p_{\alpha} \lambda \frac{[\vec{v} \dot{\vec{v}}]}{|\dot{\vec{v}}|} f \right) - \\ - \lambda \left\{ \frac{5\sqrt{3}}{8} \left[ \vec{\zeta} - \frac{2}{9} \vec{v} (\vec{\zeta} \vec{v}) \right] + \frac{[\vec{v} \dot{\vec{v}}]}{|\dot{\vec{v}}|} f \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.3})$$

Здесь  $\lambda = \hbar q_0^2 \gamma^5 |\dot{\vec{v}}|^3$ ,  $\vec{\Omega}$  — угловая скорость прецессии спина во внешнем поле (I.1.3).

Уравнение (IV.3.3) содержит все существенные механизмы воздействия излучения на поляризацию. Член  $St \vec{\zeta}$  учитывает радиационное трение и флуктуации импульса, приводящие в неоднородном поле к деполяризующим эффектам<sup>\*</sup> (см. главу III). Второй член в пра-

<sup>\*</sup> При наличии дополнительных стохастических возмущений, они также будут давать вклад в  $St$  — член.

вой части обязан силе спин-орбитального взаимодействия с полем классического излучения \*) (см. § 2 гл. IV). Третий член описывает прямое действие излучения на поляризацию частицы и соответствует полученному в /26/ выражению для средневероятностей скорости изменения вектора спина в акте излучения.

При принятых здесь ограничениях уравнение (IV.3.3) пригодно для анализа поведения поляризации ультрарелятивистских электронов в любых условиях.

В накопителях частицы движутся с малым разбросом около равновесной орбиты. Изменение степени поляризации пучка обязано непосредственному действию излучения, характеризуемому временем  $\lambda^{-1}$ , и неравновесной части  $\vec{\Sigma}$ , воздействие которой становится необратимым за время радиационного перемешивания траекторий частиц  $\Lambda^{-1}$  ( $\Lambda \approx q_0^2 \gamma^3 \vec{v}^2 \gg \lambda$ ) и существенно зависит от спектра во внешнем поле.

Искомое время релаксации спинов  $T$  может меняться в пределах  $\lambda^{-1} \lesssim T \lesssim \Lambda^{-1}$ . В случае, когда  $T \sim \lambda^{-1}$ , пучок будет заведомо деполяризован. Действительно, при  $T \ll \lambda^{-1}$  поляризующие эффекты могут быть обязаны лишь зависимости орбитального движения от спина. Так как в ультрарелятивистском случае равновесный разброс орбитальных квантовых чисел велик, то на временах  $\lambda^{-1}$  этой зависимостью можно пренебречь. Ввиду практической малости времени  $\lambda^{-1}$  для потребностей эксперимента достаточно количественного исследования в области, где  $T \gg \lambda^{-1}$ . При этом в нулевом приближении плотность поляризации пропорциональна функции распределения частиц, а скорость изменения степени поляризации можно находить по теории возмущений.

На равновесной траектории движение спина представляет собой прецессию вокруг периодического направления  $\vec{n}_s(\theta)$  с частотой

\*) Как следует из (IV.3.3) уравнение на траекторию частицы соответствует (IV.2.4).

той  $\Omega_s = \gamma \omega_s$ . Ввиду быстрого размешивания по фазам прецессии, средняя поляризация будет направлена по  $\vec{n}_s$ .

Естественно поэтому плотность поляризации представить в виде:

$$\vec{\zeta} = \zeta(t) \vec{n}_s f(\vec{p}, \vec{z}, t) + \Delta \vec{\zeta},$$

с условием  $\int \vec{n}_s \Delta \vec{\zeta} d\vec{p} d\vec{z} = 0$ . Проектируя уравнение (IV.3.3) на  $\vec{n}_s$  и производя интегрирование, получаем выражение для скорости изменения степени поляризации  $\zeta$ :

$$\dot{\zeta} = \int d\vec{p} d\vec{z} [\vec{w} \Delta \vec{\zeta}] \vec{n}_s - \int d\vec{p} d\vec{z} \lambda f \left\{ \frac{5\sqrt{3}}{8} \zeta \left[ 1 - \frac{2}{9} (\vec{n}_s \vec{v})^2 \right] + \frac{[\vec{v} \dot{\vec{v}}] \vec{n}_s}{|\dot{\vec{v}}|} \right\}. \quad (\text{IV.3.4})$$

В уравнении для  $\Delta \vec{\zeta}$  можно пренебречь прямым воздействием излучения ( $\lambda \ll 1$ ) и изменением  $\zeta$  со временем:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_0 \Delta \vec{\zeta} - [(\Omega_s \vec{n}_s + \vec{w}) \Delta \vec{\zeta}] - St \Delta \vec{\zeta} = [\vec{w} \vec{n}] \zeta f - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \lambda \frac{[\vec{v} \dot{\vec{v}}]}{|\dot{\vec{v}}|} f \right). \quad (\text{IV.3.5})$$

Для получения окончательного уравнения на  $\zeta$  достаточно подставить в (IV.3.4) вынужденное решение уравнения (IV.3.5) для  $\Delta \vec{\zeta}$  (решение однородного уравнения для  $[\Delta \vec{\zeta} \vec{n}_s]$  будет быстро затухать из-за разброса частот прецессии спина) и усреднить по периоду обращения частиц. Это уравнение будет иметь вид (IV.I.9):

$$\dot{\zeta} = \alpha_- - \alpha_+ \zeta, \quad \zeta_t = \frac{\alpha_-}{\alpha_+} + \left( \zeta_0 - \frac{\alpha_-}{\alpha_+} \right) e^{-\alpha_+ t}, \quad (\text{IV.3.6})$$

где  $\alpha_{\pm}$  — постоянные.

Ограничимся получением явных выражений для коэффициентов  $\alpha_{\pm}$  в случае, когда разброс частот орбитального и спинного движений значительно превышает обратное время релаксации  $\Lambda$ . Это обстоятельство существенно облегчает решение уравнения (IV.3.5), так как столкновительный член  $St \Delta \vec{\zeta}$  можно учесть по теории возмущений. При этом могут возникать особые точки — точки спиновых резонансов, вблизи которых, вообще говоря,  $St \Delta \vec{\zeta}$  не может рас-



считаться как малое возмущение. Однако нам и не требуется знание решения вблизи резонанса: при вычислении коэффициентов  $\alpha_{\pm}$  контур интегрирования можно сместить в комплексную плоскость так, чтобы удовлетворить условию удаленности от резонанса. Правило обхода точек резонанса должно отвечать затуханию однородного решения уравнения (IV.3.5).

В первом приближении по  $\vec{w}$  вынужденное решение для  $\xi_1 \equiv \xi \vec{\ell}^* = \xi (\vec{\ell}_1 - i \vec{\ell}_2)$  имеет вид:

$$\xi_1 = \xi \hat{L} \left[ f \vec{w} \vec{\ell}^* - i S t (\hat{L} \vec{w} \vec{\ell}^* f) - \hat{L} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \lambda \frac{[\vec{v} \vec{v}]}{|\vec{v}|} \vec{\ell}^* f \right) \right]. \quad (\text{IV.3.7})$$

Здесь интегральный оператор  $\hat{L}$  определен следующим образом:

$$\hat{L} a(t) = i \int_{-\infty}^t dt' a(t') \exp[i(\Omega - i0)(t' - t)],$$

где  $\Omega = \Omega_s + \vec{w} \vec{n}_s$  — средняя на заданной траектории частота прецессии спина.

Перейдем к обычно применяемым в теории циклических ускорителей переменным энергии и фазы синхротронного движения и поперечных отклонений импульса и координаты от равновесной траектории  $\vec{p} - \vec{p}_s(\theta)$ ,  $\vec{z} - \vec{z}_s(\theta)$ , тогда оператор  $\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$  можно заменить на  $\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}$ . Для вычисления  $\hat{L} \vec{w} \vec{\ell}^*$  представляем  $\vec{w} \vec{\ell}^*$  в виде:

$$\vec{w} \vec{\ell}^* = \sum_{\kappa} w_{\kappa} \exp(i \psi_{\kappa})$$

где  $\psi_{\kappa}$  — целочисленные комбинации фаз орбитального движения, а гармоники  $w_{\kappa}$  постоянны на траектории частицы и полностью обязаны отклонению движения от равновесного. После подстановки (IV.3.7) в (IV.3.4) и усреднения по времени получаем следующие выражения для  $\alpha_{\pm}$ :

$$\alpha_{+} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \left\langle \lambda \left[ 1 - \frac{2}{9} (\vec{n} \vec{v})^2 + \frac{11}{18} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{\kappa} \frac{w_{\kappa} e^{i \psi_{\kappa}}}{\Omega - \Omega_{\kappa} - i0} \right]^2 + \mathcal{I} \sum_{\kappa} |w_{\kappa}|^2 \delta(\Omega - \Omega_{\kappa}) \right\rangle, \quad (\text{IV.3.8})$$

$$\alpha_{-} = \left\langle \lambda \frac{[\vec{v} \vec{v}]}{|\vec{v}|} (\vec{n} - \text{Re} \vec{\ell} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{\kappa} \frac{w_{\kappa} e^{i \psi_{\kappa}}}{\Omega - \Omega_{\kappa} - i0}) \right\rangle,$$

где  $\delta(\Omega - \Omega_k)$  — дельта-функция, скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по распределению частиц в пучке и их равновесному движению. Вместе с гармониками  $\omega_k$ , частоты  $\Omega$  и  $\Omega_k = \dot{\psi}_k$  являются функциями интегралов движения типа амплитуд колебаний. При вычислении производной  $\frac{\partial}{\partial t}$  необходимо учитывать, что амплитуды и фазы бетатронных колебаний являются функциями не только поперечных, но и энергетических отклонений движения частицы от равновесного.

Значения  $\alpha_{\pm}$ , как видно, существенно зависят от близости спиновых резонансов  $\Omega = \Omega_k$ . Ввиду этого необходимо принимать во внимание и резонансы, возникающие в высших приближениях по  $\vec{w}$ . Формулы (IV.3.8) сохраняют свой вид, если гармоники  $\omega_k$  определять с учетом высших приближений по  $\vec{w}$ .

Вдали от резонансов член, содержащий  $\delta(\Omega - \Omega_k)$ , обращается в нуль, а в знаменателях  $\Omega - \Omega_k - i0$  можно пренебречь дисперсией расстройки  $\Omega - \Omega_k$ . При этом  $\alpha_{\pm}$  совпадает с выражением (IV.2.2), так как в нерезонансной ситуации

$$\operatorname{Re} \vec{\ell} \sum_k \frac{\omega_k e^{i\psi_k}}{\Omega - \Omega_k} = \vec{n}(\vec{p}, \vec{z}) - \vec{n}_s(\theta).$$

Формулы (IV.3.8) обобщают (IV.2.2) на ситуации, когда при стохастических блужданиях расстройки возможны прохождения резонансов. Члены с производными  $\frac{\partial}{\partial t}$  учитывают возмущение оси квантования  $\vec{n}$  вне области резонанса, где частица, ввиду большого разброса  $\Omega - \Omega_k$ , пребывает основную долю времени. Член с  $\delta$  — функцией описывает деполаризующее воздействие многократных некоррелированных прохождений резонанса (см. III.7.6).

Формулы для  $\alpha_{\pm}$  количественно описывают спиновую кинетику в накопителях со сложной геометрией поля и позволяют выбрать оптимальные условия для обеспечения радиационной поляризации.

