Магнитные системы ускорителей

И.А.Кооп, кафедра физики ускорителей НГУ

1. Уравнения электромагнитного поля. Единицы измерений.

На практике часто приходится пользоваться как Гауссовой системой единиц CGS так и международной системой единиц SI, поэтому в Таблице 1 основные сведения по электродинамике приведены для обеих этих систем.

Таблица 1. Основные сведения по электродинамике.

Величина	Гауссова система единиц CGS	Система единиц SI
Скорость света, c Заряд, q Потенциал, V Магнитное поле	$2.99792458\times10^{10}\ см/с$ $2.99792458\times10^{9}\ CGS-ед.$ $1/299.792458\ CGS-ед.$ $10^4\ Гс = 10^4\ дин/CGS-ед.$	$2.99792458\times10^{8}\ м/с$ $=1\,Кл = 1\,А\,с$ $=1\,В = 1\,Дж/Кл$ $=1\,Т = 1\,Н\,А^{-1}\,м^{-1}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$	$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$
Уравнения Максвелла	$\nabla\bullet\mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla\times\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ $\nabla\bullet\mathbf{B} = 0$ $\nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla\bullet\mathbf{D} = \rho$ $\nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}$ $\nabla\bullet\mathbf{B} = 0$ $\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$
	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},\quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P},\quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$
Линейные среды Магнитная проницаемость вакуума: Диэлектрическая проницаемость вакуума:	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ 1 1	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu,\quad \mu = \mu_r\mu_0$ $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ Н\,А^{-2}$ $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 =$ $= 8.854187817...\times10^{-7}\ Ф/м$
Выражения для полей через потенциалы:	$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$	$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$
Связь статических полей с потенциалами в Кулоновской калибровке:	$V = \sum_i \frac{q_i}{r_i} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$ $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\oint \frac{I d\mathbf{l}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$ $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I d\mathbf{l}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} d^3x'$

Преобразования полей из системы отсчета K в систему отсчета K' ($\mathbf{v}$ скорость K' относительно K)	$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$ $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)$ $\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$ $\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\right)$	$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$ $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$ $\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$ $\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}\right)$

Уравнения магнитостатики имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&rot\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\
&div\,\mathbf{B} = 0 \qquad (1.1) \\
&\mathbf{B} = \mu(B)\cdot\mathbf{H}
\end{aligned}
$$

2. Мультипольные разложения двумерных полей

Магнитные или электрические поля зависящие только от двух координат x,y и не зависящие от третьей координаты s в некоторой Декартовой системе координат (x,y,s), удобно описывать комплексным скалярным потенциалом $W(z)$, или же эквивалентно третьей компонентой $A_s(z)$ векторного потенциала. Будем для определенности всегда говорить о скалярном потенциале.

Как известно, произвольная аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\alpha}$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа:

$$\Delta_2 W(z) = 0 \qquad (1.2)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

Как реальная, так и мнимая части $W(z)$, также удовлетворяющие уравнению Лапласа, с равным успехом могут быть использованы для описания полей в вакууме. И если, скажем, уравнение:

$$\operatorname{Im} W(z) = \mathrm{const}$$

есть уравнение эквипотенциальной кривой, то аналогичное уравнение:

$$\operatorname{Re} W(z) = \mathrm{const}$$

описывает форму силовой линии и наоборот.

Произвольное двумерное поле вне токовой области может быть разложено в ряд по степеням z:

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

где $c_n=|c_n|e^{i\varphi_n}$ - коэффициенты разложения по мультиполям. Модуль c_n связан с амплитудой G_n 2n-мультиполя (n=1 –диполь, n=2 – квадруполь, n=3 – секступоль и т.д.):

$$|c_n|=G_n/n!$$

а фаза φ_n задает угол поворота мультиполя относительно оси x системы координат. Если фазы $\varphi_n=0$, то мнимая часть комплексного потенциала описывает поле прямо стоящего мультиполя, а реальная часть соответствует мультиполю повернутому вокруг оси s на угол $\pi/2n$. Для данного случая часто используется термин skew-мультиполь. Выпишем выражения для этих потенциалов как в Декартовой так и в полярной системе координат.

