

Е. Б. ЛЕВИЧЕВ

ЛЕКЦИИ
ПО НЕЛИНЕЙНОЙ
ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ
В ЦИКЛИЧЕСКОМ
УСКОРИТЕЛЕ



Е. Б. Левичев

ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ В ЦИКЛИЧЕСКОМ УСКОРИТЕЛЕ



ИЯФ - НГТУ

2009

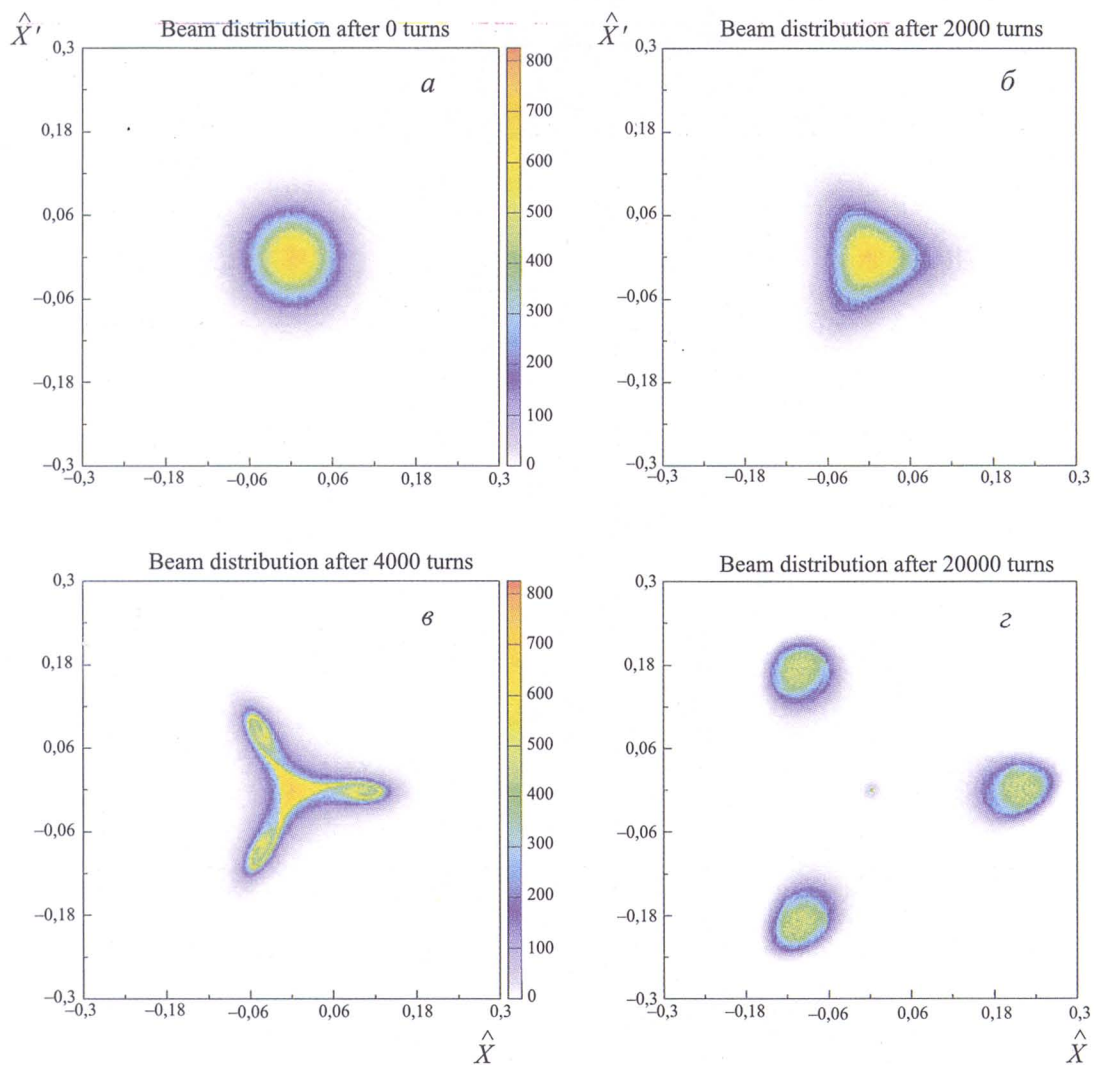


Рис. 12.2.2 к с. 143

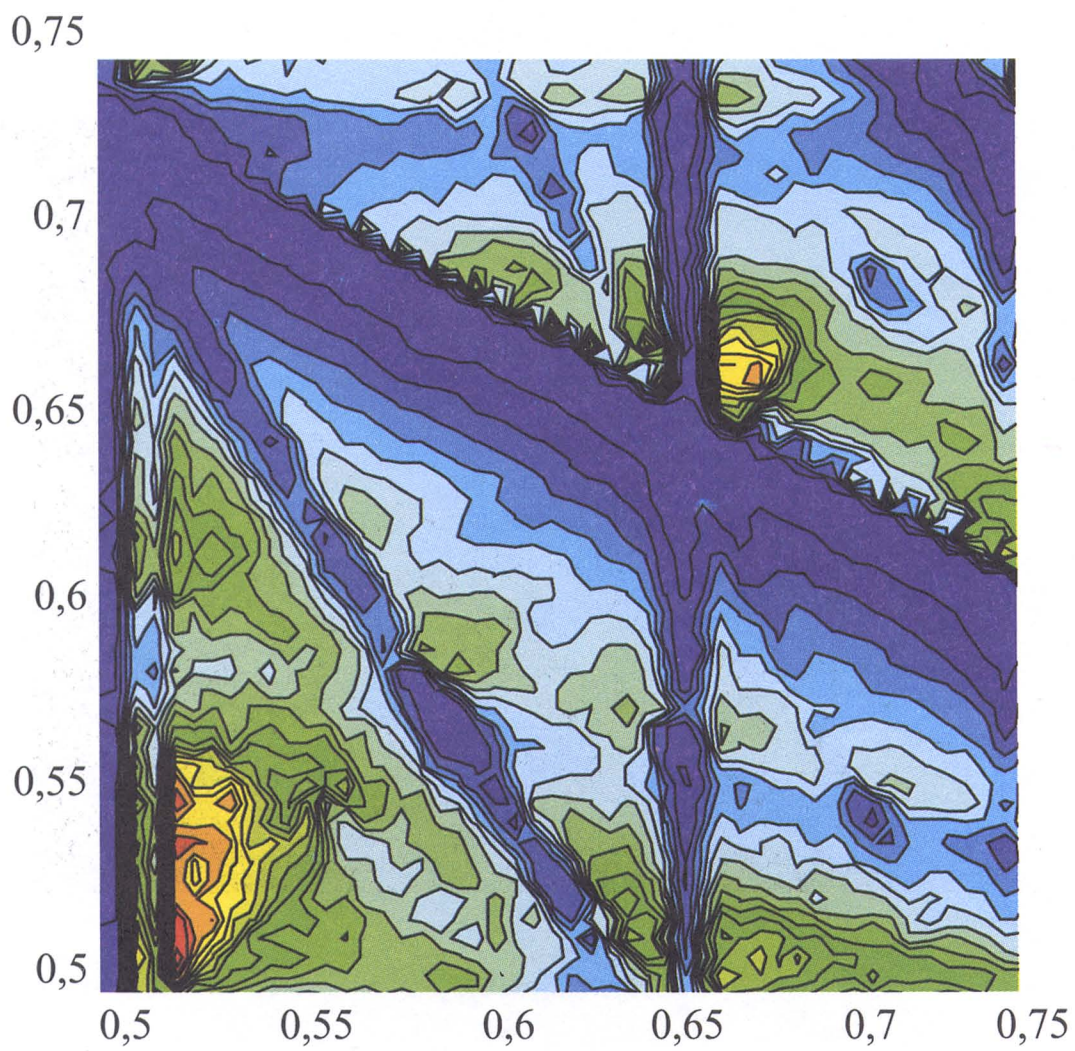


Рис. 16.5.4 к с. 183

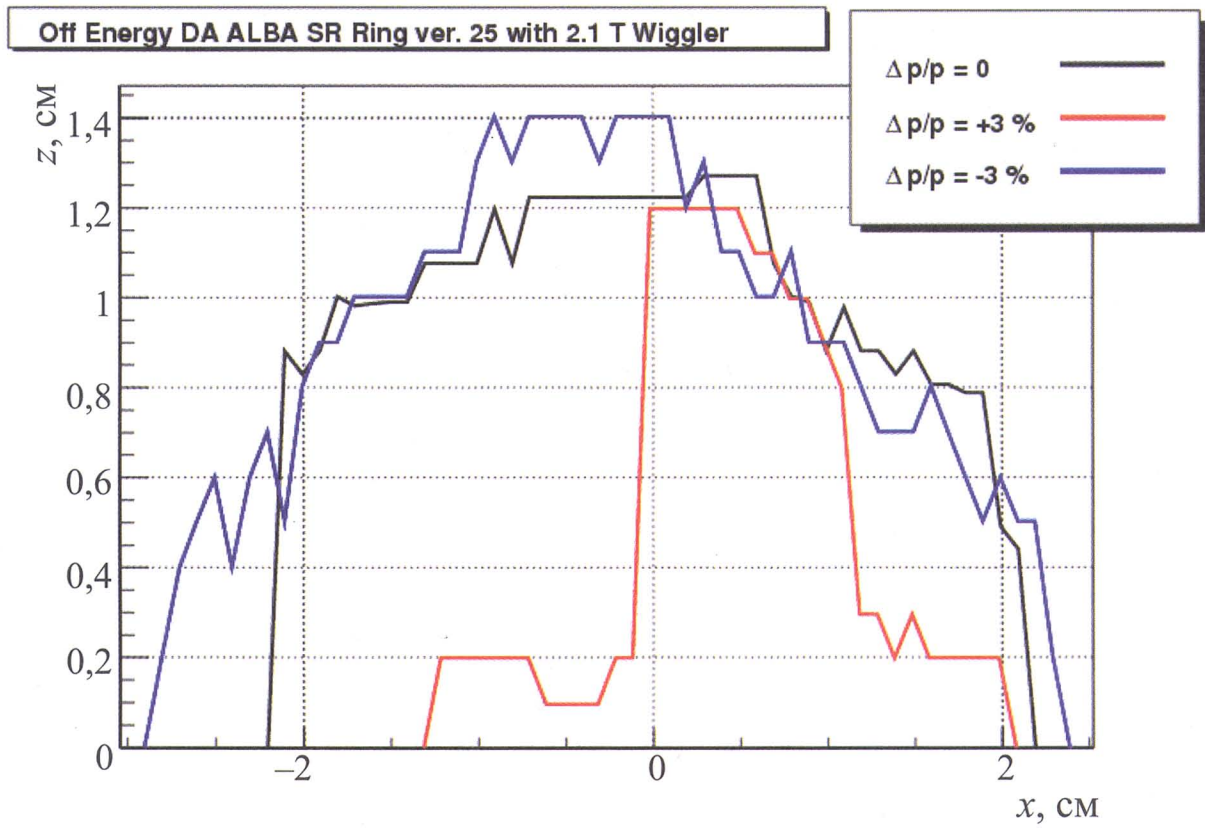


Рис. 18.4.5 к с. 205

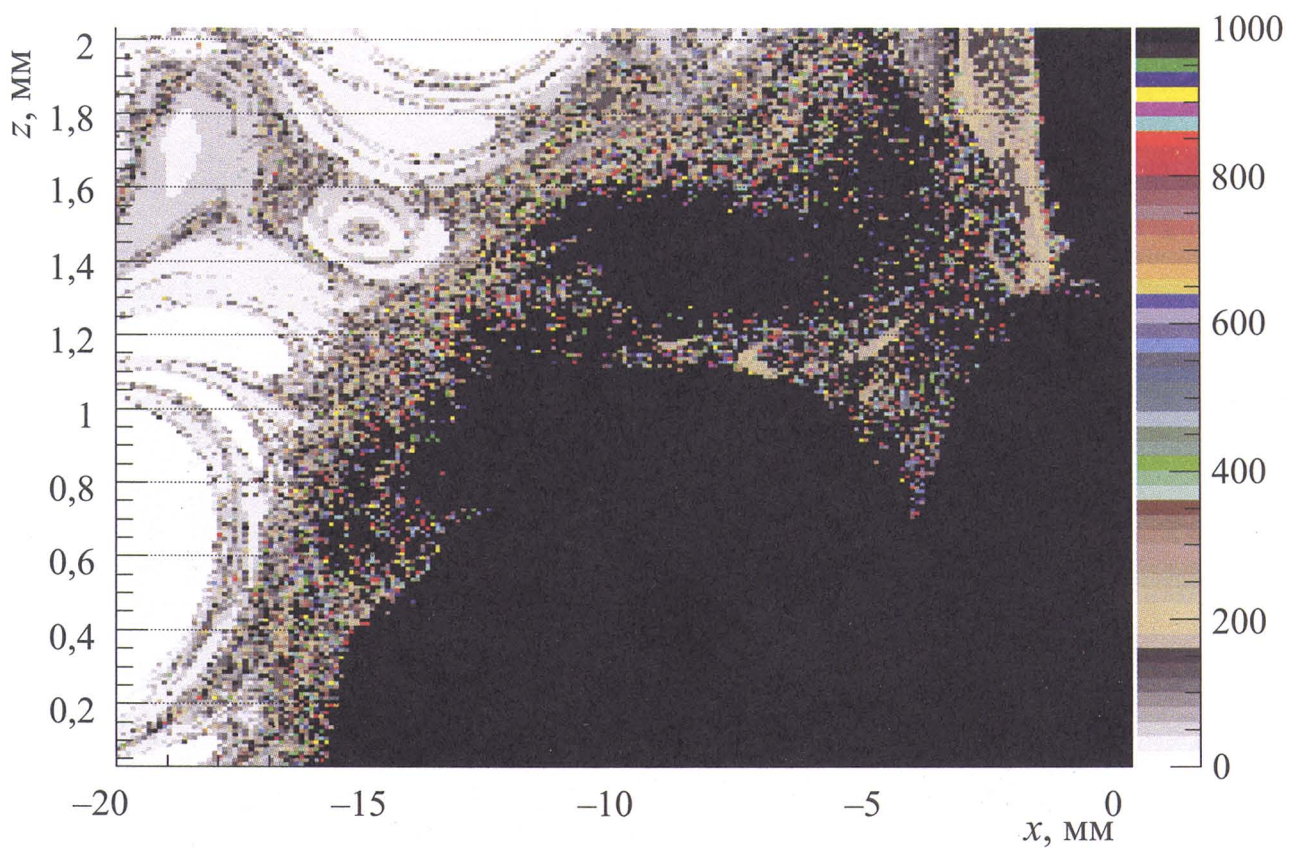


Рис. 18.4.6 к с. 206

И. Коны.

Результаты от автора.

ЭЖ-

02.11.09

Министерство науки и образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Е.Б.Левичев

**ЛЕКЦИИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ЧАСТИЦ
В ЦИКЛИЧЕСКОМ УСКОРИТЕЛЕ**

Утверждено Редакционно-издательским Советом

В качестве учебника

Новосибирск, 2009

УДК 621.384.6(075.8)
Л 372

Рецензенты:

Д.В.Пестриков, д-р физ.-мат. наук, проф.;

И.А.Кооп, д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре электрофизических установок и ускорителей

Левичев Е.Б.

Л 372 Лекции по нелинейной динамике частиц в циклическом ускорителе: учеб. пособие / Е.Б.Левичев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 224 с. (Серия «Учебники НГТУ»)

ISBN 978-5-7782-1189-6

Выводятся и исследуются уравнения движения релятивистской заряженной частицы в нелинейных полях циклического ускорителя. В качестве инструмента исследования используются различные методы теории возмущений (от разложения решения в степенной ряд до канонической теории Ли). Подробно изучаются такие аспекты нелинейной динамики как зависимость частоты колебаний от амплитуды, резонансные явления, ограничение области устойчивости движения частицы и т.д. В качестве возмущения рассматриваются нелинейности ведущего магнитов и поле пространственного заряда встречного пучка. Делается обзор современных методов компьютерного моделирования и экспериментального исследования нелинейного движения частиц в циклическом ускорителе.

Предназначено для студентов ФТФ пятого года обучения.

УДК 621.384.6(075.8)

© Левичев Е.Б., 2009
© Новосибирский государственный
технический университет, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Уравнения движения	12
Глава 2. Поперечное движение частицы в линейных магнитных полях	19
Глава 3. Источники нелинейного возмущения.....	35
Глава 4. Метод степенных рядов	48
Глава 5. Некоторые понятия механики Гамильтона	60
Глава 6. Гамильтониан частицы.....	81
Глава 7. Каноническая теория возмущений	91
Глава 8. Свойства нелинейных резонансов	108
Глава 9. Одномерный резонанс низкого порядка	123
Глава 10. Резонансный выпуск частиц из ускорителя.....	143
Глава 11. Двумерные резонансы бетатронных колебаний.....	152
Глава 12. Зависящее от времени возмущение	166