#### § 4. Примеры

##### а) 0 точности исполнения магнитной системы в накопителях традиционного типа

При идеальном исполнении магнитной системы за исключением точек спиновых резонансов степень поляризации будет стремиться к 92% со скоростью релаксации ( $\dot{d} = 0$ ):

$$\lambda = \alpha_+ = \frac{5\sqrt{3}}{8} \hbar q_0^5 \gamma^5 \langle |\dot{v}|^3 \rangle = \frac{9}{11} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta\gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{IV.4.1})$$

Сравнительно небольшие отклонения магнитной системы при высоких энергиях могут приводить к деполаризующим процессам, сравнимым с поляризующими. Если возмущающие поля связаны с систематическими погрешностями, необходимо параметры накопителя выбирать так, чтобы частота прецессии спинов находилась на достаточном удалении от спектральных частот этих возмущений. Ограничения на амплитуду случайных возмущений определяют необходимую точность исполнения магнитной системы накопителя.

Условие существования поляризации со степенью выше 50% запишется в виде:

$$\tau_d^{-1} \leq \lambda = \frac{9}{11} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{(\delta\gamma)^2}{\gamma^2} \right\rangle. \quad (\text{IV.4.2})$$

При наличии случайных радиальных полей с помощью формулы (III.5.9) в оптимальной точке по  $\nu_0$  ( $|\sin \pi \nu_0| = 1$ ) условие (IV.4.2) перепишется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^Q \overline{h_n^2} \eta_n^2 |F_{[\nu_0]}^n|^2 \leq \frac{54}{11\pi^4}. \quad (\text{IV.4.3})$$

Это ограничение имеет вероятный смысл. Оно позволяет определить необходимую точность изготовления и установки элементов магнитной системы. Например, для допустимого вертикального сдвига квадрупольных линз  $\Delta Z_L$  и угла установки основных магнитов

получаем с помощью формул (Ш.5.10) и (Ш.5.11) для накопителей со сглаженной фокусировкой при  $\nu = \nu_0 \gg \nu_z$ :

$$\sqrt{(\Delta z_L)^2} \leq \sqrt{\frac{54}{11}} \frac{R}{J_1^2} \frac{\sqrt{Q_L}}{\nu^2 \nu_z^2}, \quad \sqrt{\alpha_M^2} \leq \sqrt{\frac{54}{11}} \frac{\sqrt{Q_M}}{J_1^2 \nu^2}. \quad (\text{IV.4.4})$$

Аналогично с помощью формулы (Ш.6.6) можно найти допустимую величину параметра  $g$  связи  $\tilde{z} - x$  движения.

Эти оценки справедливы в области энергий, пока мал разброс частот прецессии

$$\sigma_\nu = \langle |\Delta \nu| \rangle = \nu \langle \left| \frac{\Delta \mathcal{H}}{\mathcal{H}} \right| \rangle \ll 1.$$

В накопителях на сверхвысокие энергии вполне реальной может быть ситуация (например, для накопителя LEP в районе 80 ТэВ), когда разброс частот прецессий превышает расстояния между резонансами ( $\sigma_\nu \gtrsim 1$ ). В этом случае основное деполяризующее действие квантовых флуктуаций синхротронного излучения связано с прохождением спиновых резонансов.

Наиболее просто скорость деполяризации вычисляется для случая, когда последовательные прохождения резонансов при синхротронных колебаниях энергии полностью некоррелированы:

$$\nu^2 \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{H}}{\mathcal{H}^2} \right)^2 \right\rangle \gg \nu_{\mathcal{H}}^3, \quad \text{либо} \quad \Delta \nu_{\mathcal{H}} \gg \nu_{\mathcal{H}}^2 / \sigma_\nu.$$

С помощью формулы (Ш.8.9) получаем следующее условие существования радиационной поляризации:

$$\pi |\omega_k|^2 = \pi \nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \overline{h_n^2} \eta_n^2 / |F_{[\nu]}^n|^2 \leq \lambda. \quad (\text{IV.4.5})$$

Например, требования на угол  $\alpha_M$  и сдвиг  $\Delta z_L$  становятся следующими (при  $\nu \gg \nu_z$ ):

$$\sqrt{\alpha_M^2} \leq \frac{\sqrt{\lambda Q_M}}{\sqrt{J_1} \nu}, \quad \sqrt{\Delta z_L^2} \leq R \frac{\sqrt{\lambda Q_L}}{\sqrt{J_1} \nu \nu_z^2}.$$

Интересно проследить, как изменяются ограничения на точность выполнения магнитных систем с ростом максимальной энергии накопителей. Для высоких энергий основные требования предъявляются к допускам на  $\Delta Z_L$  и  $\alpha_M$ . Примем следующие характерные зависимости от максимальной энергии параметров накопителей традиционного типа:

$$R \sim \gamma^2, \quad \nu_2 \sim \gamma, \quad Q \sim R \sim \gamma^2, \quad \nu_f \sim \sqrt{\gamma}, \quad \sigma_y \sim \gamma, \quad \lambda \sim \gamma.$$

( $Q$  — полное число независимых элементов с учетом субструктуры периода системы,  $\lambda$  — скорость релаксации в единицах частоты обращения).

При повышении энергии допуски  $(\Delta Z_L)_{\text{доп.}}$  и  $(\alpha_M)_{\text{доп.}}$  становятся жестче при  $\sigma_y \ll 1$ :  $(\Delta Z_L, \alpha_M) \sim \gamma^{-1}$ .

В области энергии, когда определяющим становится резонансный механизм диффузии, требования к точности выполнения магнитной системы начинают ослабевать для накопителей с большей максимальной энергией

$$(\Delta Z_L, \alpha_M)_{\text{доп.}} \sim \sqrt{\gamma}, \quad \text{при } \sigma_y \gtrsim 1.$$

При изменении энергии в заданном накопителе, получаем, что для энергий, пока разброс  $\sigma_y$  мал, требования на  $\Delta Z_L$  и  $\alpha_M$  возрастают с энергией следующим образом:

$$(\Delta Z_L, \alpha_M)_{\text{доп.}} \sim \begin{cases} \gamma^{-4} & \text{при } \nu \ll \nu_2 \\ \gamma^{-2} & \text{при } \nu > \nu_2 \end{cases}$$

При достаточно большой энергии включается резонансный механизм диффузии. Требования на  $\Delta Z_L$  и  $\alpha_M$  изменяются как  $1/\sqrt{\gamma}$  при  $\nu \ll \nu_2$  и как  $\gamma^{3/2}$  при  $\nu > \nu_2$ .

Проследим, как изменяются допустимые отклонения в области устойчивости радиационной поляризации для встречных пучков. Отношение скорости деполяризации (см. Гл. III § 9) к скорости поляризации  $(\tau_d \lambda)^{-1}$  при фиксированном сдвиге бетатронных частот  $(\Delta \nu_2)_0$

уменьшается с ростом максимальной энергии в накопителях:

$$\frac{1}{\tau_d \lambda} \sim \begin{cases} \gamma^{-1} & \text{при } \sigma_\nu \lesssim (\Delta \nu_z)_0 \\ \gamma^{-2} & \text{при } \sigma_\nu \gg (\Delta \nu_z)_0 \end{cases}$$

В заданном накопителе условие сохранения поляризации изменяется следующим образом:

если  $\sigma_\nu \lesssim (\Delta \nu_z)_0$  :

$$\frac{1}{\tau_d \lambda} \sim \begin{cases} \gamma^3 & \text{при } \nu \ll \nu_z \\ \gamma^{-1} & \text{при } \nu \gtrsim \nu_z \end{cases},$$

если  $1 \gg \sigma_\nu \gg (\Delta \nu_z)_0$

$$\frac{1}{\tau_d \lambda} \sim \begin{cases} \gamma & \text{при } \nu \ll \nu_z \\ \gamma^{-3} & \text{при } \nu \gtrsim \nu_z \end{cases}$$

При очень высоких энергиях (таких, что  $\sigma_\nu \gtrsim 1$ ) эффектами деполаризации встречного пучка, практически, можно пренебречь по сравнению с эффектами "несовершенства" магнитной системы.

#### б) Идеальный накопитель с введенными в промежуток радиальными полями

При отсутствии квадруполей в промежутке со вставкой функция спин-орбитальной связи отлична от нуля лишь в этом промежутке и определяется формулой (Ш.4.6).

В частности, для круглого накопителя и сглаженной фокусировки имеем

$$\vec{d}(0 \div \theta_0) = \frac{\nu_z^{2c}}{\nu_z^2 - \nu_0^2} \varphi_\theta (\cos \varphi_\theta \vec{e}_y - \sin \varphi_\theta \vec{e}_z).$$

Нетрудно вычислить степень и время радиационной поляризации по формулам (IV.2.2) и (IV.2.3). Например, степень  $\zeta$  для вставки, изображенной на Рис.1б, равна

$$\zeta = \frac{8}{5\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{3\pi}{\nu_0} \frac{\chi_x^2}{\chi_z^2} \left[ 1 + \frac{11\pi^2}{72} \frac{\nu_z^4}{(\nu_z^2 - \nu_0^2)^2} \right] \right\}^{-1}.$$

Высокая степень радиационной поляризации в этом примере возможна, если излучением на участке вставки можно пренебречь. Так как вклад в мощность излучения пропорционален  $|K|^3$ , условие малости вклада участков с радиальным полем запишется в виде:

$$\frac{|K_x|^3 \theta_0}{\langle |K_z|^3 \rangle 2\pi} \approx \frac{3\pi}{\nu_0} \frac{K_x^2}{K_z^2} \approx \left(\frac{3\pi}{\nu_0}\right)^3 \frac{1}{K_z^2 \theta_0^2} \ll 1.$$

Это условие можно переписать, как условие на минимально возможную длину вставки  $\ell$  :

$$\ell \gg R (3\pi/\nu_0)^{3/2}. \quad (\text{IV.4.6})$$

При использовании в промежутке квадруполей, необходимых для получения высокой светимости встречных пучков, можно также получить высокую степень радиационной поляризации. Для этого достаточно выполнить условия зануления  $\vec{d}$ -функции и условие малости излучения в промежутке (IV.4.6).

Дополнительную возможность открывает новый механизм поляризации, позволяющий использовать для поляризации и излучение на участке вставки. Исследование формулы (IV.2.3) на максимум на участке с радиальным полем (где направление  $\vec{n}_s$  поперечно полю) показывает, что при оптимальном значении  $\vec{d}$ , на участке с максимальной величиной радиального поля, равным

$$\vec{d} = \vec{e}_x \sqrt{\frac{18}{11} \left(1 - \frac{2}{9} n_v^2\right)},$$

степень  $\beta_{t \rightarrow \infty}$  будет не меньше величины (в ситуации, когда вклад излучения участка с радиальным полем является основным)

$$\beta \geq \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{3}{\sqrt{22}} / \sqrt{1 - \frac{2}{9} n_v^2} > 0.59.$$

## § 5. Магнитные змейки

Полезным для ускорения поляризации оказывается введение "змеек", т.е. участков с сильным знакопеременным полем. Так как

скорость поляризации пропорциональна кубу величины магнитного поля, змейка, помещенная в относительно небольшой участок накопителя существенно уменьшает время поляризации.

В простейшем варианте это три участка <sup>ж)</sup> с длинами  $\theta_-$ ,  $\theta_+$ ,  $\theta_-$ , и полями на них  $H_-$ ,  $H_+$ ,  $H_-$  с равными нулю средним значением и направленными вдоль  $\vec{n}_s$  ( $\vec{n}_s \vec{v} = 0$ ):

$$2H_- \theta_- + H_+ \theta_+ = 0.$$

Нулевое среднее значение поля и симметрия относительно среднего участка обеспечивает сохранение траектории частиц вне области змейки.