$$W_n=\Psi_n+i\Phi_n=\frac{G_n}{n!}z^n=\frac{G_n}{n!}(x+iy)^n=\frac{G_n}{n!}r^n e^{in\alpha}$$

$$\Phi_n=\frac{G_n}{n!}\mathrm{Im}\left(\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^{n-m}(iy)^m\right)=\frac{G_n}{n!}r^n\sin(n\alpha)$$

$$\Psi_n=\frac{G_n}{n!}\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{n}C_n^m x^{n-m}(iy)^m\right)=\frac{G_n}{n!}r^n\cos(n\alpha)$$

Выпишем также компоненты поля в полярных координатах. Они, как и потенциалы, имеют гармоническую зависимость от угла α :

$$B_r=\frac{G_n}{(n-1)!}r^{n-1}\sin(n\alpha)$$

$$B_\alpha=\frac{G_n}{(n-1)!}r^{n-1}\cos(n\alpha)$$

Таким образом, разложение двумерного поля по мультиполям является степенным по радиусу r и гармоническим по углу α, причем показатель степенной зависимости потенциала от r совпадает с номером гармоники угловой зависимости.

3. Краевые поля магнитов

Двумерная картина полей претерпевает довольно большие изменения на торцах магнитов. Интуитивно ясно, что в нулевом приближении поле 2n-мультиполя на краю магнита по-прежнему описывается тем же двумерным комплексным потенциалом, но теперь градиент поля уже должен зависеть от продольной координаты s:

$$W_{n,0}(z,s)=G_n(s)\cdot\frac{z^n}{n!}$$

Но поскольку такой вид потенциала явно не удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа, то должны появиться дополнительные члены с более высокой степенью z, которые исправят ситуацию. Перейдем к построению таких недостающих членов, зануляющих трехмерный Лапласиан.

Сделаем формальную замену переменных:

$$z = x + iy$$
$$\bar{z} = x - iy$$

Обратное преобразование:

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$$

В переменных $z, \bar{z}$ двумерная часть оператора Лапласа запишется в виде:

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Отсюда следует, что чисто двумерные поля должны описываться комплексной функцией только одной переменной: либо z, либо $\bar{z}$, чтобы автоматически происходило зануление смешанной производной. Итак, трехмерный оператор Лапласа можно представить в виде:

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

Будем теперь искать комплексный потенциал в виде степенного разложения, включающего помимо z еще и степени $\bar{z}$:

$$W_n(z, \bar{z}, s) = \sum_{m=0}^{\infty} W_{n,m}(s) \frac{z^{n+m}\bar{z}^m}{(n+m)!m!}$$

Каждый член данной суммы является n-ой гармоникой угла α, но теперь смешанная производная потенциала по z и $\bar{z}$ не обращается в нуль (при $m > 0$) и, следовательно, двумерная часть Лапласиана может, в принципе, скомпенсировать ненулевую вторую производную по s.

Итак, потребуем выполнения условия:

$$\Delta W(z, \bar{z}, s) = 0$$

Проведя дифференцирования по $z, \bar{z}$, s, и сгруппировав подобные члены, получим следующее рекуррентное соотношение:

$$W_{n,m}(s) = -\frac{1}{4} W^{('')}{}_{n,m-1}(s) \qquad m = 1, 2, ..., \infty$$

Или же:

$$W_{n,m}(s) = \frac{(-1)^m}{4^m} W^{(2m)}{}_{n,0}(s)$$

Итак, комплексный потенциал 2n-го мультиполя на краю магнита можно представить в виде степенного разложения по степеням $z, \bar{z}$, с коэффициентами $G^{(2m)}(s)$, являющимися четными производными по s от низшего мультипольного градиента $G(s) \equiv G^{(0)}(s)$:

$$W_n(z, \bar{z}, s) = \sum_{m=0}^{\infty} G^{(2m)}(s) \frac{(-1)^m z^{n+m} \bar{z}^m}{4^m (n+m)! m!} = \sum_{m=0}^{\infty} G^{(2m)}(s) \frac{(-1)^m r^{n+2m} e^{in\alpha}}{4^m (n+m)! m!}$$

Последний вариант записи потенциала явно показывает, что, как и в двумерном случае, потенциал является гармонической функцией угла α, с номером гармоники n.