Глава 13. Переход к стохастическому движению	176
Глава 14. Резонансы высоких порядков приближения и теория Ли	183
Глава 15. Синхробетатронные резонансы.....	198
Глава 16. Эффекты встречи	207
Глава 17. Нелинейности периодических магнитных систем.....	225
Глава 18. Моделирование нелинейной динамики в ускорителях	233
Глава 19. Экспериментальное исследование нелинейных явлений в ускорителях.....	254

Предисловие

Устойчивое движение заряженных частиц в циклическом ускорителе является колебательным с двумя поперечными степенями свободы (бетатронные колебания) и одной продольной (синхротронные колебания). Соответствующий выбор переменных в линейном приближении позволяет описать такое движение с помощью набора гармонических осцилляторов, найти условие устойчивости, частоты мод колебаний и траектории частиц исходя из параметров магнитной и ускоряющей систем.

Однако в реальности сила, действующая на частицу, неизбежно содержит нелинейные компоненты. Некоторые из таких компонент намеренно вносятся разработчиком, другие являются следствием погрешности ведущего магнитного поля или, в установках со встречными пучками, обусловлены нелинейным характером электромагнитного поля встречного пучка и т.д. Как правило, нелинейные члены малы по сравнению с линейной составляющей силы, но, несмотря на малость, могут качественно изменять характер движения.

Эта ситуация является универсальной для подавляющего большинства колебательных систем, когда сила, действующая на систему, может быть представлена в виде невозмущенной части и малой поправки к ней. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение (в квадратурах) для таких систем не представляется возможным, однако, пользуясь малостью поправки, может быть найдено приближенное решение с применением того или иного варианта теории возмущений.

Метод исследования нелинейных систем, альтернативный теории возмущения, стал возможен в связи с появлением и развитием компьютеров, а численное решение уравнений движения принесло немало сюрпризов. Только благодаря появлению численных методов было обнаружено, что в такой системе, несмотря на ее детерминированность, наряду с регулярным, может присутствовать принципиально иное, случайное, движение, и конкретная реализация типа движения зависит только от начальных условий.

В предлагаемом курсе можно выделить две параллельные линии. Одна из них содержит описание методов теории возмущений, которые излагаются в «исторической» последовательности: от более «старых» и «слабых» к современным и мощным. По мере освоения очередного метода, его результаты, являющиеся общими для любого класса динамических систем с малым возмущением, применяются к специфическим задачам ускорительной физики, позволяя взглянуть на исследуемую проблему на все более глубоком уровне.