При достаточно больших полях, когда поляризация будет определяться лишь излучением в змейке, степень поляризации будет стремиться к величине

$$\zeta = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{H_+^2 - H_-^2}{H_+^2 + H_-^2}, \quad (\text{IV.5.1})$$

если змейка введена в месте, где  $\vec{d} = 0$ . Для получения высокой степени поляризации необходимо выполнить условие  $H_+^2 \gg H_-^2$ .

В накопителе с всюду вертикальной поляризацией ( $\vec{d} = 0$ ) скорость поляризации становится равной:

$$\lambda_w = \lambda \left[ 1 + \frac{H_+^3 \theta_+ + 2 |H_-|^3 \theta_-}{2\pi \langle H_z^3 \rangle} \right], \quad (\text{IV.5.2})$$

где  $H_z$  — величина магнитного поля на поворотных участках накопителя.

Обозначим за  $A + 1 = \lambda_w / \lambda$  — число, в которое необходимо уменьшить время поляризации и за

$$\varepsilon_w + 1 = \frac{H_+^2 \theta_+ + 2 H_-^2 \theta_-}{2\pi \langle H_z^2 \rangle} + 1 \quad (\text{IV.5.3})$$

---

ж) При необходимости уменьшить отклонение орбиты в области змейки, число участков должно быть увеличено.



число, в которое возрастут радиационные потери частиц за оборот в накопителе. Тогда из (IV.5.2) и (IV.5.3) получаем, что требуемые поля в змейке и их длина находятся из соотношения (при  $|H_+| \gg |H_-|$ ):

$$H_+ \approx \frac{A}{\varepsilon_w} \frac{\langle H_z^3 \rangle}{\langle H_z^2 \rangle}, \quad \frac{\theta_+}{2\pi} = \frac{\varepsilon_w^3}{A^2} \frac{\langle H_z^2 \rangle^3}{\langle H_z^3 \rangle^2}. \quad (\text{IV.5.4})$$

Введение змейки приводит к увеличению энергетического разброса  $\Delta \varepsilon$  пучка в

$$\frac{\Delta \varepsilon_w}{\Delta \varepsilon} = \sqrt{\frac{1+A}{1+\varepsilon_w}} \quad (\text{IV.5.5})$$

раз. Увеличение энергетического разброса пучка может привести к увеличению размеров пучка в местах встреч (где  $\psi$  — функция предполагается достаточно малой). Если такое увеличение размеров не желательно, необходимо выполнить следующие требования. Во-первых, следует уменьшить в  $\sqrt{(1+A)/(1+\varepsilon_w)}$  раз скачок бетатронной амплитуды на входе в область змейки:

$$\left| \gamma \frac{\partial c_x}{\partial \gamma} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^0 \mathcal{H}_z f_x d\theta \right| \lesssim \frac{1}{\nu_b^{3/2}} \sqrt{\frac{1+\varepsilon_w}{1+A}}, \quad (\text{IV.5.6})$$

где  $\nu_b$  — приведенная частота бетатронных колебаний. Во-вторых, чтобы оставался достаточно малым и скачок амплитуды, возбуждаемый прямо змейкой, необходимо выполнить условие <sup>ж)</sup>

$$\frac{\varepsilon_w^2}{A} \sqrt{\frac{1+A}{1+\varepsilon_w}} \lesssim \frac{1}{\nu_b} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \quad (\text{IV.5.7})$$

Отметим еще одно важное обстоятельство. Змейка может повысить степень равновесной поляризации в накопителе. Как видим из общей формулы (IV.2.3) для этого функцию  $\vec{d}$  необходимо уменьшить только в местах змейки. Вектор  $\vec{d}$  в заданном месте орбиты задается двумя параметрами. Поэтому введение в двух участках орби-

---

ж) Выполнение условия (IV.5.7) при увеличении числа  $Q_w$  осциллирующих поля в змейке облегчается примерно в  $Q_w$  раз.

ты дополнительных полей (или во многих участках, рассредоточенных по орбите в соответствии с частотой прецессии) позволяет скомпенсировать функцию спин-орбитальной связи в центре змейки. При высоких энергиях основные деполаризующие эффекты связаны с искажением замкнутой орбиты, поэтому зануление  $\vec{d}$ -функции в центре змейки достаточно для ее зануления в области всей змейки.

Поле магнитной змейки необязательно должно быть направлено вдоль равновесной поляризации  $\vec{n}_s$ . Как уже отмечалось, высокую степень радиационной поляризации можно получить при любом угле между  $\vec{n}_s$  и  $[\vec{v}\vec{v}]$ .

### § 6. Сибирские змейки

В накопителях традиционного типа в районе десятков и более ГэВ для устранения деполаризующего влияния квантовых флуктуаций синхротронного излучения необходимо выполнить довольно серьезные требования на точность выполнения магнитных систем. Из-за зависимости частоты прецессии от энергии наибольшую опасность представляют радиальные магнитные поля, появляющиеся, например, при случайных вертикальных смещениях фокусирующих линз или при случайных наклонах магнитов с вертикальным полем.

Можно предложить способ подавления деполаризующих эффектов, основанный на использовании сибирских змеек. Равновесная поляризация при использовании одной змейки лежит в плоскости орбиты на основном участке. При этом полностью включается деполаризующий фактор диффузии угла  $\vec{n}$  со скоростью. В накопителе с примерно одинаковым вертикальным полем вдоль орбиты величина

$$\langle \mathcal{K}_z^2 \vec{d}^2 \rangle / \langle \mathcal{K}_z^2 \rangle \approx \langle \vec{d}^2 \rangle \simeq \nu_0^2 \pi^2 / 3 \gg 1$$

очень велика и степень радиационной поляризации становится малой.

Можно ввести достаточно большое поле (магнитную змейку) вблизи промежутка I (см. Рис.2), в области которого величина  $\vec{d} = 0$ .

При этом сильно повышается мощность поляризующих процессов. Однако, при высоких значениях  $\nu_0$  введение магнитной змейки сильно увеличивает энергетический разброс пучка либо мощность ВЧ-поля ( $\Delta \mathcal{E} \sim \nu_0 / \sqrt{\mathcal{E}_w}$ ).

Более универсальный способ подавления деполяризации заключается в использовании четного числа сибирских змеек, оставляющего направление равновесной поляризации вдоль поля на основных участках накопителя.

Изменяющие знак вертикальной проекции спина участки расположим так, чтобы углы поворота спина вокруг поля на основных участках взаимно компенсировались (для двух участков они должны быть противоположными, для 4-х расположены через четверть длины орбиты и т.д.). Тогда эффективная частота прецессии  $\nu$  будет определяться лишь участками с дополнительными полями и не будет зависеть от энергии. Для того, чтобы частота  $\nu$  не резонировала с частотой обращения, результирующие оси вращения спина в промежутках (лежащие в плоскости орбиты) не должны быть одинаковыми на всех участках. Например  $\nu = 1/2$ , если на одном участке использовать конфигурацию полей, вращающую спин вокруг скорости (рис.3), а на остальных участках ввести поля, вращающие спин вокруг радиального направления (рис.4).

При симметричном выполнении накопителя поляризующее действие основного поля будет отсутствовать из-за переориентации спина. Однако поляризация может быть обеспечена магнитными змейками и лазером (см. Гл.У). Роль магнитной змейки могут выполнять, в частности, переворачивающие спин участки. Деполяризующие же эффекты будут сильно подавлены. Для накопителя с 2М сибирскими змейками формула для случайных возмущений (III.5.9) переходит в следующую:

$$(\tau_d^{-1})_{2M} = \lambda \frac{11\pi^4}{54 \ln^2 \pi \nu} \frac{\nu_0^4}{M^2} \sum_{n=1}^Q \bar{h}_n^2 \eta_n^2 |F_{[\nu_0]}^n|^2. \quad (\text{IV.6.I})$$

Здесь  $\lambda = \frac{g}{11} \frac{d}{dt} \frac{(\delta\gamma)^2}{\gamma^2}$  — декремент поляризации с учетом излучения на участках змеек. Так как обобщенная частота прецессии  $\nu$ , благодаря эффекту переворотов спина, не зависит от энергии, то эта формула, в отличие от (III.5.9) остается справедливой далеко в области  $\sigma_\gamma = \nu_0 \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \gg 1$ . Условие ее применимости практически всегда очень хорошо выполнено:

$$\nu_0^2 \lambda \ll M \omega_s.$$

( $\omega_s$  — частота обращения частиц в накопителе).

Уже для двух змеек полностью устраняется резонансная диффузия спинов, которая довольно значительна при  $\sigma_\gamma \gtrsim 1$ , устраняется также резонансная зависимость степени поляризации от энергии. При  $2M$  переворотах удастся, по крайней мере, в  $M^2$  раз уменьшить влияние и нерезонансных деполяризующих факторов и, соответственно, в  $M$  раз ослабить требования к точности выполнения магнитной системы накопителя. Этот способ повышения устойчивости спина можно сравнить с использованием жесткой фокусировки вместо мягкой для бетатронных колебаний частиц.

Г Л А В А УПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ЦИРКУЛЯРНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫМ  
ИЗЛУЧЕНИЕМ

В настоящее время единственный реализованный способ получения поляризованных электронов и позитронов в накопителях основан на использовании поляризующего действия синхротронного излучения. Эффективность этого способа определяется энергией частицы и величиной магнитного поля накопителя ( $\tau_p^{-1} \sim \gamma^2 H^3$ ).

К сожалению, рост с энергией радиационных потерь вынуждает уменьшать величину ведущего поля накопителя. По этой причине в существующих и проектируемых накопителях, несмотря на большую величину энергии, время поляризации составляет часы даже на максимальной энергии накопителя. Поэтому актуальным остается поиск способов быстрого получения поляризованных пучков.

В этой главе рассматриваются возможности поляризации электронов встречной циркулярно-поляризованной электромагнитной волной. Спиновая зависимость излучения в поле волны характеризуется параметром жесткости

$$\chi = 2 \gamma \hbar \omega / m,$$

где  $\omega$  — частота встречной волны. В квазиклассическом случае ( $\chi \ll 1$ ) этот параметр равен отношению энергии излучаемых квантов  $\simeq \gamma^2 \hbar \omega$  к энергии электрона. При  $\chi \gg 1$  излучаемый квант уносит почти всю энергию электрона. Соответственно, могут применяться два различных способа поляризации встречными фотонами: путем многократного рассеяния без потерь частиц в области

$$\chi \ll (\Delta \mathcal{E})_{\text{гон.}} / \mathcal{E},$$

где  $(\Delta \mathcal{E})_{\text{гон.}} / \mathcal{E}$  — энергетическая апертура накопителя, либо преимущественным выбиванием частиц одной из спиральностей в результате однократных рассеяний при  $\chi \gtrsim 1$ .

К важному свойству поляризации встречным излучением следует отнести возможность приготавливать встречные пучки с любой комбинацией направлений спинов.

### § I. Поляризация мягкими фотонами

Квазиклассический характер излучения при  $\chi \ll 1$  позволяет для вычисления равновесной степени и скорости поляризации воспользоваться общими формулами (IV.1.8), в которых к полю накопителя нужно добавить падающую волну как заданное внешнее поле. В полях накопителя естественной является ситуация, когда длина формирования излучения значительно меньше характерного периода изменения поля вдоль траектории, т.е., когда условие (IV.2.1) считается выполненным. Здесь мы имеем обратную ситуацию быстро-переменного электромагнитного поля на орбите частицы, когда частота встречной волны удовлетворяет соотношению

$$\omega \gg q_0 H_w \quad (V.1.1)$$

где  $H_w$  — магнитное поле волны.

В работах /101,102/ рассматривалась задача о поляризации электронов в статическом винтовом магнитном поле (ондуляторе). Теоретически действие ондулятора на ультрарелятивистские электроны эквивалентно действию встречной электромагнитной волны. В этих работах не удалось найти способа поляризации частиц, так как в них не имелись в виду эффекты спин-орбитальной связи, которые в рассматриваемом способе принципиальны.