На краю магнита, в местах, где четные производные по s от основного градиента отличны от нуля, добавляются дополнительные члены ряда, содержащие более высокие степени r, а именно степени r^{n+2m}.

Произвольное трехмерное поле прямолинейного магнита естественно может быть представлено в виде суперпозиции бесконечного числа гармонических мультиполей, приведенного выше вида.

а. Краевое поле дипольного магнита с косинусными обмотками.

Сверхпроводящие дипольные магниты ускорителей на высокую энергию (TEVATRON, HERA, RHIC, LHC) сделаны по технологии магнитов с косинусными обмотками. Зависимость плотности тока в таких обмотках от угла α близка к гармонической:

$$j(\alpha) = j_0 \cdot \cos(n\alpha)$$

Поэтому естественно ожидать, что и поле, как в среднем сечении так и на краях такого магнита, сохраняет гармоническую зависимость.

Положив в полученных выше формулах n=1 и взяв мнимую часть комплексного потенциала, получим для потенциалов и полей диполя следующие выражения:

$$W(z,\bar{z},s) = B(s)\cdot z - B''(s)\frac{z^2\bar{z}}{4\cdot 2!} + B''''(s)\frac{z^3\bar{z}^2}{4^2\cdot 3!\cdot 2!} - \ldots$$

$$\Phi(x,y,s) = B(s)y - B''(s)\frac{y(x^2+y^2)}{4\cdot 2!} + B''''(s)\frac{y(x^2+y^2)^2}{4^2\cdot 3!\cdot 2!} - \ldots$$

$$B_x(x,y,s) = -B''(s)\frac{xy}{4} + B''''(s)\frac{xy(x^2+y^2)}{48} - \ldots$$

$$B_y(x,y,s) = B(s) - B''(s)\frac{x^2+3y^2}{8} + B''''(s)\frac{x^4+6x^2y^2+5y^4}{192} - \ldots$$

$$B_s(x,y,s) = B'(s)y - B'''(s)\frac{y(x^2+y^2)}{8} + B'''''(s)\frac{y(x^2+y^2)^2}{192} - \ldots$$

Необходимо отметить появление продольной компоненты краевого магнитного поля. В первом приближении ее величина пропорциональна первой производной поля на оси и вертикальной координате y. Как известно, именно наличие продольной компоненты “вываливающегося” поля обеспечивает краевую фокусировку магнитов с косыми краями.

В полярных поперечных координатах все выражения выглядят несколько проще и имеют более наглядную физическую интерпретацию:

$$\Phi(r,\alpha,s) = \sin(\alpha)\left(B(s)r - B''(s)\frac{r^3}{8} + B''''(s)\frac{r^5}{192} - \ldots\right)$$

$$B_r(r,\alpha,s) = \sin(\alpha)\left(B(s) - B''(s)\frac{3r^2}{8} + B''''(s)\frac{5r^4}{192} - \ldots\right)$$

$$B_\alpha(r,\alpha,s) = \cos(\alpha)\left(B(s) - B''(s)\frac{r^2}{8} + B''''(s)\frac{r^4}{192} - \ldots\right)$$

$$B_s(r,\alpha,s) = \sin(\alpha)\left(B'(s)r - B'''(s)\frac{r^3}{8} + B'''''(s)\frac{r^5}{192} - \ldots\right)$$

б. Краевое поле дипольного магнита с однородным полем.

Представление краевого поля в виде суперпозиции гармоник не всегда удобно при анализе движения частиц.

Таким примером может служить магнит с не зависящим от x-координаты вертикальным полем.

Предположим, что край магнита с плоскими полюсами настолько широк, что его потенциал и сами компоненты поля не зависят от горизонтальной координаты x. В таком случае рационально использовать разложение скалярного потенциала по нечетным степеням y:

$$\Phi(y,s) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1}(s)\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Подставляя это разложение в двумерное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}=0$$