Хотя и предполагается, что читатель знаком с основами линейной теории движения частиц в ускорителе и гамильтоновой механики, в Главе 2 даны, для напоминания, основные положения теории бетатронных колебаний, а в Главе 5 – механики Гамильтона в той мере и том объеме, в котором это необходимо для изложения основного курса.

Теоретические выводы иллюстрируются результатами численного моделирования. Отдельная глава посвящена проблемам и методам численного решения задач динамики частиц в нелинейных полях циклического ускорителя.

В последней главе приводится обзор методов и результатов экспериментального исследования нелинейных эффектов в ускорителях и накопителях.

Поскольку поперечная фокусировка пучка многократно превышает продольную и, соответственно, бетатронные частоты в сотни и тысячи раз больше, чем синхротронная, эти моды колебаний могут рассматриваться независимо. Поэтому курс, в основном, сосредоточен на изучении свойств поперечного нелинейного движения. Впрочем, как уже говорилось, ввиду универсальности исследуемых явлений для любого типа слабо нелинейного осциллятора, результаты, получающиеся для бетатронных колебаний, верны и для синхротронных. При изучении эффектов, появляющихся из-за связи поперечных и продольной мод колебаний (синхробетатронные резонансы) в Главе 15, последняя рассматривается как малая поправка к бетатронным колебаниям.

Очевидно, что в коротком курсе невозможно ни предельно полное, ни предельно строгое изложение предмета, поэтому автор, маневрируя между этими Сциллой и Харибдой, старается сделать упор на простоту изложения, физическую суть рассматриваемых явлений и их практическое значение для физики циклических ускорителей. Каждая глава снабжена списком литературы, в которой пытливый читатель может найти недостающие полноту и строгость. Большая часть рекомендуемой литературы доступна на сайте Новосибирского государственного университета <http://lib.nsu.ru/>.

* * *

Теперь, после краткого описания предмета и структуры курса, рассмотрим те основные явления, которые вносят в движение частицы нелинейные состав-

ляющие силы. Для сравнения вначале будем описывать соответствующее свойство линейного движения, а затем, как оно меняется при появлении нелинейности.

Линейное движение

Частота колебаний частицы одинакова для всех частиц пучка и не зависит от амплитуды колебаний.

Нелинейное движение

Частота колебаний частицы зависит от амплитуды колебаний. Характер зависимости определяется конкретным видом нелинейности.

Поскольку в пучке присутствуют частицы с различными амплитудами, на диаграмме бетатронных частот пучок изображается уже не точкой, а занимает конечную область, которую могут пронизывать линии нежелательных резонансов.

Фазовые траектории частицы – эллипсы или, при соответствующем выборе фазовых переменных – окружности.

Фазовые траектории искажены наличием нелинейных компонент силы. Характер искажения и величина зависят от вида нелинейности. Практически это значит, что форма пучка и его размеры могут отличаться от стандартных, предсказанных линей-

ной теорией.

В системе существуют только целые и полуцелые (параметрические) резонансы и линейные резонансы связи.

Все виды резонансов, описываемых уравнением $m_x \nu_x + m_z \nu_z = n$, где $\nu_{x,z}$ - частоты бетатронных колебаний, а $m_{x,z}, n$ - целые числа, возможны. Они определяют плотную сетку резонансов вблизи любой выбранной рабочей точки частот. Вместе с тем, свойства нелинейных резонансов существенно отличаются от линейных благодаря зависимости частоты колебаний от амплитуды: амплитуда частицы, попавшей в резонанс, увеличивается, но одновременно меняется и частота колебаний, нарушая резонансное условие, движение частицы может быть устойчивым. Говорят, что нелинейность стабилизирует резонанс.

Если движение частицы удовлетворяет условиям устойчивости, то оно будет устойчиво при любой амплитуде колебаний частицы. Область финит-

Движение частицы устойчиво только в малом. При увеличении возмущения (амплитуды колебаний) устойчивость нарушается. Область началь-

ного движения задают механические ограничения (элементы вакуумной камеры).

Движение частицы для любых амплитуд является регулярным.

ных условий, для которых последующее движение устойчиво называется динамической апертурой. Граница динамической апертуры может быть существенно меньше геометрического акцептанса ускорителя.

Для одной и той же системы существуют области начальных условий, с регулярным и со случайным (стохастическим) движением. Эти области могут причудливо перемешиваться, причем с увеличением возмущения (амплитуды колебаний) стохастическая компонента движения увеличивается, а регулярная уменьшается.

Наличие случайного движения в детерминированной нелинейной системе с малым числом степеней свободы (≥ 2) не предсказывается никакой теорией и было обнаружено только численно.

Все описанные выше явления не только реализуются при движении пучка в циклическом ускорителе, но, зачастую, определяют его практические характеристики. Так, динамическая апертура в современных источниках синхротронного излучения является основным фактором, определяющим время жизни частиц, а нелинейные резонансы, возбуждаемые при встрече пучков в коллайдерах, ограничивают светимость этих установок. Причем, эволюция современных ускорителей и накопителей неизбежно ведет к тому, что они становятся все более «нелинейными», из-за увеличения фокусировки, сопровождающегося ростом натурального хроматизма и его компенсации секступольными линзами, из-за усиления эффектов встречи в накопителях со встречными пучками, увеличения интенсивности пучка и повышения роли нелинейных полей пространственного заряда и т.д.

Вместе с тем, ряд свойств нелинейного движения давно и успешно используется в физике ускорителей, можно упомянуть намеренное введение зависимости частоты колебаний частиц от амплитуды для подавления ряда коллективных неустойчивостей (затухание Ландау) или вывод пучка из ускорителя на нелинейном резонансе. Последний пример подробно рассматривается в Главе 10.

Все это приводит к росту важности и актуальности изучения нелинейных явлений в движении заряженных частиц в циклических ускорителях.

Автор благодарен Д.В.Пестрикову, Е.А.Переведенцеву и И.А.Коопу за чтение рукописи и ценные замечания, П.А.Пиминову и С.А.Глухову за предоставление результатов моделирования, использованных в тексте в качестве иллюстраций.

Рекомендуемая литература

1. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО РАН 278, Новосибирск, 1969.
2. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
3. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969.
4. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
5. Б.В.Чириков. Нелинейный резонанс. НГУ, Новосибирск, 1977.
6. А.Лихтенберг. Динамика частиц в фазовом пространстве. «Атомиздат», М., 1972.
7. Пестриков Д. В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие НГУ, Новосибирск, 2002.

Глава 1. Уравнения движения

Поперечное движение релятивистского ($\beta \approx 1$) электрона в магнитном поле циклического ускорителя или накопителя с заданной энергией удобно рассматривать в системе координат (x, z, s) , как это показано на рис.1.1, относительно некоторой замкнутой орбиты, называемой равновесной или идеальной. Мы будем предполагать, что эта орбита лежит в горизонтальной плоскости $z = 0$. Система координат движется вдоль орбиты со средней продольной скоростью частиц в пучке и поэтому называется сопровождающей системой координат.

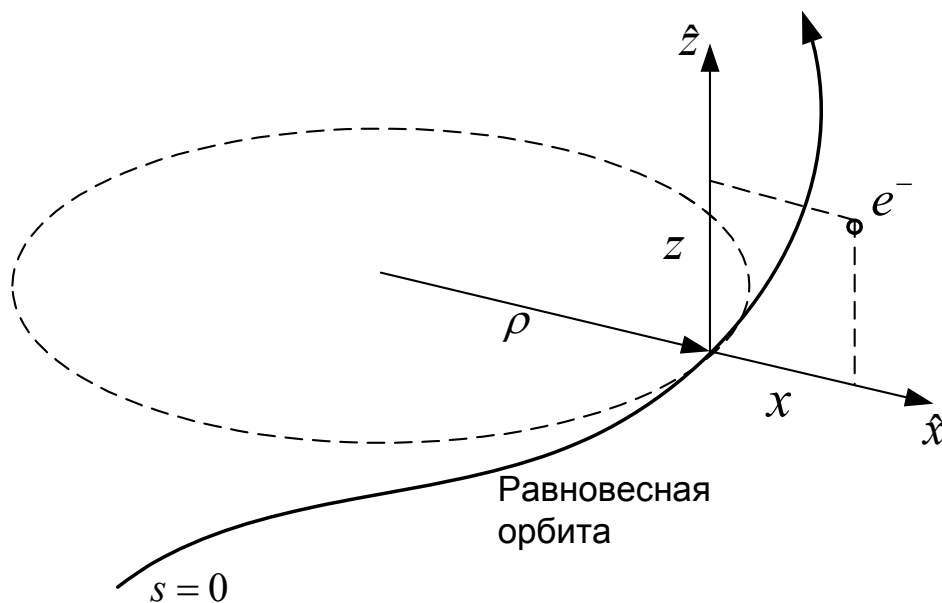


Рис.1.1 Сопровождающая система координат

В простом случае, когда вертикальная компонента поля зависит от азимутальной координаты s кусочно-постоянным образом (именно такое представление магнитного поля использовано ниже):

$$B_{zi}(x = z = 0, s) = \text{const} \quad (i = 1 \dots N),$$

равновесная орбита состоит из прямых линий (для $B_{zi} = 0$) и дуг окружностей, чей радиус ρ определяется равенством сил центростремительной и Лоренца:

$$\frac{\gamma m v^2}{\rho} = \frac{e}{c} v B_{zi}. \quad (1.1)$$

Сила Лоренца, действующая на частицу, запишется как

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(\gamma m \dot{\vec{R}}) = \gamma m \ddot{\vec{R}} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1.2)$$

где мы предполагаем, что поле статическое и энергия частицы γ не меняется, вектор скорости определяется как $\vec{v} = \dot{\vec{R}}$, а радиус-вектор

$$\vec{R} = r\hat{x} + z\hat{z} = (\rho + x)\hat{x} + z\hat{z} \quad (1.3)$$

определяет положение частицы в пространстве. Поскольку нас пока будет интересоваться только поперечное движение, мы воспользовались свободой выбора начала координаты s и приняли для точки рассмотрения $s = 0$.