Пусть на прямолинейном участке накопителя на длине, занимающей долю орбиты  $\ell/L$ , электроны движутся в поле  $H_w$  встречной волны. Вычисления по формуле (IV.1.8) в случае большой частоты волны приводят к следующему результату ( $\gamma \gg 1$ ):

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -\frac{2}{3} \vec{v} \vec{d} / \left( 1 - \frac{2}{5} (\vec{n} \vec{v})^2 + \frac{7}{10} \vec{d}^2 \right), \\ \alpha_+ &= \frac{16}{3} \frac{1}{\hbar} q_0^4 \omega \gamma^2 H_w^2 (\ell/L) \left[ 1 - \frac{2}{5} (\vec{n} \vec{v})^2 + \frac{7}{10} \vec{d}^2 \right], \end{aligned} \quad (V.1.2)$$

где  $\xi_2$  — степень циркулярной поляризации волны, которая, в частности, равна  $\pm 1$  для право- и лево-поляризованной волны. Эта формула справедлива, если эффект поляризации волной является определяющим:

$$10\omega H_w^2 \ell / L \gg q_0 \langle |H_z^3| \rangle. \quad (У.1.3)$$

Аналогичные коэффициенты  $\alpha_{\pm}$ , вычисленные для винтового магнитного поля (ондулятора) имеют этот же вид (У.1.2) с заменой  $\omega H_w^2 \rightarrow \omega_{\text{онд.}} H_{\text{онд.}}^2 / 8$ .

Исследование формулы для  $\xi$  показывает, что в оптимальном случае степень равновесной поляризации для циркулярно-поляризованной волны достигает значения

$$\xi_{\text{max}} = \sqrt{5/14} \simeq 0.60.$$

Эта степень достигается в ситуации, когда направление равновесной поляризации в области взаимодействия поперечно скорости ( $\vec{n} \vec{v} = 0$ ), а градиент равен

$$\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma} = \sqrt{\frac{10}{7}} \frac{\vec{v}}{v}.$$

Скорость поляризации при этом равна

$$\tau_w^{-1} = \alpha_+ = \frac{32}{3} \hbar q_0^4 \omega \gamma^2 H_w^2 \ell / L.$$

## § 2. Обсуждение результатов

Как видим, поляризация  $\xi = \alpha_- / \alpha_+$  полностью обязана функции спин-орбитальной связи  $\vec{d}$ . При  $\vec{d} = 0$  степень равновесной поляризации равна нулю. Это обстоятельство связано с тем, что вероятности переворота спина при рассеянии фотонов на ультрарелятивистских электронах оказываются одинаковыми [102]. Изменение же энергии зависит от начальной поляризации:

$$\delta \mathcal{E} = \vec{v} \vec{f} \ell = -\frac{8}{3} q_0^2 \gamma^2 H_w^2 \ell + \frac{32}{3} m q_0^4 \xi_2 \omega \gamma^3 H_w^2 \ell (\vec{S} \vec{v}). \quad (У.1.4)$$

При дальнейшем движении в неоднородном поле накопителя эта разница в энергии приводит к различию в ориентации спинов к следующему обороту, т.е. к возникновению поляризации. С учетом многократности прохождения участка взаимодействия изменение поляризации должно быть усреднено по фазам вращения спина вокруг  $\vec{n}$  (ср. с (IY.2.4)):

$$\overline{\delta S_n} = (\vec{d} \cdot \vec{S}) \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{16}{3} \zeta_2 q_0^4 \omega \gamma^2 H_w^2 (\vec{v} \vec{d}) \frac{\ell}{L} S_{\perp}^2,$$

откуда величина  $\alpha_-$  равна

$$\alpha_- = -\frac{16}{3} \frac{1}{\hbar} q_0^4 \zeta_2 \omega \gamma^2 H_w^2 (\ell/L) \vec{v} \vec{d}, \quad (\text{Y.I.5})$$

в соответствии с формулами (Y.I.2).

Коэффициенты  $\alpha_{\pm}$  можно получить и другим способом, используя известные выражения для дифференциального сечения комптоновского рассеяния. При этом, чтобы учесть влияние спин-орбитальной связи в поле накопителя, необходимо использовать инвариантную величину – вероятность переворота спина относительно оси квантования  $\vec{n}(\vec{p}, \vec{z})$ , изменяющейся в акте рассеяния.

Сечение комптоновского рассеяния электрона на встречной волне, просуммированное по поляризациям конечного состояния фотона, может быть записано как функция ориентации спина электрона до и после рассеяния  $\vec{\zeta}$  и  $\vec{\zeta}'$  и изменения импульса  $\delta \vec{p}$ :

$$d\sigma = d\sigma(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}', \delta \vec{p}).$$

Вероятности переворотов  $P_{\uparrow\downarrow}$  и  $P_{\downarrow\uparrow}$  относительно подвижного направления  $\vec{n}$ , определяющие коэффициенты  $\alpha_{\pm} = P_{\uparrow\downarrow} \pm P_{\downarrow\uparrow}$  можно найти из формул:

$$\begin{aligned} P_{\uparrow\downarrow} &= \dot{N}_{\phi} \int d\sigma(\vec{n}, -\vec{n}', \delta \vec{p}), \\ P_{\downarrow\uparrow} &= \dot{N}_{\phi} \int d\sigma(-\vec{n}, \vec{n}', \delta \vec{p}), \end{aligned} \quad (\text{Y.I.6})$$



в которых плотность потока фотонов обозначена за  $\dot{N}_\phi =$   
 $= H_w^2 (4\pi\hbar\omega)^{-1}$ , а  $\vec{n}' = \vec{n} + \delta\vec{n}$  определяется выражением:

$$\vec{n}' = \vec{n}(\vec{p} + \delta\vec{p}, \vec{z}) \simeq \vec{n}(\vec{p}, \vec{z}) + (\delta\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \vec{n} - \frac{1}{2} \left[ (\delta\vec{p} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) \vec{n} \right]^2 \vec{n} + \dots$$

Здесь использовано соотношение ( $\vec{n}^2 = 1$ ):

$$\vec{n} \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = - \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_\beta}$$

Так как электроны в поле волны излучают в основном вперед в угле порядка  $\gamma^{-1}$ , то степень поляризации и характерное время ее установления значительно сильнее зависят от градиента  $\vec{n}$  по импульсу в продольном направлении (от  $\partial \vec{n} / \partial \gamma$ ), чем от градиентов  $\vec{n}$  в поперечном направлении. Если пренебречь градиентами  $\vec{n}$  в поперечном направлении, то из формул (У.І.6) можно получить выписанные коэффициенты  $\alpha_\pm$  (У.І.2) и (У.І.5).

Вероятности переворотов  $P_{\uparrow\downarrow}^s$ ,  $P_{\downarrow\uparrow}^s$ , описывающие прямое действие излучения на спин, через сечение комптоновского рассеяния можно получить, полагая в формулах (У.І.6)  $\vec{n} = \vec{n}'$ :

$$P_{\uparrow\downarrow}^s = \dot{N}_\phi \int d\sigma(\vec{n}, -\vec{n}, \delta\vec{p}), \quad (У.І.7)$$

$$P_{\downarrow\uparrow}^s = \dot{N}_\phi \int d\sigma(-\vec{n}, \vec{n}, \delta\vec{p}).$$

В ультрарелятивистском пределе эти вероятности оказываются равными и прямое действие излучения, таким образом, является деполаризующим /102/.

Коэффициент  $\alpha_-$  учитывает воздействие на ось прецессии изменение импульса частицы. Радиационная сила трения вычисляется через комптоновское сечение очевидным образом

$$\hat{\vec{f}} = \dot{N}_\phi \int \delta\vec{p} d\sigma(\vec{S}, \vec{S}, \delta\vec{p}).$$

Сила  $\hat{\vec{f}}$  как функция спина  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\zeta}$  не содержит постоянной Планка и может быть получена в классической теории излучения для частицы с магнитным моментом и спином. Соответствующее изменение

энергии (У.І.4) равно  $\delta \mathcal{E} = \hat{f} \vec{v} \ell$ .

Квантовые флуктуации излучения в поле волны приводят к диффузионному изменению поляризации, которое описывается членом в  $\mathcal{L}_+$ , пропорциональным  $(\partial \vec{n} / \partial \gamma)^2$ . Скорость диффузии энергии можно вычислить с помощью выражения для томсоновского сечения фотона  $d\sigma_T$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{(\delta \mathcal{E})^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{\dot{N}_\phi}{\mathcal{E}^2} \int (\delta \mathcal{E})^2 d\sigma_T = \frac{112}{15} \hbar q_0^4 \omega \gamma^2 H_w^2. \quad (\text{У.І.8})$$

Подчеркнем, что вероятности переворотов (У.І.7), описывающие прямое действие на спин, не являются релятивистски инвариантными из-за томасовского поворота при изменении импульса в результате рассеяния. Так, например, вычисления, сделанные прямо в сопровождающей системе, дают для степени равновесной поляризации  $\zeta$  значение  $5/8$  /101/, вместо малого значения для ультрарелятивистской частицы /102/. Расчет в сопровождающей системе фактически предполагает равенство нулю градиента  $\vec{n}_c$  в этой системе. Действительно, если направления  $\vec{n}$  и  $\vec{n}_c$  совпадают перед рассеянием, то после рассеяния они будут отличаться томасовским поворотом. В линейном по  $\delta \vec{p}$  приближении имеем:

$$\vec{n}'_c = \vec{n}' + \frac{\gamma - 1}{m \gamma v^2} [ [\vec{v} \delta \vec{p}] \vec{n} ]$$

Отсюда легко получить связь градиентов оси прецессии в сопровождающей и лабораторной системах ( $\gamma \gg 1$ ):

$$\left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_1} \right)_c = \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_1} + \frac{1}{m} [ [\vec{v} \vec{e}_1] \vec{n} ], \quad (\text{У.І.9})$$

$$m \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial p_{||}} \right)_c = \gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma}.$$

Поэтому равенство нулю градиента  $\vec{n}_c$  в сопровождающей системе означает, что соответствующие градиенты  $\vec{n}$  в лабораторной системе, как следует из (У.І.9), должны быть равными (при  $\vec{n} = \vec{v}/v$ ):

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial p_1} = -\frac{1}{m} \vec{e}_1, \quad \gamma \partial \vec{n} / \partial \gamma = 0, \quad (\text{У.1.10})$$

т.е. для получения степени равновесной поляризации 5/8 нужно создать релятивистски большое значение градиента в поперечном направлении <sup>ж)</sup> ( $|p \partial \vec{n} / \partial p_1| \sim \gamma$ ).

Инвариантной величиной, используемой в данной работе, является проекция спина на какое-либо направление в пространстве, удовлетворяющее уравнению движения спина во внешнем поле. На участке взаимодействия с волной (где поле накопителя отсутствует) таким направлением может быть любой вектор, неподвижный в системе покоя электрона, в частности, вектор  $\vec{n}(\vec{p}, \vec{z})$ , выделяемый условиями движения в накопителе (поперечная к  $\vec{n}$  поляризация исчезает из-за разброса частот прецессий спина в пучке).

### § 3. О возможностях поляризации мягкими фотонами

Сформулируем основные требования, предъявляемые к источнику волны. Для процесса поляризации важны три характеристики встречной электромагнитной волны: частота  $\omega$ , квадрат поля  $H_w^2$ , определяющие время поляризации, и степень циркулярной поляризации волны  $\zeta_2$ , определяющая степень равновесной поляризации пучка. Никаких требований на пространственную когерентность не налагается ( $q_0 H_w \ll \omega$ ). Не вызывает затруднений обобщение формул (У.1.2) на случай немонахроматического излучения, поскольку волны с разными частотами вносят независимые вклады в коэффициенты  $\alpha_{\pm}$ .