и приводя подобные члены с одинаковыми степенями y, получим:

$$C_{2m+1}(s)=-C''_{2m-1}(s)$$

Таким образом, потенциал и две компоненты краевого поля магнита с широкими полюсами имеют следующий вид:

$$\Phi(y,s)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m B^{(2m)}(s)\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}=B(s)y-B''(s)\frac{y^3}{6}+B''''(s)\frac{y^5}{120}-...$$

$$B_y(s)=B(s)-B''(s)\frac{y^2}{2}+B''''(s)\frac{y^4}{24}-...$$

$$B_s(s)=B'(s)y-B'''(s)\frac{y^3}{6}+B'''''(s)\frac{y^5}{120}-...$$

Нетрудно видеть, что такое разложение представляет собой суперпозицию бесконечного числа гармоник. Действительно, подстановка $y=r\cdot\sin(\alpha)$ позволяет переписать полученные выше формулы в виде ряда по гармоникам α. Далеко от края магнита мы имеем только первую гармонику, а в области спада или нарастания поля имеем все нечетные гармоники угла α.

Ясно, что в рассмотренном выше примере, представление полей в виде ряда по степеням y проще и удобнее чем разложение по гармоникам α. Такое представление в явном виде отражает отсутствие зависимости полей от координаты x. Подробный анализ показал, что приведенное в данном примере представление краевого поля значительно лучше отражает картину поля во всех не косинусных дипольных магнитах, чем представление через одну первую гармонику.

4. Примеры магнитов с водоохлаждаемыми обмотками.

Общий вид фокусирующей линзы триплета накопительного кольца ВЭПП-2000 представлен на рис.1. Основные расчётные параметры приведены в Таблице 1.

Таблица 1. Параметры линзы накопительного кольца ВЭПП-2000.

Градиент поля	5 кГс/см
Магнитная длина	190 мм
Диаметр вписанной окружности	40 мм
Количество витков основной обмотки	29
Номинальный ток	280 А
Напряжение	14.6 В
Мощность потерь	4 кВт
Количество витков обмотки коррекции	400
Номинальный ток обмотки коррекции	4 А