Первая производная радиус-вектора по времени запишется как

$$\dot{\vec{R}} = \dot{r}\hat{x} + r\dot{\hat{x}} + \dot{z}\hat{z}, \quad (1.4)$$

где учитывается, что по мере движения частицы вдоль равновесной орбиты меняются не только ее координаты, но и направление оси $\hat{x}$. Таким образом, сопровождающая система координат оказывается криволинейной системой.

Дифференцирование единичного вектора $\hat{x}$ по времени может быть сделано с помощью рис.1.2, из которого видно, что $\dot{\hat{x}} = \dot{\theta} \cdot \hat{s}$, где $\dot{\theta} = v_s / r$.

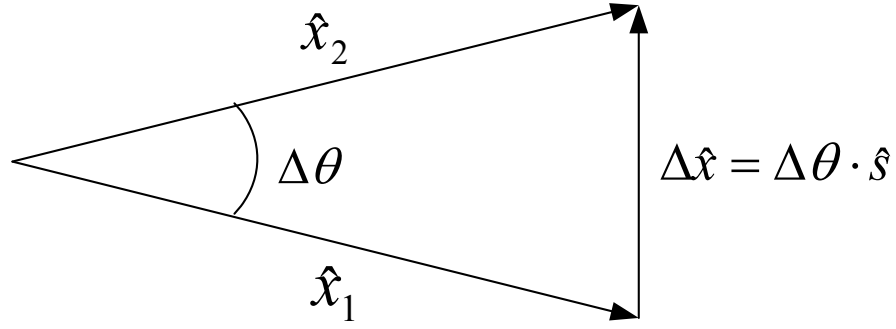


Рис.1.2 К определению $\hat{x}$

Тогда

$$\dot{\vec{R}} = r\dot{\hat{x}} + r\dot{\theta}\hat{s} + z\dot{\hat{z}}, \quad (1.5)$$

и, дифференцируя еще раз,

$$\ddot{\vec{R}} = r\ddot{\hat{x}} + (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{s} + r\dot{\theta}\dot{\hat{s}} + z\ddot{\hat{z}}. \quad (1.6)$$

Новая величина $\dot{\hat{s}}$, появившаяся в (1.6), может быть получена при помощи геометрических соображений, аналогичных рис.1.2: $\dot{\hat{s}} = -\dot{\theta}\hat{x}$, так что окончательно

$$\ddot{\vec{R}} = (r - r\dot{\theta}^2)\ddot{\hat{x}} + (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{s} + r\dot{\theta}\dot{\hat{s}} + z\ddot{\hat{z}}. \quad (1.7)$$

Векторное произведение в (1.2) может быть расписано в виде

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{z} & \hat{s} \\ v_x & v_z & v_s \\ B_x & B_z & 0 \end{vmatrix} = -v_s B_z \hat{x} + v_s B_x \hat{z} + (v_x B_z - v_z B_x) \hat{s}. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.2) для горизонтальной координаты, получим

$$r - r\dot{\theta}^2 = -\frac{e v_s B_z}{c \gamma m} = -\frac{e v_s^2 B_z}{c \gamma m v_s}. \quad (1.9)$$

Так как поперечные скорости частицы существенно меньше продольной $v_{x,z} \ll v_s$, то с хорошей точностью полный импульс частицы $p \approx \gamma m v_s$ и, в соответствии с (1.1)

$$r - r\theta^2 = -\frac{v_s^2 B_z}{B\rho}. \quad (1.10)$$

Теперь заменим независимую переменную t (время) на s (длина равновесной орбиты):

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds}. \quad (1.11)$$

Производную ds/dt найдем с помощью следующего соотношения

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho} = \dot{\theta}\Delta t = \frac{v_s}{r}\Delta t, \quad (1.12)$$

так что

$$ds = v_s \frac{\rho}{r} dt. \quad (1.13)$$

Вторая производная

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} = \left(v_s \frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2}. \quad (1.14)$$

Теперь уравнение (1.10) с учетом $r = \rho + x$ может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = -\frac{B_z}{B\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2. \quad (1.15)$$

Повторив вывод для вертикальной координаты, легко получить

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{B_x}{B\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2. \quad (1.16)$$

Отметим, что магнитное поле входит в уравнение движения нормированным на жесткость магнитной системы $B\rho$, пропорциональной полному импульсу (а в релятивистском случае и полной энергии) частицы.

Для дальнейшего упрощения уравнений (1.15) и (1.16) нужно учитывать конкретный вид поля $B_z(x, z, s)$ и $B_x(x, z, s)$. Будем считать, что магниты ускорителя обладают симметрией относительно эквипотенциальной плоскости $z = 0$ (что имеет место для подавляющего большинства магнитных элементов). Составляющие поля, создаваемого такими магнитами, должны удовлетворять условиям симметрии

$$B_z(z) = B_z(-z), \quad B_x(z) = -B_x(-z), \quad B_s(z) = -B_s(-z).$$

Разложение такого поля в ряд по степеням координат имеет вид

$$B_z(x, z, s) = \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(s) x^k z^{2i}, \quad B_x(x, z, s) = z \cdot \sum_{i,k=0}^{\infty} b_{ik}(s) x^k z^{2i},$$

$$B_s(x, z, s) = z \cdot \sum_{i,k=0}^{\infty} d_{ik}(s) x^k z^{2i}. \quad (1.17)$$

Используемую криволинейную систему координат можно рассматривать как цилиндрическую в пределах малых изменений s , и уравнения Максвелла в вакууме, описывающие магнитное поле, тогда запишутся как

$$rot \vec{B} = \left(\frac{B_s}{\rho + x} + \frac{\partial B_s}{\partial x} - \frac{\rho}{\rho + x} \frac{\partial B_x}{\partial s}; \quad \frac{\rho}{\rho + x} \frac{\partial B_z}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial z}; \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = (0; 0; 0), \quad (1.18)$$

$$div \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho + x} \frac{\partial B_s}{\partial s} + \frac{B_x}{\rho + x} = 0. \quad (1.19)$$

Подставив (1.17) в (1.18) и (1.19) можно показать, что коэффициенты разложения поля связаны следующим образом

$$(k+1)a_{i,k+1} = (2i+1)b_{ik}, \quad b'_{ik} = (k+1)\left(d_{i,k+1} - \frac{d_{ik}}{\rho}\right), \quad a'_{ik} = (2i+1)\left(d_{ik} - \frac{d_{i,k-1}}{\rho}\right),$$

$$2(i+1)\left(a_{i+1,k} + \frac{a_{i+1,k-1}}{\rho}\right) + (k+1)\left(b_{i,k+1} + \frac{b_{ik}}{\rho}\right) + d'_{ik} = 0.$$

Подставив эти соотношения в (1.17) и воспользовавшись определением локальной кривизны к равновесной орбите из (1.1)

$$\frac{e}{p}a_{00} = \frac{e}{p}B_z \Big|_{x=z=0} = \frac{B_z}{B\rho} \Big|_{x=z=0} = \frac{1}{\rho(s)} = h(s),$$

можно найти разложение поля в криволинейной системе координат:

$$\frac{1}{B\rho}B_z = h + kx + \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}(h'' + hk + m)z^2 + O(3), \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{B\rho}B_x = kz + mxz + O(3). \quad (1.21)$$

Коэффициенты разложения (1.20) и (1.21) имеют следующий смысл:

(1) Вертикальное поле B_{z0} создает кривизну орбиты $h(s) = 1/\rho(s) = \frac{B_{z0}}{B\rho}$.

(2) Фокусировка пучка осуществляется градиентом ведущего поля $G(s)$, причем фокусирующий коэффициент в разложении (1.19) и (1.20) записывается как

$$k(s) = \frac{G(s)}{B\rho} = \frac{1}{B\rho} \frac{dB_z}{dx} \Big|_{x=z=0}. \quad (1.22)$$

(3) Далее начинаются нелинейные (квадратичные) члены разложения магнитного поля, где

$$m(s) = \frac{S(s)}{B\rho} = \frac{1}{B\rho} \left. \frac{d^2 B_z}{dx^2} \right|_{x=z=0}, \quad (1.23)$$

а штрих обозначает производную по продольной координате: $h'(s) = dh / ds$.

Подставив линейные составляющие поля из (1.20) и (1.21) в (1.15) и (1.16) можно получить уравнения бетатронных колебаний

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{G}{B\rho} \right) x = 0 \quad \text{и} \quad z'' - \frac{G}{B\rho} x = 0. \quad (1.24)$$

Дополнительная литература

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
2. E.Courant and H.Snyder, Ann. of. Phys. **3**, 1 (1958).
3. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц. «Атомиздат», М., 1970.
4. А.А.Коломенский. Физические основы методов ускорения заряженных частиц. Издательство МГУ, М., 1980.
5. А.Н.Лебедев, А.В.Шальнов. Основы физики и техники ускорителей. «Энерго-атомиздат», М., 1991.
6. К.Штеффен. Оптика пучков высокой энергии. «Мир», М., 1969.

Глава 2. Поперечное движение частицы в линейных магнитных полях

2.1 Бетатронные колебания

Предполагается, что читатель знаком с линейной оптикой циклических ускорителей заряженных частиц. Тем не менее, напомним основные положения ее в той мере, в которой это будет касаться основного предмета.

Линейные уравнения движения частицы получаются из (1.15) и (1.16) если подставить в них компоненты магнитного поля (1.20) и (1.21)

$$B_z = B_{z0}(s) + G(s)x \quad \text{и} \quad B_x = G(s)z, \quad (2.1.1)$$

которые определяются только вертикальным полем B_{z0} (обеспечивающим поворот частицы в горизонтальном направлении) и градиентом поля G (обеспечивающим фокусировку частиц), и удержат члены включительно до линейных по x , z и

$$\delta = (p - p_0) / p_0$$

$$z'' + K_z(s)z = 0 \quad \text{и} \quad x'' + K_x(s)x = \delta \cdot h(s), \quad (2.1.2)$$

где коэффициенты фокусировки равны: $K_z(s) = -k(s)$ и $K_x(s) = h^2(s) + k(s)$.