Нужно подчеркнуть, что в рассматриваемом методе ускорения поляризации достигается не за счет увеличения интенсивности вне-

<sup>ж)</sup> Формулу (У.1.2) для значений (У.1.10) применять нельзя, так как при ее получении использовано практически естественное предположение, что  $|p \partial \vec{n} / \partial p_1| \ll \gamma$ . Полная формула для  $\alpha_{\pm}$ , учитывающая поперечные градиенты  $\vec{n}$ , имеется в работе /53/.

шнего поля, а за счет жесткости излучения. Поэтому потери частицами энергии на излучение в волне значительно меньше соответствующих потерь при поляризации магнитными змейками (примерно в  $9_0 H_w / 10 \omega$  раз).

Подвергая электроны в накопителе воздействию электромагнитной волны, необходимо позаботиться о том, чтобы время жизни пучка было больше, чем время поляризации. Это налагает на амплитуду и частоту волны два ограничения. Во-первых, частота волны должна быть достаточно малой, чтобы не приводить к выбиванию электронов при однократном рассеянии:  $4 \gamma^2 \hbar \omega < (\Delta \mathcal{E})_{\text{дон.}}$ . Во-вторых, многократное рассеяние приводит к диффузии энергии частиц в накопителе <sup>ж)</sup> и, следовательно, к увеличению энергетического разброса. Между временем поляризации  $\tau_w$  и коэффициентом диффузии энергии в волне существует простое соотношение. Например, организуя в накопителе оптимальное значение  $|\gamma \partial \vec{n} / \partial \gamma| = \sqrt{10/7}$  имеем

$$\tau_w^{-1} = \frac{10}{7} \frac{d}{dt} \frac{(\delta \gamma)^2}{\gamma^2}.$$

С помощью аналогичного соотношения (IУ.4.1) при поляризации синхротронным излучением получаем, что уменьшение времени поляризации в  $A + 1$  раз приводит к возрастанию энергетического разброса в

$$\frac{(\Delta \mathcal{E})_w}{(\Delta \mathcal{E})_0} = \sqrt{1 + \frac{63}{110} A}$$

раз. Например, уменьшение времени поляризации встречной волной в 10 раз приведет к увеличению энергетического разброса в 2,5 раза. Это увеличение энергетического разброса не позволяет уменьшать время поляризации беспрестельно из-за апертурных ограничений (размером камеры накопителя, энергетической апертурой).

<sup>ж)</sup> Кроме квантовой отдачи при излучении поле волны может оказывать прямое стохастическое воздействие на частицы из-за неадиабатичности изменения амплитуды поля и некоррелированности его фазы от оборота к обороту в накопителе. Однако, в практических ситуациях этот эффект пренебрежимо мал.

В качестве источника циркулярно-поляризованной волны можно использовать лазер. Свойства лазерного излучения позволяют сфокусировать его до размеров электронного пучка и тем самым значительно увеличить интенсивность светового поля, действующего на частицы. Работа в импульсном режиме с привязкой по фазе к электронному пучку в накопителе позволяет дополнительно увеличить интенсивность излучения в  $L/\ell$  раз (при той же средней мощности).

Кроме того, можно повысить эффективность использования источника, если сделать время между импульсами порядка нескольких времен радиационного затухания пучка в накопителе. В этом случае каждый последующий импульс света попадает в уже затухший пучок с размерами, определяемыми только квантовыми флуктуациями синхротронного излучения. Отметим, что в случае, когда энергия вторичных квантов  $\hbar \omega$  не намного меньше энергетической апертуры  $(\Delta \mathcal{E})_{\text{gen.}}$ , потеря энергии частицей за время взаимодействия с импульсом света лишь незначительно превышает возникающий за это же время энергетический разброс. Поэтому появление среднего энергетического отклонения за время взаимодействия со светом практически не снижает эффективности рассмотренного приема.

#### § 4. Поляризация жесткими фотонами

Увеличение энергетических размеров пучка в способе поляризации мягкими фотонами не позволяет неограниченно уменьшать время поляризации путем повышения интенсивности встречной волны. Свободен от этого ограничения метод, основанный на преимущественном выбивании частиц одной из спиральностей встречными квантами большой жесткости ( $\chi \gtrsim 1$ ). В этой области сечение комптоновского рассеяния при циркулярной поляризации падающих фотонов имеет сильную зависимость от спиральности начального электрона:

$$\sigma_+ + \sigma_- \approx 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1}{\chi} \ln(1+2\chi) - \frac{2(1+\chi)}{\chi^3} \ln(1+2\chi) + \frac{4}{\chi^2} + \frac{2(1+\chi)}{(1+2\chi)^2} \right\},$$

$$\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow} = \pm 2\pi \chi_e^2 \left\{ \frac{1+\chi}{\chi^2} \ln(1+2\chi) - 2 \frac{1+4\chi+5\chi^2}{\chi(1+2\chi)^2} \right\},$$

где  $\sigma_{\uparrow}$  и  $\sigma_{\downarrow}$  — полные сечения рассеяния (выбивания из пучка) электронов, соответственно, с положительной и отрицательной спиральностью, знаки (+) и (−) относятся, соответственно, к право- и лево-поляризованным фотонам.

Видим, что при увеличении жесткости фотонов рассеяние электронов со спиральностью, противоположной спиральности фотона, становится все более преобладающим:

$$\frac{\sigma_{\uparrow}}{\sigma_{\downarrow}} \rightarrow \frac{2}{3} \ln \chi$$

Если обеспечить повторяемость продольной поляризации в накопителе (направление равновесной поляризации  $\vec{n}_s$  в области взаимодействия должно быть продольным), то из-за преимущественной гибели частиц со спиральностью, противоположной спиральности фотонов, оставшийся пучок становится поляризованным.

Время, в течение которого достигается степень поляризации  $\zeta$ , определяется, как нетрудно убедиться, формулой

$$\tau = \frac{1}{N_0 \zeta_2} |\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}|^{-1} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

При этом доля частиц, оставшихся в накопителе, равна

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{1+\zeta} \left( \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right)^{\alpha}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \left| \frac{\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow}}{\zeta_2 (\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow})} \right| - \frac{1}{2}.$$

В частности, при очень большой частоте фотонов ( $\chi \rightarrow \infty$ ) можно получить степень поляризации, близкую к единице ценой потери лишь половины пучка. Время поляризации возрастает пропорционально  $\chi / \ln \chi$ .

Обратим внимание, что степень циркулярной поляризации фотонов не ограничивает максимально достижимую степень поляризации частиц в пучке. Уменьшение степени поляризации фотонов приводит

лишь к увеличению времени поляризации и уменьшению доли оставшихся частиц. Отметим также, что выбором знака спиральности фотонов, можно получать любой знак спиральности частиц пучка.

Применение методов поляризации встречными фотонами требует достаточно мощных источников циркулярно-поляризованного излучения в субмиллиметровом диапазоне при поляризации мягкими фотонами и в области вакуумного ультрафиолета при поляризации жесткими фотонами. В избранных ситуациях достаточно эффективными могут быть обычные лазеры на веществе. Большие возможности в перспективе могут дать так называемые лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), основанные на генерации когерентного излучения в периодическом магнитном поле (ондуляторе). Важным свойством таких приборов является возможность свободного выбора частоты излучения, которая определяется энергией электронов и параметрами ондулятора. Особенно перспективными представляются безрезонаторные системы, создание которых целиком базируется на ускорительной технике.

Приведем численные примеры /103/.

В проекте накопителя LEP (ЦЕРН) при энергии электронов 50 ГэВ время радиационной поляризации составляет около 5 часов.

Применив способ поляризации встречным излучением, можно получать существенно меньшие времена. В методе мягких фотонов, используя ЛСЭ-генератор на прямом электронном пучке можно получить пиковую мощность излучения  $0,5 \cdot 10^8$  Вт на длине волны  $10^{-2}$  см при частоте следования импульсов излучения  $10^4$  сек $^{-1}$  (длина импульсов  $\approx 3$  см) Такое излучение позволяет поляризовать 50 ГэВ-ные электроны за 50 минут при условии оптимальной фокусировки излучения.

Для поляризации методом выбивания требуются интенсивные пучки фотонов большой жесткости. Такие пучки можно получать ЛСЭ-генерацией на ультрарелятивистских электронных (позитронных) пучках, формируемых в накопителях. Этой цели могут служить либо специаль-

но создаваемые накопители (на энергии порядка 1 ГэВ), либо накапливаемые непосредственно для экспериментов встречные пучки так, чтобы излучение от проходящего через ондулятор одного пучка поляризовало встречный. Например, можно предложить последний способ для накопителя LEP на энергии инжекции 20 ГэВ. Устанавливая ондуляторы вблизи места встречи можно получить когерентное излучение на длине волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  см с пиковой мощностью  $10^{12}$  Вт (при скважности  $10^9$  и длине сгустка 3 см). Время поляризации до степени  $\gamma = 50\%$  будет равно 100 сек. Доля оставшихся частиц составит 30%. Интенсивность поляризованного пучка может быть повышена, если поляризацию вести в режиме накопления.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория движения спинов частиц, являющаяся основным итогом представляемых работ, позволяет проектировать ускорители и накопители с поляризованными пучками, предсказывать поведение поляризации в полях любой конфигурации. Проведенные исследования открыли широкие возможности управлять направлением и степенью поляризации пучка прямо в накопителях или ускорителях при проведении экспериментов по физике высоких энергий. Стало возможным рассчитывать характеристики радиационной кинетики поляризации электронов и позитронов в любом накопителе.

Разработанная теория позволила выявить дополнительный механизм радиационной поляризации, обусловленный спин-орбитальной связью.

Результаты исследования деполаризующего влияния встречного пучка позволили выбирать оптимальный режим работы в накопителях со встречными поляризованными пучками.

В рамках развитой теории содержится метод ускорения поляризованных пучков до высоких энергий с помощью змеек. Теория применяется также для исследования лазерной поляризации.

Сегодня можно назвать примеры использования полученных результатов. Одним из них является метод прецизионного измерения энергии пучка в накопителях с помощью специального деполаризатора. Эта методика позволила получить на накопителях ИЯФ СО АН самую высокую точность измерения масс многих мезонов. Проведено сравнение аномальных магнитных моментов с точностью  $10^{-5}$ , что было на два порядка выше точности остальных экспериментов по измерению магнитного момента позитрона.

Основываясь на результатах исследования, изложенных в диссертации, в ИЯФ СО АН СССР (Новосибирск) разработан проект получения продольно-поляризованных электрон-позитронных встречных пучков на

накопителе ВЭП-4, который принят к реализации. Рассмотренные возможности использования сибирских эмеек актуальны для накопителей LEP, HERA, TRISTAN.

Планируется использование эмеек для ускорения поляризованных протонов в ускорителе У-70 (ИФВЭ, Протвино). Аналогичные предложения рассматриваются в проектах ISABELLE и FNAL.

Кратко сформулируем основные результаты исследований, представленные к защите:

1. Развита общая теория движения спинов частиц в накопителях и циклических ускорителях с изменяющимися по направлению и величине электромагнитными полями. Доказаны существование и устойчивость периодического направления поляризации.

2. Даны схемы получения продольно-поляризованных пучков в накопителях.

3. Предложен метод ускорения поляризованных частиц до высоких энергий.

4. Теоретически обоснован способ резонансной деполяризации пучка в накопителях.

5. Исследовано деполяризующее действие источников стохастизации орбитального движения.