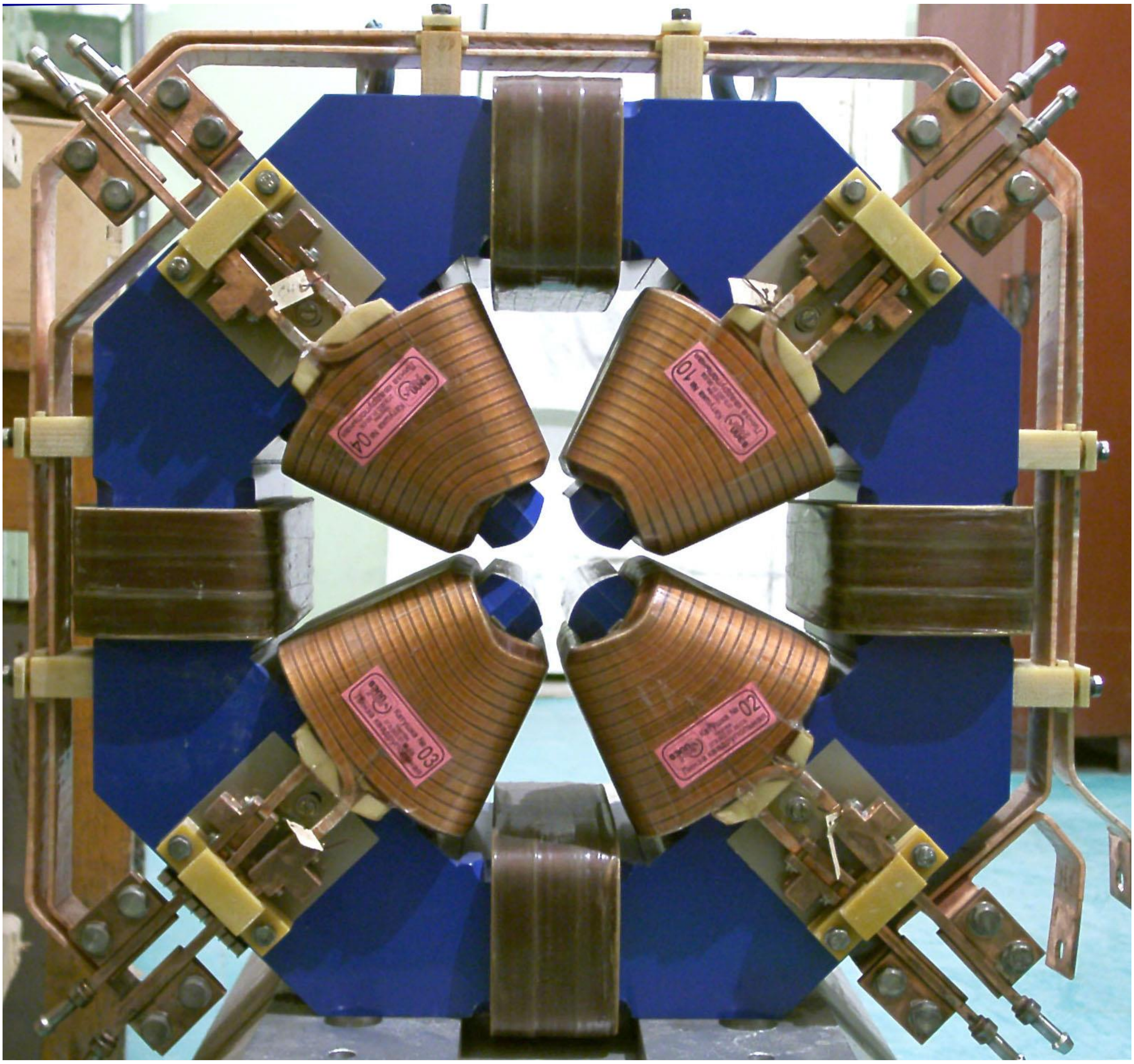
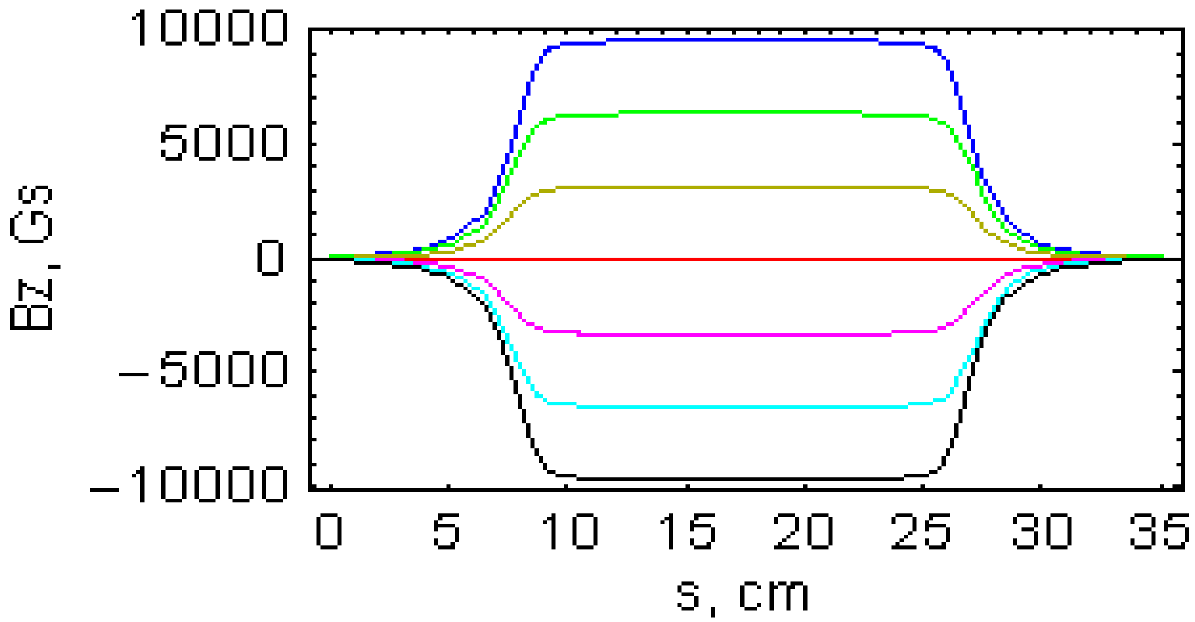


Рис.1 Квадрупольная линза накопителя ВЭПП-2000. Диаметр рабочей апертуры 40 мм.