Особенностью этих коэффициентов является их периодичность, по крайней мере, с периодом C самого циклического ускорителя: $K(s) = K(s + C)$. А если период коэффициентов фокусировки меньше, чем период ускорителя $K(s) = K(s + C / N)$, то говорят, что ускоритель состоит из N ячеек периодичности.

На рис.2.1.1 показана ячейка периодичности источника синхротронного излучения «Сибирь-2» с энергией электронов 2.5 ГэВ. Хорошо видны элементы линейной оптики: поворотные магниты и квадрупольные линзы.



Рис.2.1.1 Ячейка периодичности накопителя электронов – источника синхротронного излучения «Сибирь-2», разработанного в ИЯФ СО РАН. Обозначены поворотные магниты (М) и квадрупольные линзы (Л).

Из-за наличия поворотов в горизонтальной плоскости (участков с ненулевой кривизной h) уравнение для горизонтального движения неоднородно, и его правая часть зависит от импульса частицы. Это отражает тот факт, что частицы с

разной энергией движутся в магнитном поле по орбитам с разными радиусами кривизны. Принято разделять горизонтальное смещение частицы на две части, вводя специальную периодическую дисперсионную функцию $\eta(s)$:

$$x(s) = x_b(s) + \delta \cdot \eta(s), \quad (2.1.3)$$

где первое слагаемое характеризует «чистое» бетатронное движение, а второе вводит новую замкнутую (ввиду периодичности $\eta(s)$) орбиту $x_\delta(s) = \delta \cdot \eta(s)$, относительно которой совершаются бетатронные колебания $x_b(s)$, как это показано на рис.2.1.2.

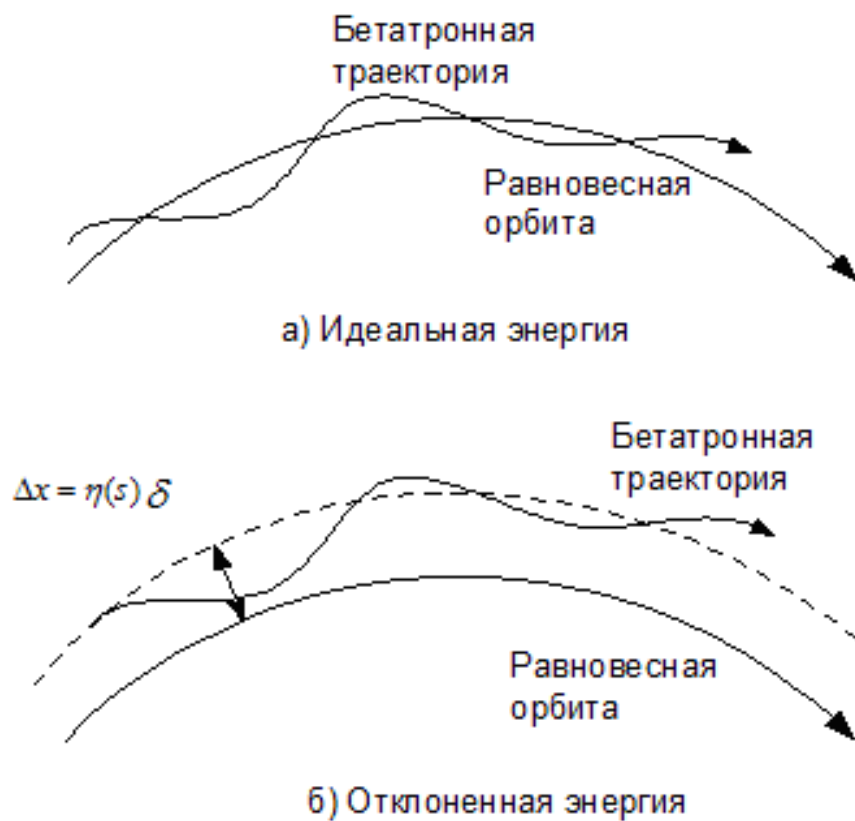


Рис.2.1.2 Бетатронные колебания и неравновесная орбита.

Подстановка (2.1.3) во второе уравнение (2.1.1) разделяет два типа движения, приводя к уравнению для горизонтальных бетатронных колебаний, аналогичному вертикальному, и к уравнению на дисперсионную функцию

$$x'' + K_x(s)x = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\eta'' + K_x(s)\eta = h(s), \quad (2.1.5)$$

для краткости в (2.1.4) индекс b опущен.

Пока мы будем изучать только бетатронные колебания, которые и по горизонтали и по вертикали описываются одинаковыми уравнениями типа (2.1.4) с периодическими коэффициентами. Эти уравнения носят название уравнений Хилла, а их решение, согласно теореме Флоке, может быть записано в виде (для краткости все записывается только для горизонтального движения, но верно и для вертикального)

$$x(s) = \sqrt{2J_x \beta_x(s)} \cdot \cos(\phi_x(s) + \phi_{x0}), \quad (2.1.6)$$

где константы J_x и ϕ_{x0} определяются начальными условиями. Две структурные (т.е., определяемые только магнитной структурой ускорителя) функции играют важную роль в теории линейных бетатронных колебаний. Это амплитудная функция бетатронных колебаний (или, просто, бетатронная функция) $\beta_x(s)$, которая является решением уравнения

$$2\beta_x \beta_x'' - \beta_x'^2 + 4\beta_x^2 K_x(s) = 4, \quad (2.1.7)$$

и фазовая функция, которая определяется с помощью бетатронной функции как

$$\phi_x(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_x(s)}. \quad (2.1.8)$$

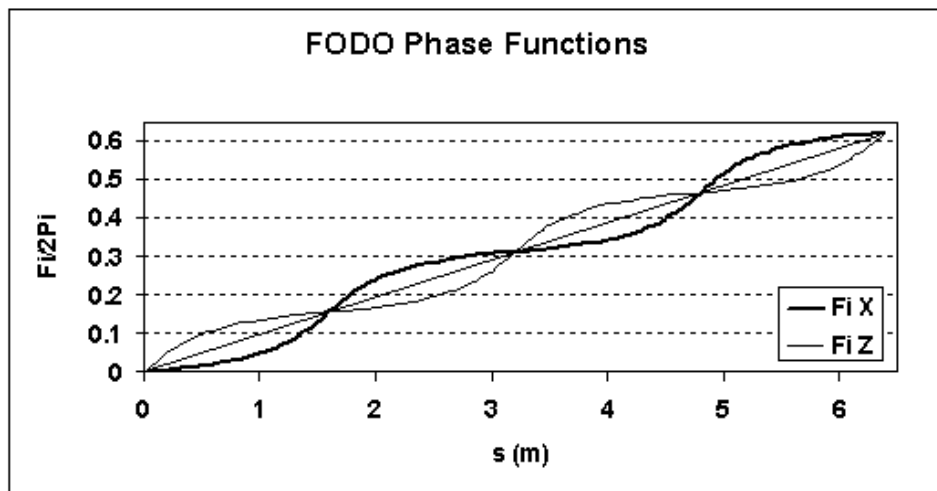
Величина

$$\nu_x = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta_x(s)}, \quad (2.1.9)$$

называется бетатронным числом, или безразмерной бетатронной частотой (строго говоря, частота бетатронных колебаний равна $\nu_x \cdot f_0$, где f_0 – частота обращения).

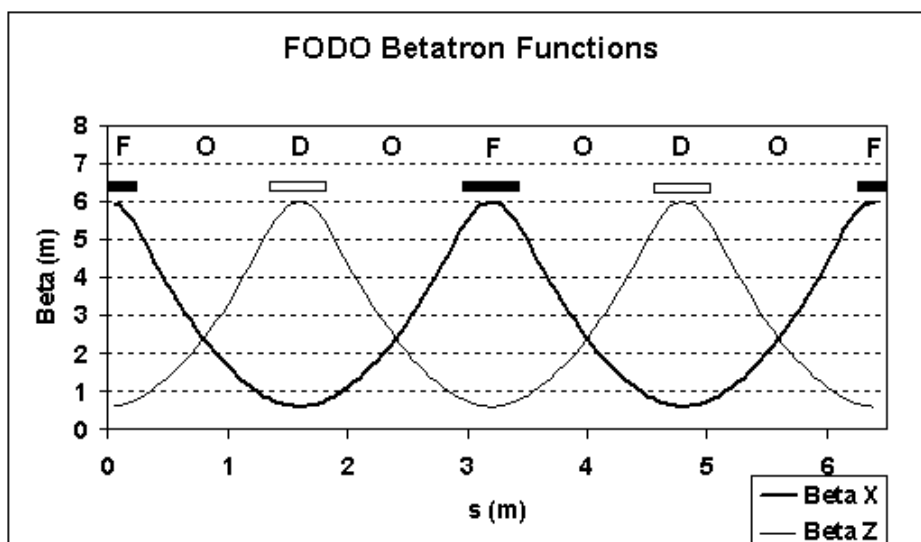
Говорят, что частица в циклическом ускорителе совершает псевдогармонические колебания, чья мгновенная амплитуда $A_x \sim \sqrt{\beta_x(s)}$ и длина волны $\lambda_x(s) = 2\pi \cdot \beta_x(s)$ определяются одной единственной бета-функцией.

Поведение структурных функций для простейшей *FODO*-ячейки периодичности, состоящей из фокусирующей и дефокусирующей квадрупольных линз, разделенных пустыми промежутками, показано на рис.2.1.3.



(а) Фазовые функции (прямая линия показывает равномерный набег бетатронной

фазы $\phi(s) = s \cdot (\nu / R)$).