6. Получена формула для вычисления скорости деполяризации в области спиновых резонансов.

7. Изучена деполяризация встречным пучком в накопителях.

8. На основе квазиклассического гамильтониана построена теория радиационной поляризации электронов и позитронов в накопителях, позволяющая единым образом описывать поляризующие и деполяризующие процессы синхротронного излучения.

9. Обнаружен новый механизм радиационной поляризации, объясняемый спин-орбитальной связью.

10. Предложены и обоснованы методы поляризации пучка лазерным излучением.

II. Предложен способ повышения устойчивости радиационно-поляризованных электронов (позитронов) в накопителях сибирскими змейками.

Считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность Я.С.Дербеневу и А.Н.Скринскому за плодотворное сотрудничество, большую помощь и советы. Искреннее спасибо С.Т.Беляеву, который напутствовал меня заниматься физикой поляризованных пучков. Я благодарен Е.Л.Салдину, вместе с которым проделана работа по лазерной поляризации. Выражаю признательность Г.М.Тумайкину, Ю.М.Шатунову и всем соавторам за сотрудничество и плодотворные обсуждения. Благодарю за полезные дискуссии и интерес к работам В.Н.Байера, В.М.Каткова, В.М.Страховенко, И.Б.Хрипловича и всех участников семинаров теоретического отдела и I-й лаборатории Института.

П Р И Л О Ж Е Н И Е А

Можно представить общий характер динамического движения спина в стационарных условиях движения частиц в накопителях без конкретизации возмущающих полей вблизи равновесной орбиты.

Известно орбитальное движение частиц. Пусть  $I_o^\lambda(\vec{P}, \vec{z})$  и  $\psi_o^\lambda(\vec{P}, \vec{z})$  — переменные действий и фаз орбитального движения, найденные в пренебрежении спиновой степенью свободы ( $\dot{I}_o^\lambda = 0$ ,  $\dot{\psi}_o^\lambda = \text{const}$ ). Частота прецессии спина  $\vec{\Omega}(\vec{P}, \vec{z})$ , записанная как функция действий и фаз орбитального движения, является периодической функцией фаз  $\psi_o^\lambda$ :

$$\vec{\Omega}(I_o^\lambda, \psi_o^\lambda) = \vec{\Omega}(I_o^\lambda, \psi_o^\lambda + 2\pi).$$

При движении по равновесной траектории  $\vec{\Omega}$  становится периодической функцией азимута частицы.

Аналогично случаю однопериодической зависимости (рассмотренному в § 2 I главы) естественно предположить, что и на неравновесной траектории существует решение  $\vec{n}$  с периодической зависимостью от фаз  $\psi_o^\lambda$ :

$$\vec{n}(I_o^\lambda, \psi_o^\lambda) = \vec{n}(I_o^\lambda, \psi_o^\lambda + 2\pi). \quad (\text{A.I})$$

Докажем это предположение.

Пусть  $\vec{\xi}_\alpha(\vec{P}, \vec{z}, t)$  — какие-либо три ортонормированных вектора, удовлетворяющих на траектории  $\vec{P}(t)$ ,  $\vec{z}(t)$ , не возмущенной спин-орбитальной связью, уравнению (I.I.2):

$$\dot{\vec{\xi}}_\alpha = [\vec{\Omega} \vec{\xi}_\alpha]. \quad (\text{A.2})$$

Ортонормированность на траектории сохраняется в силу очевидного свойства решений (A.2)  $\frac{d}{dt} \vec{\xi}_\alpha \vec{\xi}_{\alpha'} = 0$ . Гамильтониан в переменных  $I_o^\lambda$ ,  $\psi_o^\lambda$ ,  $\vec{S}$  имеет вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o(I_o^\lambda) + \vec{\Omega}(I_o^\lambda, \psi_o^\lambda) \vec{S}.$$

Решая гамильтоновы уравнения для  $I_o^\lambda, \psi_o^\lambda$

$$\dot{I}_o^\lambda = \{\mathcal{H}, I_o^\lambda\} = \{\vec{\Omega}, I_o^\lambda\} \vec{S} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{\xi}_\alpha \{\vec{\xi}_\alpha, I_o^\lambda\}],$$

$$\dot{\psi}_o^\lambda = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_o^\lambda} = \Omega^\lambda(I_o^\lambda) + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial I_o^\lambda} \vec{S}$$

по теории возмущений находим поправленные канонические переменные действия и фаз орбитального движения:

$$I^\lambda = I_o^\lambda - \frac{1}{2} \vec{S} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{\xi}_\alpha \{\vec{\xi}_\alpha, I_o^\lambda\}], \quad (\text{A.3})$$

$$\psi^\lambda = \psi_o^\lambda - \frac{1}{2} \vec{S} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{\xi}_\alpha \{\vec{\xi}_\alpha, \psi_o^\lambda\}].$$

Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\{I^\lambda, I^{\lambda'}\} = \{\psi^\lambda, \psi^{\lambda'}\} = 0, \quad \{I^\lambda, \psi^{\lambda'}\} = \delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\{\mathcal{H}, I^\lambda\} = -\partial I^\lambda / \partial t = 0.$$

Формулы (A.3) легко обобщаются на произвольную функцию от  $I_o^\lambda, \psi_o^\lambda$  (от  $\vec{p}, \vec{z}$ ). В частности, для координаты частицы как функции времени получаем следующее выражение:

$$z^\beta(t) = z_o^\beta(I^\lambda, \psi^\lambda) + \frac{1}{2} \vec{S} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{\xi}_\alpha \frac{\partial \vec{\xi}_\alpha}{\partial p_\beta}],$$

где  $\vec{z}_o(I^\lambda, \psi^\lambda)$  соответствует движению по средней траектории, поправка учитывает спиновую модуляцию.

Благодаря консервативности системы <sup>ж)</sup> легко теперь найти спиновые переменные действия и фазы. С помощью (A.3) гамильтониан можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o(I^\lambda) + \vec{\nu} \vec{S}, \quad \vec{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 [\vec{\xi}_\alpha \frac{\partial \vec{\xi}_\alpha}{\partial t}] \quad (\text{A.4})$$

Вектор  $\vec{\nu}$ , а значит и его направление

$$\vec{n} = \vec{\nu} / \nu$$

очевидно удовлетворяют уравнению (A.2). Так как  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \frac{\partial I^\lambda}{\partial t} = 0$ ,

ж) При включении высокочастотного поля, необходимого для компенсации радиационных потерь, весь формализм остается без изменения, если добавить к переменным ( $\vec{p}, \vec{z}$ ) фазу ВЧ поля.

то  $\vec{n}$  является функцией лишь  $\vec{p}$ ,  $\vec{z}$  и явно от времени не зависит, а величина  $\nu$  может зависеть лишь от  $I^\lambda$  и имеет смысл частоты прецессии спина вокруг  $\vec{n}$ .

Нетрудно найти другие два ортогональные к  $\vec{n}$  (и между собой) решения (А.2)  $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$  ( $\vec{\eta} \vec{n} = 0$ ,  $\vec{n} \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} = 0$ ):

$$\vec{\eta}(\vec{p}, \vec{z}, t) = \vec{\eta}_1 + i\vec{\eta}_2 = [\vec{L}_1(\vec{p}, \vec{z}) + i\vec{L}_2(\vec{p}, \vec{z})] e^{-i\nu t} \equiv \vec{L} e^{-i\nu t}.$$

В базисе ( $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{n}$ ) общее решение для спина  $\vec{S}$  имеет вид:

$$\vec{S}(t) = S_n \vec{n} + \text{Re}(S_\perp \vec{L} e^{-i\nu t}) = S_n \vec{n} + \sqrt{S^2 - S_n^2} \text{Re} \vec{L} e^{-i\psi},$$

$$S_n = \vec{S} \vec{n} = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \nu.$$

Таким образом, проекция  $\vec{S} \vec{n}(\vec{p}, \vec{z})$  и фаза  $\psi$  прецессии спина вокруг  $\vec{n}$  (отсчитанная от  $\vec{L}_1$ ) являются спиновыми переменными действия и фазы; направление  $\vec{n}$  играет роль оси квантования. В стационарных состояниях  $I^\lambda$  и  $S_n$  — квантовые числа (формула (А.4) при этом определяет энергию).

Для частота прецессии спина  $\nu$  можно получить следующее выражение (ср. с (I.2.7)):

$$\nu = \vec{\Omega} \vec{n} - \dot{\vec{L}}_1 \vec{L}_2.$$

Вектор  $\vec{n}$ , так же, как и в случае однопериодической зависимости, становится неопределенным лишь в резонансных точках

$\nu = m_\lambda \nu^\lambda$ , когда  $\nu$  совпадает с целочисленной комбинацией из частот орбитального движения  $\nu^\lambda = \partial \mathcal{H} / \partial I^\lambda$ . Покажем, что при  $\nu \neq m_\lambda \nu^\lambda$  решение  $\vec{n}$  единственно, т.е. не зависит от выбора  $\vec{z}_\alpha$ . Пусть  $\vec{n}_1$  — вектор полученный в базисе  $\vec{z}'_\alpha \neq \vec{z}_\alpha$ :

$$\nu_1 \vec{n}_1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \vec{z}'_\alpha \frac{\partial \vec{z}'_\alpha}{\partial t} \right].$$

Тогда для  $G = \vec{\eta} \vec{n}_1$  получаем уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\nu G, \quad \frac{\partial G}{\partial t} \equiv \dot{G} - \nu^\lambda \frac{\partial G}{\partial \psi^\lambda} = -\nu^\lambda \frac{\partial G}{\partial \psi^\lambda}.$$

Поскольку  $C$  должно быть периодической функцией постоянных фаз  $\psi_0^\lambda - \nu^\lambda t$ , то при  $\nu \neq m_\lambda \nu^\lambda$  последнее уравнение имеет единственное решение  $C = 0$ , т.е.  $\vec{n} = \vec{n}_1$ . При  $\nu = m_\lambda \nu^\lambda$  любое решение не зависит явно от времени.

В случае движения в постоянном электромагнитном поле

$$\vec{n} = \vec{H}_c / H_c$$

где  $\vec{H}_c$  — магнитное поле в системе покоя частицы.

На равновесной траектории, очевидно,  $\vec{n} = \vec{n}_s(\theta)$ ,  $\vec{L} = \vec{\ell}(\theta)$ . Чувствительность  $\vec{n}$  к параметрам траектории существенно зависит от близости к спиновым резонансам.

# П Р И Л О Ж Е Н И Е Б

Для нахождения фазы  $\varphi$  при условиях (П.І.ІЗ) достаточно решить уравнения для  $\chi$  при постоянных  $\varepsilon'$  и  $w$ . Эти уравнения

$$\chi'_+ = -\frac{i}{2} \varepsilon' \theta \chi_+ - \frac{i}{2} w \chi_- ,$$

$$\chi'_- = \frac{i}{2} \varepsilon' \theta \chi_- - \frac{i}{2} w \chi_+ .$$

представляют собой функциональные соотношения для функций параболического цилиндра  $D_p(z)$  /104/.

Решение имеет вид ( $\varepsilon' > 0$ ):

$$\chi(\theta) = \begin{pmatrix} D_p(z) & , & D_p(-z) \\ a e^{i\frac{\pi}{4}} D_{p-1}(z) & , & -a e^{-i\frac{\pi}{4}} D_{p-1}(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv M(\theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} .$$

Здесь  $a = w/\sqrt{\varepsilon'}$ ,  $p = -i \frac{w^2}{4\varepsilon'}$ ,  $z = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\varepsilon'} \theta$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$  - постоянные, определяемые начальными условиями.