Магнитные измерения проводились на специальном стенде. Магнитное поле линзы определялось линейкой датчиков Холла. Медная каретка с наклеенными на неё семью датчиками протаскивалась шаговым двигателем вдоль оси линзы. При этом датчики располагались в горизонтальной плоскости, образуя горизонтальную линейку, перпендикулярную оси линзы. Положение датчиков на каретке было определено ранее с точностью не хуже 0.01 мм. Для передвижения каретки строго по оси линзы была изготовлена направляющая в виде закрытого жёлоба, которая закреплялась на полюсах линзы. Таким образом, в результате измерений можно было получить зависимость вертикальной компоненты магнитного поля B_y от горизонтальной координаты x для



любого значения продольной координаты s.

Предварительно датчики Холла были прокалиброваны в дипольном магните с однородным вертикальным полем с помощью ЯМР датчика. Кроме того, перед каждой серией измерений определялись значения тока датчиков Холла при нулевом магнитном поле. Для этой цели каретка помещалась в пермаллоевый экран, исключающий внешнее магнитное поле. Данные калибровки, а также «нули» датчиков в виде файлов использовались управляющей программой HALL.

Программа управляла как источником тока, питающим линзу, так и шаговым двигателем, а также собирала и обрабатывала данные с датчиков Холла. Для каждой линзы было проведено несколько измерений для различных величин тока обмотки. Значения полей семи датчиков с шагом по продольной оси 5 мм записывались в файл для дальнейшей обработки. Примером обработанного файла может служить рис.2.

Рис. 2. Зависимость магнитного поля, измеряемого семью датчиками, от продольной координаты. Ток в обмотках $I = 280\ A$.

Для уменьшения значения нелинейности (в основном это додекаполь, т.е. 12-полюсник) было предложено доработать линзу снятием дополнительной фаски (см. фаска 2 на рис.3). Выбранный вариант доработки полюсов линзы позволит подавить нелинейные поправки примерно в 10 раз. Однако новая фаска неизбежно укоротит эффективную длину линзы, что приведёт к снижению интеграла градиента. Для компенсации этого эффекта необходимо увеличить ток в обмотках линзы, расчёт даёт для обеспечения указанного выше интеграла градиента значение тока равное $I = 350\ A$. Это приведёт к увеличению потребляемой мощности до $W = 6$ кВт.

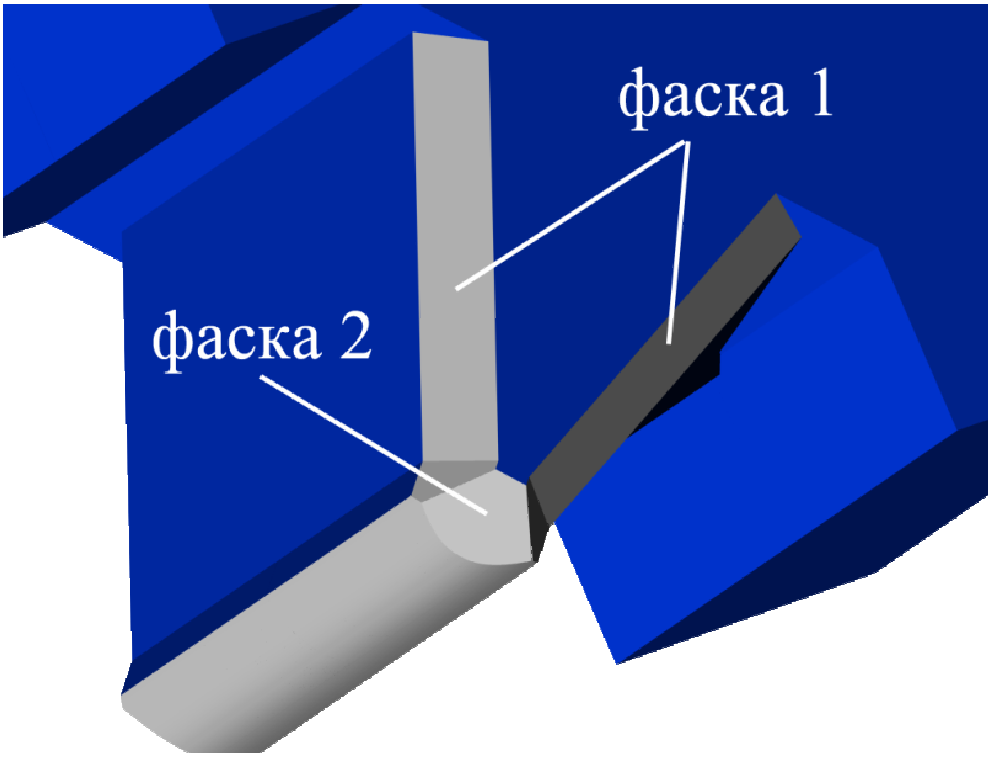


Рис. 3. Полюс линзы с двумя фасками.