(б) Амплитудные функции.

Рис.2.1.3 Структурные функции двух *FODO*-ячеек периодичности.

Амплитудная и фазовая функции бетатронных колебаний – периодические с периодом фокусирующих коэффициентов (ячейки периодичности). Однако само решение (2.1.6) не является периодической функцией, если только бетатронная частота не выражается рациональным числом $\nu = n/m$. Чаще всего такие значения (и близкие к ним) нежелательны, так как при этом соответствующая гармоника магнитного поля воздействует на движении частицы резонансным образом, что может привести к потере частицы.

2.2 Матричное решение и условие устойчивого движения

Обычно реальное распределение поля магнитов ускорителя может быть заменено упрощенной моделью, когда свойства поля остаются постоянными внутри

элемента и меняются скачком на его границе (т.н. кусочно-постоянное приближение, рис.2.2.1).

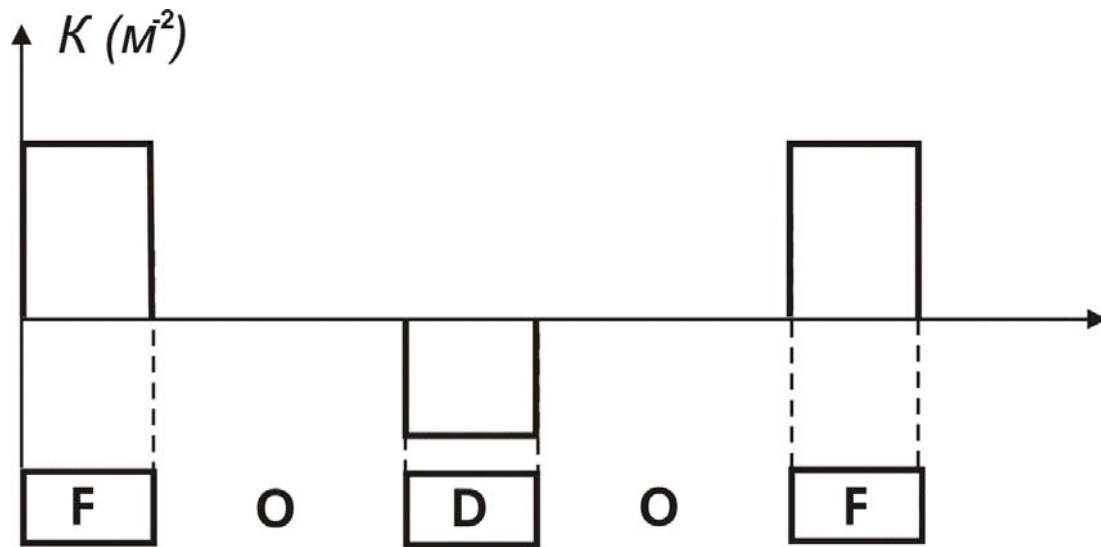


Рис.2.2.1 Кусочно-постоянное приближение магнитного поля.

Тогда в пределах одного элемента коэффициенты уравнений бетатронных колебаний постоянны, а сами уравнения легко решаются. Причем, как известно, решение линейного дифференциального уравнения второго порядка представимо в матричной форме

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) \\ m_{21}(s) & m_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}, \quad (2.2.1)$$

где $\vec{x}(0)$ – вектор начальных условий (на входе в элемент), $\vec{x}(s)$ – вектор на выходе из элемента, а элементы матрицы перехода зависят от параметров поля элемента, но не зависят от начальных условий.

Например, матрица перехода участка длиной s , фокусирующего по горизонтали, имеет вид

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K_x} s) & \frac{1}{\sqrt{K_x}} \sin(\sqrt{K_x} s) \\ -\sqrt{K_x} \sin(\sqrt{K_x} s) & \cos(\sqrt{K_x} s) \end{pmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Если частица движется через последовательность элементов с матрицами $M_1, M_2, \dots, M_n$, то входной и выходной вектор соотносятся как

$$\vec{x} = M_n \dots M_2 M_1 \vec{x}_0. \quad (2.2.3)$$

Если последовательность n элементов составляет весь циклический ускоритель, то результат перемножения матриц элементов составляет матрицу оборота

$$M_R = M_n \dots M_2 M_1, \quad (2.2.4)$$

которая может быть записана с использованием параметров Твисса

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad \text{и} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (2.2.5)$$

в виде

$$M_R = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu) + \alpha \sin(2\pi\nu) & \beta \sin(2\pi\nu) \\ -\gamma \sin(2\pi\nu) & \cos(2\pi\nu) - \alpha \sin(2\pi\nu) \end{pmatrix}.$$

Матрица оборота в форме Твисса позволяет сформулировать условие устойчивости движения в виде

$$-2 \leq \text{tr} M_R = m_{11} + m_{22} \leq 2. \quad (2.2.6)$$

Матричный формализм весьма удобен, если нужно численно проследить движение частицы за большое число оборотов N . При этом нет необходимости на каждом участке решать уравнения движения с новыми начальными условиями. Достаточно один раз вычислить матрицы элементарных участков ускорителя и получить матрицу оборота, тогда

$$\vec{x}_N = M_R^N \vec{x}_0. \quad (2.2.7)$$

Матричный формализм является дополнительным по отношению к замкнутой форме решения Флоке поскольку оба метода описывают одно и то же движение.

2.3 Матрица перехода и линейное дифференциальное уравнение

Важное свойство произвольной матрицы перехода может быть получено с помощью общих свойств линейного дифференциального уравнения

$$x'' + D(s)x' + K(s)x = 0, \quad (2.3.1)$$

частным случаем которого является исследуемое нами уравнение бетатронных колебаний.

Введем два частных решения $C(s)$ и $S(s)$, которым отвечают следующие начальные условия:

$$C_0 = C(0) = 1, \quad C'_0 = C'(0) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$S_0 = S(0) = 0, \quad S'_0 = S'(0) = 1.$$

Траектории, соответствующие $C(s)$ и $S(s)$ называют «косинусной» и «синусной», по аналогии с поведением функций косинуса и синуса.

Поскольку общее решение линейного дифференциального уравнения можно представить в виде линейной комбинации двух частных решений, мы можем записать

$$x(s) = C(s)x_0 + S(s)x'_0, \quad (2.3.3)$$

$$x'(s) = C'(s)x_0 + S'(s)x'_0.$$

Последняя запись есть не что иное, как матричное решение уравнения бетатронных колебаний с матрицей перехода

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Или, другими словами, полученные выше матрицы перехода для отдельных участков составлены из двух частных решений уравнения бетатронных колебаний для этого конкретного участка.

Теперь, если мы подставим решения $C(s)$ и $S(s)$ в (2.3.1), умножим первое из получившихся уравнений на $S(s)$, а второе – на $C(s)$, и вычтем первое уравнение из второго, мы получим

$$CS'' - SC'' + D(s)(CS' - SC') = \frac{d}{ds}(CS' - SC') + D(s)(CS' - SC') = 0. \quad (2.3.5)$$

Выражение в скобках (2.3.5) представляет собой определитель матрицы перехода, который в теории дифференциальных уравнений называется вронскианом и обозначается как $W(s)$, так что (2.3.5) можно переписать в виде

$$W' + D(s)W = 0. \quad (2.3.6)$$

Решив (2.3.6), получим

$$W(s) = W_0 \exp\left(-\int_0^s D(s)ds\right), \quad (2.3.7)$$

причем, согласно (2.3.2) начальное значение вронскиана $W(0) = W_0 = 1$. Но тогда для нашего случая $D(s) = 0$ определитель матрицы перехода любого участка ускорителя

$$|M| = 1. \quad (2.3.8)$$

Равенство единице определителя матрицы перехода является следствием общей для гамильтоновых систем теоремы Лиувилля, формулируя которую в упрощенной форме можно сказать, что в гамильтоновых системах плотность фазовых траекторий во времени сохраняется.

2.4 Фазовое движение

Важным понятием нелинейной механики является изображение траектории частицы в фазовом пространстве.

На некотором фиксированном азимуте при каждом пролете частицы будем измерять ее смещение x и наклон траектории x' , которые (в линейном случае) являются канонически сопряженными переменными. Тогда набор последовательных точек (x_i, x'_i) , образует на фазовой плоскости эллипс, как это показано на рис.2.4.1.

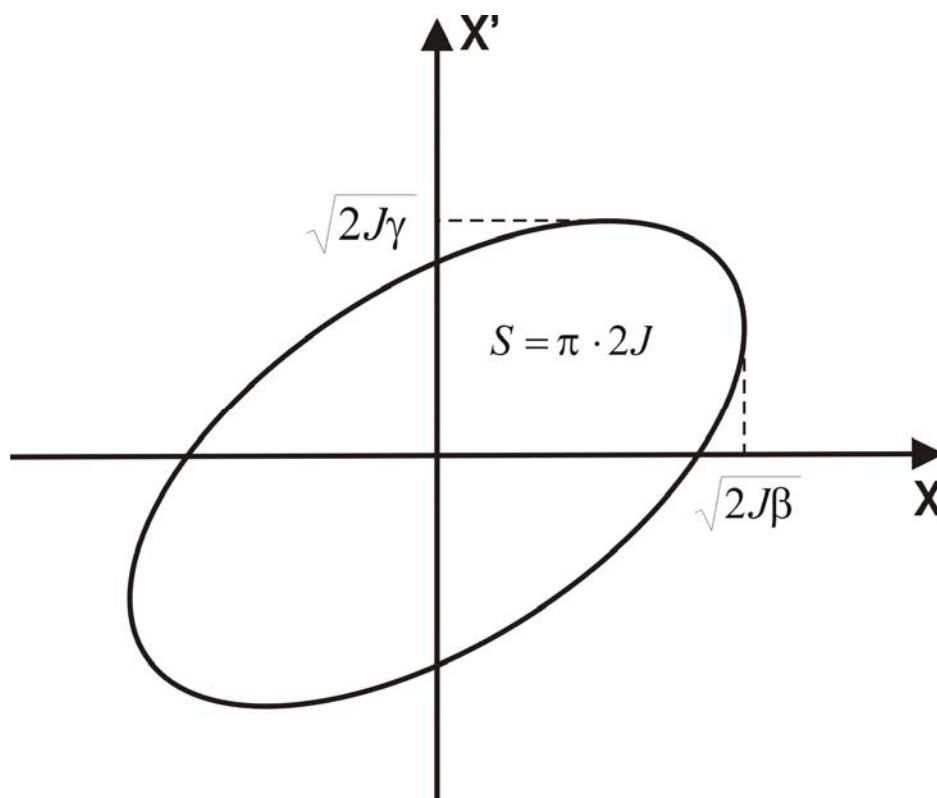


Рис.2.4.1 Фазовая траектория линейного движения.