Для нахождения  $\chi_{\theta_2} \chi_{\theta_1}^{-1}$  необходимо матрицу  $M(\theta_2) M^{-1}(\theta_1)$  ( $\theta_2 > 0$ ,  $\theta_1 < 0$ ) преобразовать в систему, связанную с направлением  $\vec{\omega}$ , что осуществляется поворотом вокруг оси "y" на угол, равный  $\arctg(w/\varepsilon)$ :

$$\chi_{\theta_2} \chi_{\theta_1}^{-1} = U = \exp\left(\frac{i}{2} \gamma_y \arctg \frac{w}{\varepsilon(\theta_2)}\right) M(\theta_2) M^{-1}(\theta_1) \exp\left(-\frac{i}{2} \gamma_y \arctg \frac{w}{\varepsilon(\theta_1)}\right) .$$

Матрица  $U$  должна совпадать с матрицей (П.І.І9)  $\mathcal{P}_{\theta_2 0} R \mathcal{P}_{0 \theta_1}$ . Для нахождения постоянной фазы  $\varphi$  достаточно сравнить в пределе  $|\theta_1| \rightarrow \infty$ ,  $\theta_2 \rightarrow \infty$  матричный элемент  $U_{11}$  с соответствующим элементом матрицы  $\mathcal{P}_{\theta_2 0} R \mathcal{P}_{0 \theta_1}$ . Предельные выражения функции параболического цилиндра известны при условии /104/:

$$|z| \gg \max(1, |p|) ,$$

$$|\varepsilon| \gg \max(\sqrt{\varepsilon'}, w^2/\sqrt{\varepsilon'}) .$$



При этом для  $\varphi$  получаем выражение (П.І.І8), применимое в более широкой адиабатической зоне, где  $\omega \gg \sqrt{\varepsilon'}$ .

Как следует из всего изложенного для того, чтобы матрица  $R$  имела вид (П.І.І6) с  $\varphi$  из (П.І.І8), необходимо постоянство  $\varepsilon'$  и  $\omega$  лишь в эффективной зоне, где  $\omega \lesssim \max(\omega, \sqrt{\varepsilon'})$ .

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L.H.Thomas. The motion of the spinning electron. Nature, 1926, v. 117, p. 514.
2. L.H.Thomas. The kinematics of an electron with an axis. Philosophical Magazine, 1927, v. 3, seventh serie, p.p. 1-22.
3. M.L.Marshak. Experiments on spin dependence at very high energy. Proc. Intern. Conf. High Energy Polarized Proton Beams. Ann Arbor, 1977, p.p. 118-131.
4. G.Bunce, R.Handler, R.March, P.Martin, L.Pondrom, M.Sheaff, K.Heller, O.Overseth, P.Skubic, T.Devlin, B.Edelman, R.Edwards, J.Norem, L.Schachinger and P.Yamin.  $\Lambda^0$  hyperon polarization in inclusive production by 300 GeV protons on beryllium. Physical Review Letters, 1976, v. 36, No. 19, p.p. 1113-1116.
5. J.Antille, L.Dick, L.Madansky, D.Perret-Gallix M.Werlin, A.Gonidec, K.Kuroda and P.Kyberd. Spin dependence of the inclusive reaction  $p + p$  (polarized)  $\rightarrow \pi^0 + X$  at 24 GeV/c for high -  $p_T \pi^0$  produced in the central region. Physics Letters, 1980, v. 94B, No. 4, p.p. 523-526.
6. Б.П.Адьясевич, С.Т.Беляев, Е.К.Завойский, Ю.П.Полунин. Источники поляризованных ядер для ускорителей. Труды Всесоюзной конференции "Ядерные реакции при малых и средних энергиях". Изд. АН СССР, Москва, 1958, стр.87-92.
7. Ю.А.Плис, Л.М.Сороко. Современное состояние физики и техники получения пучков поляризованных частиц. УФН, 1972, № 2, т.107, стр.281-319.
8. A.A.Belushkina, V.P.Ershov, V.V.Fimushkin, G.I.Gaj, L.S.Kotova, Yu.K.Pelipenko, V.V.Smelyansky, A.Sulik, G.P.Tsvinera and A.I.Valevich. Cryogenic source and ionizer for a beam of polarized deuterons. Proc. Intern. Conf. High-Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets. Lausanne, 1981, p.p. 429-431.

9. А.Н.Зеленский, С.А.Кохановский. Разработка источника поляризованных ионов  $H^-$  высокой интенсивности с перезарядкой протонов на оптически ориентированных атомах натрия. Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий, "Спин в физике высоких энергий". Дубна, 1982, стр.234-237. О возможности поляризации ускоренных протонов лазерным излучением. Там же, стр.238-240.
10. В.Г.Шамовский, Ю.М.Шатунов. О возможности получения перезарядным методом интенсивного пучка поляризованных по ядерному спину отрицательных ионов водорода. Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1978), Дубна, 1979, т.2, стр.102-104.
11. Н.Б.Делоне, М.В.Федоров. Поляризация фотоэлектронов, образующихся при ионизации неполяризованных атомов. УФН, 1979, т.127, № 4, стр.651-681.
12. D.T.Pierce, R.J.Celotta, G.G.Wang, W.N.Unertl, A.Galejs, C.E.Kuyatt and S.R.Mielczarek. GaAs spin polarized electron source. Review of Scientific Instruments, 1980, v. 51, No. 4, p.p. 478-499.
13. C.K.Sinclair. High intensity polarized electron sources. Proc. Intern. Symp. High-Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets. Lausanne, 1981, p.p. 27-33.
14. V.Bargmann, L.Michel, V.L.Telegdi. Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field. Physical Review Letters, 1959, v. 2, No. 10, p.p.435-436.

15. M.Froissart, R.Stora. Depolarisation d'un faisceau de protons polarises dans un synchrotron. Nuclear Instruments and Methods, 1960, v. 7, No. 3, p.p. 297-305.
16. Ю.А.Плис, Л.М.Сороко. Деполяризация протонов в циклотронах. Труды Международной конференции по ускорителям. (Дубна, 1963), М., Атомиздат, 1964, стр.912-914.
17. П.Р.Зенкевич. Резонансная деполяризация пучка в протонных синхротронах ИТЭФ. Там же, стр.919-920.
18. Х.А.Симонян. Ускорение поляризованных частиц в циклических ускорителях. Там же, стр.915-918.
19. Х.А.Симонян. Изменение поляризации пучка частиц в циклических ускорителях. Труды УП Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. (Ереван, 1969), Ереван, изд. АН СССР, 1970, т.2, стр.253-264.
20. T.Khoe, R.L.Kustom, R.L.Martin, E.F.Parker, C.W.Potts, L.G.Ratner, R.E.Timm, A.D.Krisch, J.B.Roberts and J.R. O'Fallon. Acceleration of polarized protons to 8.5 GeV/c. Particle Accelerators, 1975, v. 6, p.p. 213-236.
21. А.А.Соколов, И.М.Тернов. О поляризационных и спиновых эффектах в теории синхротронного излучения. ДАН СССР, 1963, т.153, № 5, стр.1052-1054.
22. В.Н.Байер, Ю.Ф.Орлов. Квантовая деполяризация электронов в магнитном поле.<sup>А</sup> ДАН СССР, 1965, т.165, № 4, стр.783-785.
23. И.М.Тернов, В.Г.Багров, Р.А.Рзаев. Влияние синхротронного излучения электронов на состояние ориентации их спина. Вестник МГУ, серия III (физика, астрономия), 1964, № 4, стр.62-70.
24. В.Н.Байер, В.М.Катков. О радиационной поляризации электронов в магнитном поле. ЯФ, 1966, т.3, стр.81-88.

25. В.Н.Байер, В.М.Катков. Радиационная поляризация электронов в магнитном поле. ЖЭТФ, 1967, т.52, № 5, стр.1422-1426.
26. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. Кинетика радиационной поляризации. ЖЭТФ, 1970, т.58, № 5, стр.1695-1702.
27. В.Н.Байер. Радиационная поляризация электронов в накопителях. УФН, 1971, т.105, № 3, стр.441-478.
28. R.L.Martin. Polarized proton acceleration at the zero gradient synchrotron. Proc. of the X International Conference on High Energy Accelerators. Protvino, 1977, v. II, p.p. 64-69.
29. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. О движении спина частиц в накопителе с произвольным полем. ДАН СССР, 1970, т.192, № 6, стр.1255-1258.
30. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. Динамика поляризации частиц вблизи спиновых резонансов. ЖЭТФ, 1971, т.60, № 4, стр.1216-1227.
31. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Диффузия спинов частиц в накопителях. ЖЭТФ, 1972, т.62, № 2, стр.430-443.
32. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Кинетика поляризации частиц в накопителях. ЖЭТФ, 1973, т.64, № 6, стр.1918-1929.
33. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Релаксация и равновесное состояние поляризации электронов в накопителях. ДАН СССР, 1974, № 217, № 2, стр.311-314.
34. А.М.Кондратенко. Устойчивость поляризации встречных пучков. ЖЭТФ, 1974, т.66, № 4, стр.1211-1218.
35. А.М.Кондратенко. Динамика спинов частиц в накопителях. Кандидатская диссертация. ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1974, стр.1-138.
36. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Ускорение поляризованных частиц. ДАН СССР, 1975, т.223, № 4, стр.830-833.

37. А.Д.Букин, Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, Л.М.Курдадзе, С.И.Середняков, В.А.Сидоров, А.Н.Скринский, Г.М.Тумайкин, Ю.М.Шатунов. Метод абсолютной калибровки энергии пучков в накопителе. Измерение массы  $\phi$ -мезона. Труды У Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц, Варшава, 1975, стр.138-162.
38. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. О получении пучков с нужной поляризацией в накопителях и ускорителях. Препринт ИЯФ СО АН СССР 76-62, 1976, Новосибирск, стр.1-14.
39. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Получение продольно-поляризованных электронов и позитронов с помощью нового механизма радиационной поляризации. Труды У Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. (Дубна, 1976), М., изд."Наука", 1977, стр.263-265.
40. Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko, S.I.Serednyakov, A.N.Skrinsky, G.M.Tumaikin and Yu.M.Shatunov. Radiative polarization: obtaining, control, using. Particle Accelerators, 1978, v. 8, No. 2, p.p. 115-126.
41. Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko, S.I.Serednyakov, A.N.Skrinsky, G.M.Tumaikin and Yu.M.Shatunov. Accurate calibration of the beam energy in a storage ring based on measurement of spin precession frequency of polarized particles. Particle Accelerators, 1980, v. 10, No. 3, p.p. 177-180.
42. Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko and A.N.Skrinsky. Radiative polarization at ultra-high energies. Particle Accelerators, 1979, v. 9, No. 4, p.p. 247-265.
43. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, С.И.Середняков, А.Н.Скринский, Г.М.Тумайкин, Ю.М.Шатунов. Поляризованные частицы в накопителях. Труды X Международной конференции по ускорителям. Серпухов, 1977, т.2, стр.55-63.

44. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Ускорение поляризованных частиц в синхротронах до высоких энергий. Труды X Международной конференции по ускорителям. Серпухов, 1977, т.2, стр.70-75.
45. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский, Ю.М.Шатунов. Сохранение поляризации электронов при пересечении спиновых резонансов в накопителях. Труды X Международной конференции по ускорителям. Серпухов, 1977, т.2, стр.76-80.
46. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. О возможностях получения поляризованных частиц высокой энергии в ускорителях и накопителях. Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. (Дубна, 1978), Дубна, 1979, т.2, стр.239-246; Труды Международной конференции по физике высоких энергий с поляризованными пучками и поляризованными мишенями. Аргонна (США), 1978, стр.292-306.
47. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Подавление деполяризации электронов и позитронов высоких энергий в накопителях. ДАН СССР, 1979, т.246, № 2, стр.301-304.
48. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Возможности ускорения поляризованных протонов. Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий, "Спин в физике высоких энергий". Дубна, 1982, стр.281-190.
49. Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко. Возможности ускорения поляризованных протонов в тэватронах. УШ Всесоюзное совещание по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982; Препринт ИЯФ СО АН СССР 82-126, 1982, Новосибирск, стр.1-9.
50. А.М.Kondratenko. Radiative polarization in storage rings. Preprint INP 82-28, 1982, Novosibirsk, p.p. 1-36.
51. А.М.Kondratenko. Energy spread, snakes, rotators and wigglers, Resume of the Workshop "Polarized electron acceleration and storage". Hamburg, DESY, 1982, p.p. L1-L3.