Рис.4 Магнитопроводы дипольных магнитов ВЭПП-2000 в экспериментальном

производстве ИЯФа.

Рис.5 Дипольный магнит ВЭПП-2000 в сборе.

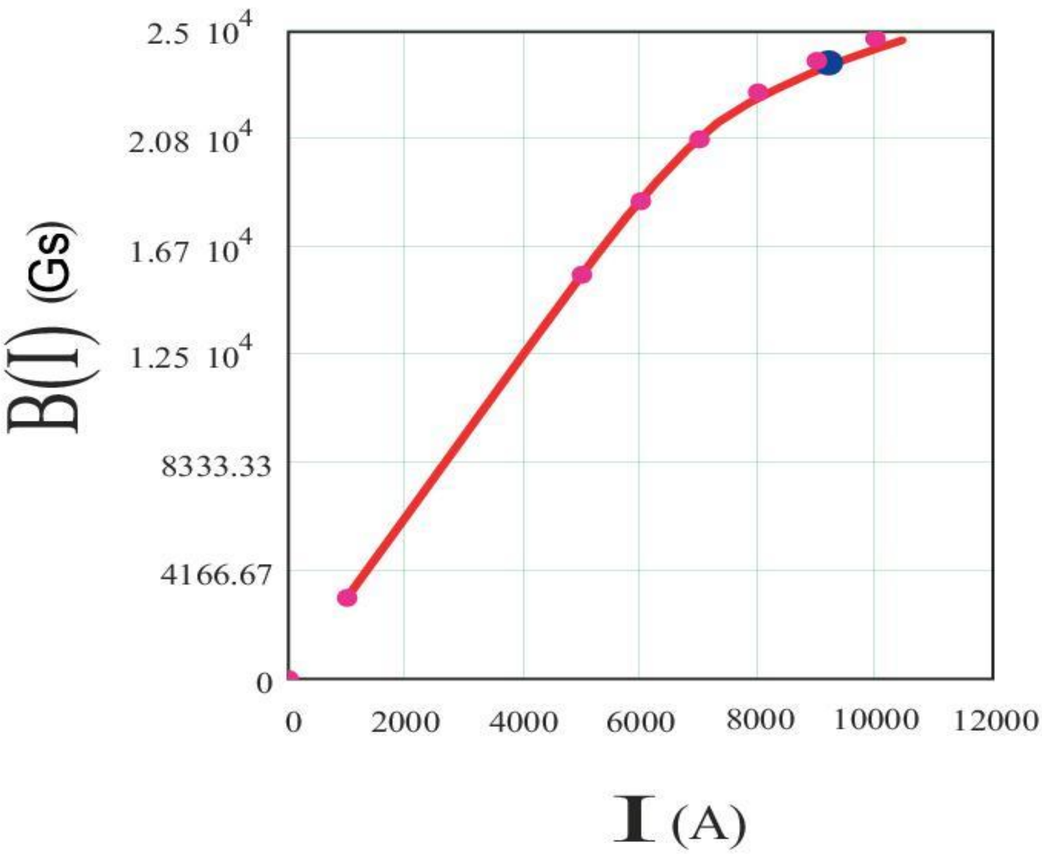


Рис.5 Зависимость поля в межполюсном зазоре магнита ВЭПП-2000 от тока в обмотке.

Таб. 2. Основные характеристики магнита ВЭПП-2000

Угол поворота	***45°***
Радиус поворота	***140 см***
Зазор между полюсами	***40 мм***
Максимальное поле	***24.60 кГс***
Максимальный ток	***10 кА***
Число витков в обмотке	***5***
Стабильность поля	***≤ 0.001***