Форма эллипса зависит от того, на каком азимуте мы измеряем параметры частицы (т.к. бетатронная функция сама зависит от азимута). Однако площадь эллипса оказывается инвариантом, аналогичным полной энергии гармонического осциллятора. Этот факт также является проявлением теоремы Лиувилля. Площадь фазового эллипса выражается через константу J (2.1.6) как $S = \pi 2J$, а сама константа может быть выражена с помощью x и x' в виде

$$2J = \gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2, \quad (2.4.1)$$

где использованы введенные ранее обозначения параметров Твисса. В ускорительной физике соотношение (2.4.1) называют инвариантом Куранта-Снайдера.

Специальным выбором переменных можно существенно упростить вид фазовой траектории. Для этого запишем еще раз выражение (2.1.6) в виде

$$x(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cos \psi(s),$$

введем переменную

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{2J} \cos \psi \quad (2.4.2)$$

и продифференцируем ее по ψ . С одной стороны (используя определение α (2.2.5))

$$\frac{d\zeta}{d\psi} = \frac{d\zeta}{ds} \frac{ds}{d\psi} = \frac{d}{ds} \left(\frac{x}{\sqrt{\beta}} \right) \cdot \beta = \frac{\alpha x + \beta x'}{\sqrt{\beta}}, \quad (2.4.3)$$

с другой

$$\frac{d\zeta}{d\psi} = -\sqrt{2J} \sin \psi. \quad (2.4.4)$$

Теперь, если обе величины

$$\zeta = x/\sqrt{\beta} = \sqrt{2J} \cos \psi, \quad (2.4.5)$$

$$d\zeta / d\psi = (\alpha x + \beta x')/\sqrt{\beta} = -\sqrt{2J} \sin \psi \quad (2.4.6)$$

возвести в квадрат и сложить, то получится уравнение окружности с радиусом

$$R = 2J :$$

$$\zeta^2 + (d\zeta / d\psi)^2 = 2J. \quad (2.4.7)$$

Другими словами, замена переменных вида (2.4.5)-(2.4.6), известная как преобразование Флоке, позволяет от эллиптических фазовых траекторий перейти к круговой (рис.2.4.2), причем вид этой траектории не зависит от выбора азимута.

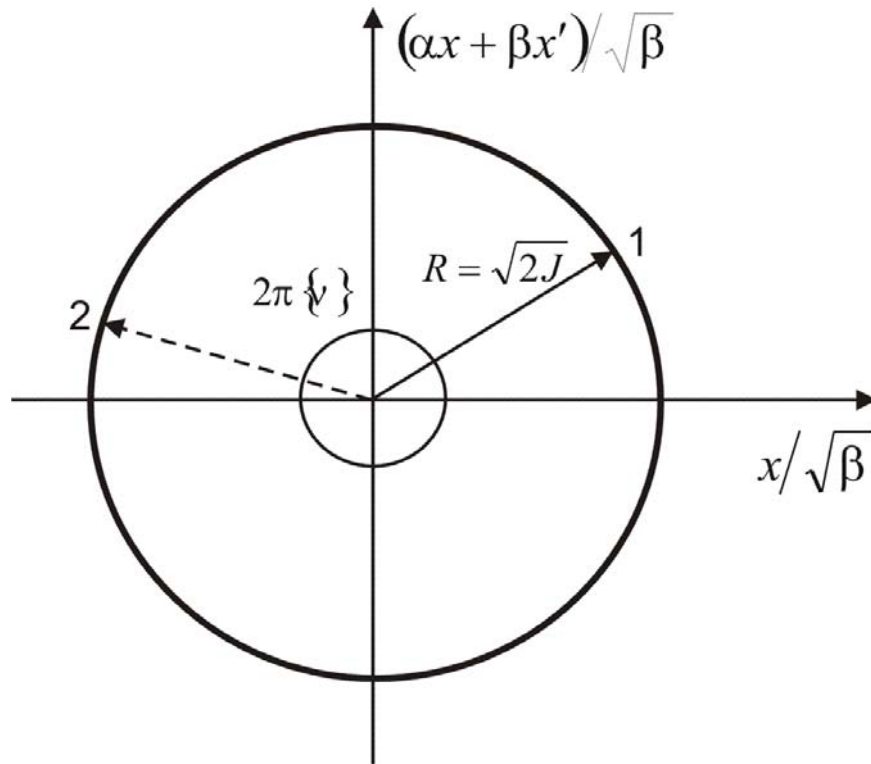


Рис.2.4.2 Круговая фазовая траектория частицы. Показаны точки, изображающие положение частицы для двух последовательных оборотов. Для них разница углового положения изображающего вектора равна $2\pi \cdot \{\nu\}$, где фигурные скобки обозначают дробную часть.

Новые переменные более сложны и менее наглядны, чем старые (напрямую связанные с отклонением от равновесной траектории), однако это неудобство компенсируется тем, что движение теперь описывается гораздо проще, чем раньше.

Очевидно, что упрощение топологии фазового пространства должно быть напрямую связано с упрощением математической формы записи задачи. И действительно, фазовые траектории вида (2.4.7) свойственны математическому маятнику с уравнением

$$\frac{d^2\zeta}{d\psi^2} + \nu^2\zeta = 0. \quad (2.4.8)$$

Т.е. преобразование Флоке приводит уравнение бетатронных колебаний (2.1.4) со сложным решением (2.1.6) к уравнению математического маятника (2.4.8) с тривиальным решением. Отметим, что роль независимой переменной «времени» играет набег бетатронной фазы $\phi(s)$ (напомним, что $\psi(s) = \phi(s) + \phi_0$).

Удобство введения новых переменных становится особенно заметным при рассмотрении неоднородных уравнений, какими являются нелинейные уравнения, полученные в предыдущей главе:

$$x'' + K(s)x = g(x, s). \quad (2.4.9)$$

В новых переменных это уравнение примет вид

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} + \nu^2\zeta = \nu^2\beta^{3/2}g(x, s). \quad (2.4.10)$$

Приближенное решение уравнений типа (2.4.9) или (2.4.10) всегда основано на знании невозмущенного решения, а возмущение учитывается как малая поправка к нему. Поэтому простота невозмущенного (т.е., с нулевой правой частью) решения уравнения (2.4.10) является его несомненным и существенным преимуществом по сравнению с исходным уравнением (2.4.9) при нахождении приближенного решения методами теории возмущений.

Хотелось бы также отметить, что замена переменных (аналогично преобразованию Флоке), которая позволяет упростить формулировку и решение задачи является распространенным и действенным приемом при исследовании нелинейной динамики.

Дополнительная литература

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
2. E.Courant and H.Snyder, Ann. of. Phys. **3**, 1 (1958).
3. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц. «Атомиздат», М., 1970.
4. А.А.Коломенский. Физические основы методов ускорения заряженных частиц. Издательство МГУ, М., 1980.
5. А.Н.Лебедев, А.В.Шальнов. Основы физики и техники ускорителей. «Энерго-атомиздат», М., 1991.
6. К.Штеффен. Оптика пучков высокой энергии. «Мир», М., 1969.

Глава 3. Источники нелинейного возмущения

В ускорителе существует большое количество источников нелинейного возмущения связанных с внешними электромагнитными полями, с полем собственного сгустка частицы, с полями, наведенными пучком в окружающей проводящей структуре и т.д. Все их привести и классифицировать достаточно трудно, поэтому ниже описывается ряд возможных источников возникновения нелинейных полей в ускорителе, в основном связанных с внешними полями, и проводится оценка их величины. Поле встречного сгустка для удобства изложения рассматривается в Главе 16.

3.1 Классификация нелинейностей магнитного поля

Внешнее магнитное поле в параксиальном приближении задается рядами (1.20) и (1.21), которые содержат нелинейные члены. Заметим, однако, что уравнения (1.15) и (1.16) являются нелинейными даже для идеального линейного поля из-за множителя $(1 + hx)^2$, который появляется при повороте орбиты пучка магнитным полем. Такая кинематическая нелинейность мала в большинстве практических случаев, т.к. она пропорциональна $h = 1 / \rho$ или $h^2 = 1 / \rho^2$, а радиус поворота имеет порядок нескольких метров или десятков метров, что на много порядков больше амплитуды колебаний частицы.

Если эту нелинейность нужно учитывать (например, в случае сильного сверхпроводящего магнита с малым радиусом поворота), она не приводит к новым эффектам, а лишь меняет значение коэффициентов ряда разложения силы, действующей на пучок $f_{nm}(s)x^n z^m$. Поэтому далее мы будем пренебрегать кинематическими нелинейностями.

Кроме того, обратим внимание на тот факт, что в коэффициенты разложения магнитного поля могут входить как поперечные, так и продольные производные. Например, коэффициент при z^2 в (1.20) имеет вид:

$$(h'' + hk + m) = \frac{1}{B\rho} \left(\frac{d^2 B_z}{ds^2} + B_{z0} \cdot \frac{dB_z}{dx} + \frac{d^2 B_z}{dx^2} \right).$$

На рис.3.1.1 показана кривизна поля поворотного магнита и ее вторая производная по продольной координате, которая, как несложно видеть, отлична от нуля на краю магнита в короткой области спада и подъема поля.