52. A.M.Kondratenko, B.W.Montague. Polarized beams in LEP.  
CERN-ISR-TH/80-38, LEP Note 255, Geneva, 1980, p.p. 1-16.
53. Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko, E.L.Saldin. Polarization of electrons in storage ring by circularly-polarized electromagnetic wave. Nuclear Instruments and Methods, 1979, v. 165, No. 2, p.p. 201-208; Preprint INP 78-64, 1978, Novosibirsk. p.p. 1-20.
54. Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko, E.L.Saldin. Polarization of the electron beam in a storage ring by hard circularly-polarized photons. Nuclear Instruments and Methods, 1979, v.165, No.1, pp.15-19; Preprint INP 78-68, 1978, Novosibirsk, p.p 1-16.
55. J.R. O'Fallon, L.G.Ratner, P.F.Schultz, K.Abe, R.C.Fernow, A.D.Krisch, T.A.Mulera, A.J.Salthouse, B.Sandler, K.M.Terwilliger, D.G.Grabb and P.H.Hansen. Spin-spin interactions in high- Elastic p-p Scattering. Physical Review Letters, 1977, v. 39, No. 12, p.p. 733-736.
56. Л.М.Курдадзе, С.И.Середняков, В.А.Сидоров, А.Н.Скринский, Г.М.Тумайкин, Ю.М.Шатунов. Радиационная поляризация пучков в накопителе ВЭПП-2М. Труды У Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц, Варшава, 1975, стр.148-162.
57. С.И.Середняков, А.Н.Скринский, Г.М.Тумайкин, Ю.М.Шатунов. Изучение радиационной поляризации пучков в накопителе ВЭПП-2М. ЖЭТФ, 1976, т.71, № 6, стр.2025-2032.
58. A.A.Zholentz et al. High precision measurement of the  $\psi$  and  $\psi'$ -meson masses. Physics Letters, 1980, v. 96B, No. 2, p.p. 214-216.
59. A.S.Artamonov et al. High precision measurement of the  $\gamma$  meson mass. Preprint INP 82-94, 1982, Novosibirsk, p.p. 1-16.



60. J. Le Duff, P.C.Marin, J.L.Masnou, M.Sommer. Measurement of beam polarization in the Orsay colliding beam ring ACO. Труды III Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. (Москва, 1972), Москва, изд."Наука", 1973, т.I, стр.371-377.
61. U.Camerini, D.Cline, J.Learned, A.K.Mann, L.K.Resvanis, Measurement of the radiative electron polarization in a 2.4 - GeV storage ring. Physical Review, 1975, v. 12D, No. 7, p.p. 1855-1858.
62. R.Rossmannith. Results from the polarization measurements in PETRA and future perspectives. Proc. Intern. Symp. High-Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Lausanne, 1980, p.p. 52-59.
63. J.G.Learned, L.K.Resvanis, G.M.Spencer. Polarization of colliding  $e^+e^-$  beams at SPEAR II. Physical Review Letters, 1975, v. 35, No. 25, p.p. 1688-1690.
64. А.Н.Скринский. Ускорительные и детекторные перспективы физики элементарных частиц, УФН, 1982, т.I38, № I, стр.3-43.
65. S.I.Serednyakov, V.A.Sidorov, A.N.Skrinsky, G.M.Tumaikin and Yu.M.Shatunov. High accuracy comparison of the electron and positron magnetic moments. Physics Letters, 1977, v. 66B, No. 1, p.p. 102-104.
66. G.Hanson et al. Evidence for jet structure in hadron production by  $e^+e^-$  annihilation. Physical Review Letters, 1975, v. 35, No. 24, p.p. 1609-1612.
67. A.N.Skrinsky. Longitudinally polarized colliding beams. Proc. Intern. Conf. on Instrumentation for Colliding Beam Physics, Stanford, SLAC-Report 250, 1982, p.p. 230-240.

68. M.Bell, P.Germain, W.Hardt, W.Kubischta, P.Lefevre, D.Möhl.  
The feasibility of accelerating polarized protons in the  
CERN-PS and other strong focusing machines. Proc. Intern.  
Conf. High Energy Physics with Polarized Beams and Targets,  
Argonne, 1976, p.p. 405-412.
69. S.Hiramatsu and K.Muto. Acceleration of polarized protons  
in KEK PS. Proc. Intern. Symp. High-Energy Physics with Po-  
larized Beams and Polarized Targets, Lausanne, 1980,  
p.p. 475-477.
70. E.D.Courant and R.D.Ruth. The possibility of polarized  
beams at the AGS. Proc. Intern. Conf. High Energy Physics  
with Polarized Beams and Polarized Targets, Argonne, 1978,  
p.p. 307-317.
71. Y.Y.Lee. Acceleration of polarized proton at the AGS. Proc.  
Intern. Symp. High-Energy Physics with Polarized Beams and  
Polarized Targets, Lausanne, 1980, p.p. 110-113.
72. E.D.Courant. Polarized Protons for ISABELLE, *ibid*, 1980,  
p.p. 102-109.
73. L.Teng. Acceleration, Accumulation and storage of polarized  
ion beams, *ibid*, 1980, p.p. 92-101.
74. Ю.М.Адо, В.И.Балбеков, А.С.Белов, А.Н.Васильев, С.С.Герштейн,  
Я.С.Дербенёв, А.Н.Зеленский, А.М.Кондратенко, В.М.Мохов,  
Э.А.Мяэ, А.А.Наумов, В.В.Нижегородцев, С.Б.Нурушев, Л.Б.Пар-  
фенов, Ю.К.Пелипенко, Ю.А.Плис, Р.А.Рзаев, В.П.Сахаров,  
Е.Ф.Троянов, Б.В.Чуйко. Возможность ускорения поляризованных  
протонов в ускорителе ИФВЭ. Препринт ИФВЭ 82-54, ОКУ/ОП,  
1982, Серпухов, стр. I-23.
75. Design study of a 22 to 130 GeV  $e^+e^-$  colliding beam machine  
(LEP). CERN/ISR-LEP-33, 1979, Geneva, p.p. 37-38.

76. K.Steffen. Design of HERA . VIII Всесоюзное совещание по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1982.
77. С.А.Никитин, Е.Л.Салдин. О возможности получения продольной поляризации частиц в накопителе ВЭПП-4. Препринт ИЯФ СО АН СССР 81-19, 1981, Новосибирск, стр.1-39.
78. С.А.Никитин, Е.Л.Салдин, М.В.Юрков. Анализ вариантов получения продольно-поляризованных встречных пучков на накопителе ВЭПП-4. Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий, "Спин в физике высоких энергий", Дубна, 1982, стр.291-301.
79. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. "Релятивистская квантовая теория", 1968, часть I, изд. "Наука", Москва, § 41.
80. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Квантовая механика", 1963, изд. физ.-мат.литературы, Москва, § 113.
81. B.W.Montague. Elementary spinor algebra for polarized beams in storage rings. Particle Accelerators, v. 11, No. 4, p.219-231.
82. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. "Теория циклических ускорителей", 1962, изд. физ.-мат. литературы, Москва.
83. В.А.Якубович, В.М.Старжинский. "Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами", 1972, Изд. "Наука", Москва.
84. A.W.Chao. Problems in obtaining polarized  $e^+$  and  $e^-$  beams and perspectives for PEP. Proc. Intern. Symp. High-Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets. Lausanne, 1981, p.p. 15-26.
85. N.Christ, F.J.M.Farley, H.G.Hereward. On the feasibility of colliding beam experiments with longitudinally polarized electrons. Nuclear Instruments and methods, 1974, v. 115, No. 1, p.p. 227-231.

86. B.W.Montague. Longitudinal polarization of high-energy electrons in colliding-beam storage rings. CERN/ISR/76-2, 1976, Geneva, p.p. 1-8.
87. B.W.Montague. Polarized  $e^{\pm}$  beams in LEP. Proc. Intern. Conf. High-Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets, Argonne, 1978, p.p. 129-137.
88. B.W.Montague. Spin rotation for LEP. CERN/ISR-TH/80-39 (LEP Note 256), 1980, Geneva, p.p. 1-11.
89. K.Stefen. A new double siberian snake scheme with radiative polarization for LEP.
90. X.A.Симонян, Ю.Ф.Орлов. Аномальный резонансный переворот спина частицы в магнитном поле. ЖЭТФ, т.45, № 2, стр.173-176.
91. А.Д.Букин, Л.М.Курдадзе, С.И.Середняков, В.А.Сидоров, А.Н.Скринский, Ю.М.Шатунов, Б.А.Шварц, С.И.Эйдельман.  
 $\Phi$  -мезон: прецизионное измерение массы, наблюдение  $\omega - \Phi$  - интерференции. Ядерная Физика, 1978, т.27, № 4, стр.976-984.
92. L.M.Barkov et al. The charged kaon mass measurement. Nuclear Physics, 1979, v. 148, p.p. 53-60.
93. Д.Хединг. "Введение в метод фазовых интегралов", 1965, изд. Мир, Москва.
94. В.М.Вайнберг, П.Р.Зенкевич. Исследование возможности ускорения поляризованных протонов в протонном синхротроне ИТЭФ. Препринт ИТЭФ-101, 1975, Москва, стр.1-23.
95. A.Piwinski. Intra-beam-scattering. Proc. IXth Intern. Conf. High-Energy Accelerators, Stanford, 1974, p.p. 405-409.
96. Я.С.Дербенёв. Столкновительная релаксация интенсивного пучка тяжелых частиц в накопителе. Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1979, т.1, стр.119-123.

97. Н. Bateman. "Higher transcendental functions". New York, 1953.
98. В.Л. Любошиц. О спонтанной поляризации нейтронов в магнитном и электрическом полях. Ядерная Физика, 1966, т.4, № 2, стр.269-271.
99. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. "Квантовая электродинамика", 1969, изд. Наука, Москва.
100. В.Н. Байер, В.М. Катков, В.С. Фадин. "Излучение релятивистских электронов", 1973, Атомиздат, Москва.
101. Ю.А. Башмаков, Е.Г. Бессонов. Метод получения встречных продольно поляризованных электрон-позитронных пучков. Труды У Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. (Дубна, 1976), М., изд. "Наука", 1977, стр.277-279, т.1.
102. Ю.Г. Павленко, А.Х. Мусса. Спировые эффекты при движении электронов в ондуляторах. Вестник МГУ, серия III (физика, астрономия), 1977, т.18, № 2, стр.57-60.
103. Я.С. Дербенёв, А.М. Кондратенко, Е.Л. Салдин. Лазерный метод получения поляризованных электронов и позитронов в накопителях. Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий, "Спин в физике высоких энергий", Дубна, 1982, стр.268-277.
104. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений", 1963, Изд. Физико-математической литературы, Москва.

Заверительная надпись

В данном деле пронумеровано 202 (двести два)  
(цифрами, прописью)

\_\_\_\_\_  
листов.

зав. суда.  
(должность)

Всех  
(подпись)

17.06.91г.  
Дата