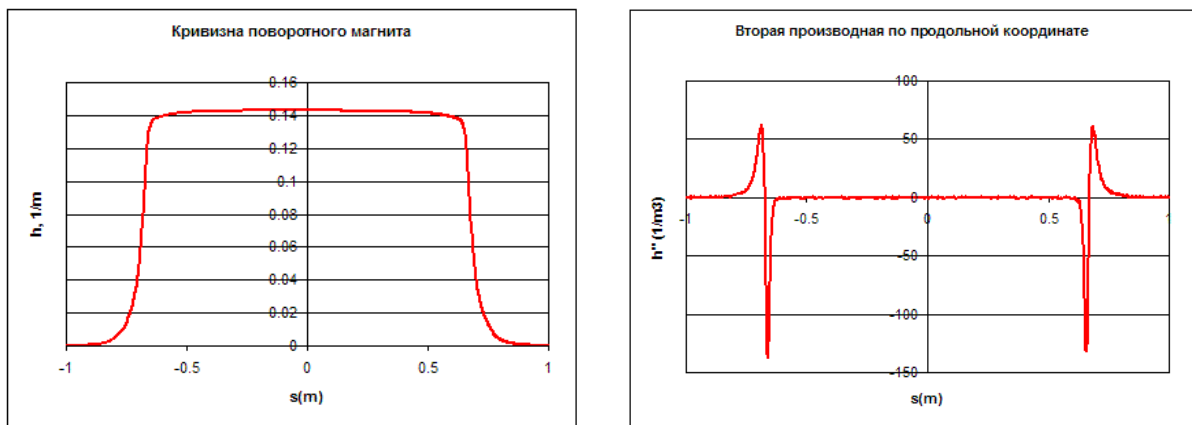


Рис.3.1.1 Измеренная зависимость кривизны $h(s)$ для дипольного поворотного магнита (слева) и ее вторая производная $h''(s) = d^2 h / ds^2$

Тот факт, что, как правило, длина магнитов существенно больше, чем апертура (и, следовательно, вклад краевой области в продольное распределение поля мал) и позволяет пользоваться кусочно-постоянным приближением, описанным в предыдущей главе. Практически важный случай периодических магнитных систем («змеек» и ондуляторов), для которых основные нелинейные эффекты порождаются как раз продольной вариацией магнитного поля, рассмотрен в Главе 17.

С учетом вышесказанного мы будем использовать в разложении магнитного поля (если другое не оговорено специально) только поперечные производные $d^n B_z / dx^n$, так что ряды (1.20) и (1.21), с точностью до кубической нелинейности, примут вид

$$\frac{1}{B\rho} B_z(x, z, s) = h(s) + k(s)x + \frac{1}{2}m(s)(x^2 - z^2) + \frac{1}{6}n(s)(x^3 - 3xz^2) + \dots \quad (3.1.1)$$

$$\frac{1}{B\rho} B_x(x, z, s) = k(s)z + m(s)xz + \frac{1}{6}n(s)(3x^2z - z^3) + \dots, \quad (3.1.2)$$

где

$$n(s) = \frac{O(s)}{B\rho} = \frac{1}{B\rho} \left. \frac{d^3 B_z}{dx^3} \right|_{x=z=0}. \quad (3.1.3)$$

подстановка (3.1.1) и (3.1.2) в (1.15) и (1.16) приводит к уравнениям с ненулевой правой частью вида

$$z'' + K_z(s)z = -m(s)xz - \frac{1}{6}n(s)(z^3 + 3x^2z) - \dots, \quad (3.1.4)$$

$$x'' + K_x(s)x = \frac{1}{2}m(s)(x^2 - z^2) + \frac{1}{6}n(s)(x^3 - 3xz^2) + \dots \quad (3.1.5)$$

3.2 Натуральный хроматизм и его компенсация

Нелинейные поля, представленные правой частью (3.1.4) и (3.1.5), могут быть поделены на те, которые намеренно вносятся в структуру ускорителя, и те, которые получаются вне желания разработчика из-за различного рода неизбежных погрешностей или по другим причинам. К первым, прежде всего, относится квадратичная составляющая $m(s)$, необходимая для компенсации натурального хроматизма.

Т.к. в исходные уравнения движения (1.15) и (1.16) входит импульс частицы p , то и фокусирующие коэффициенты уравнений бетатронных колебаний тоже зависят от импульса (энергии) частицы. Следовательно, частоты бетатронных колебаний для частиц с различной энергией будут разными. С точностью до первого порядка по относительному отклонению энергии $\delta = (p - p_0)/p_0$, частоту бетатронных колебаний можно записать как

$$\nu = \nu_0 + \frac{\partial \nu}{\partial \delta} \delta + \dots, \quad (3.2.1)$$

где величина, характеризующая зависимость бетатронной частоты от импульса

$$\xi = \frac{\partial \nu}{\partial \delta} \quad (3.2.2)$$

и называется натуральным (линейным) хроматизмом. Зная хроматизм, изменение частоты колебаний находим как

$$\Delta \nu = \xi \cdot \delta = \xi \cdot \frac{\Delta p}{p_0} = \xi \cdot \frac{p - p_0}{p_0}. \quad (3.2.3)$$

С другой стороны, из курса линейной оптики заряженных частиц известно, что ошибка градиента квадрупольной линзы $\Delta G = G - G_0$ приводит к сдвигу частоты бетатронных колебаний на величину

$$\Delta \nu = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e}{p_0} \Delta G(s) \beta(s) ds = \frac{1}{4\pi} \int \Delta k(s) \beta(s) ds, \quad (3.2.4)$$

где, напомним, $k = (e/p) \cdot G$ (смотри (1.22)). В рассматриваемом случае, в квадрупольной линзе с одним и тем же градиентом движутся частицы с различной энергией, что эквивалентно «ошибке» градиента

$$\Delta k = G_0 \left(\frac{e}{p} - \frac{e}{p_0} \right) = G_0 \left(\frac{e}{p_0 + \Delta p} - \frac{e}{p_0} \right) \approx -\frac{e}{p_0} G_0 \frac{\Delta p}{p_0} = -k_0 \delta. \quad (3.2.5)$$

Подставляя (3.2.5) в (3.2.4) и сравнивая с (3.2.3), можно найти выражение для линейного хроматизма, вносимого квадрупольными линзами

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \oint k_0(s) \beta(s) ds. \quad (3.2.6)$$

Несмотря на то, что другие магнитные элементы также способны вносить вклад в хроматизм, основной вывод, который можно сделать из (3.2.6), остается справедливым: чем сильнее фокусировка в ускорителе, тем больше линейный хроматизм. В небольших установках он имеет порядок несколько единиц, в то время как в ускорителях на высокую энергию хроматизм может достигать значения порядка -100 . Если при этом характерный разброс энергий в пучке $\sim 0.5\%$, то такой хроматизм приводит к разбросу бетатронных частот ~ 0.5 . Понятно, что, как

бы аккуратно мы ни устанавливали исходную частоту ν_0 вдали от резонансов, большой разброс частот ведет к тому, что у части частиц частоты будут совпадать с резонансными, и эти частицы будут выбывать из пучка до тех пор, пока не погибнет весь пучок.

Для компенсации линейного хроматизма приходится вводить в структуру ускорителя специальные магнитные элементы, у которых градиент является функцией импульса. Простейшими магнитами такого рода являются секступольные линзы (рис.3.2.1).

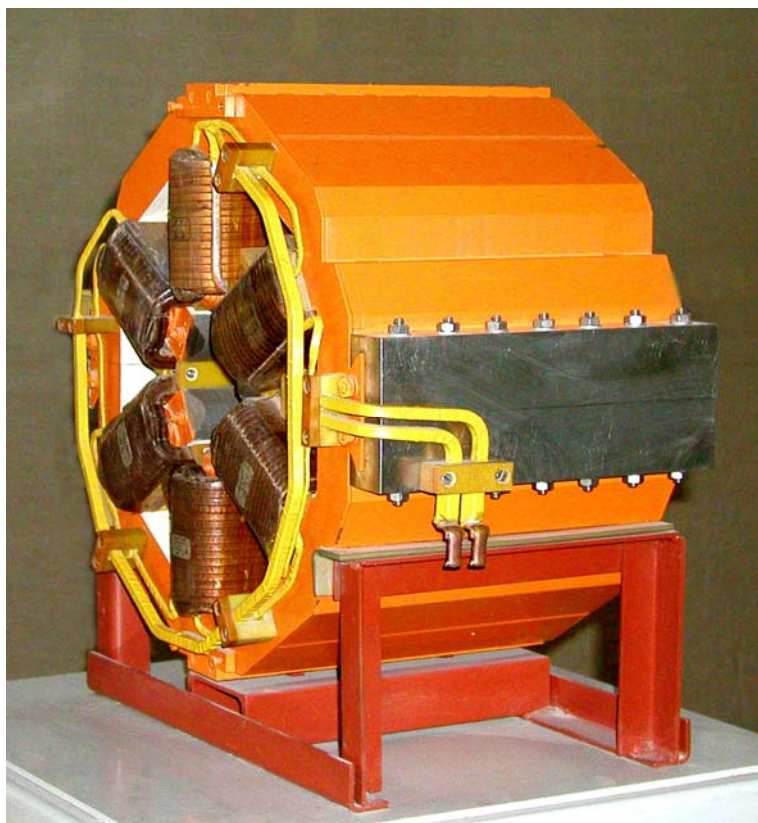


Рис.3.2.1 Внешний вид секступольной линзы.

Магнитное поле такой линзы зависит от горизонтальной координаты как

$$\frac{e}{p_0} B_z = \frac{1}{2} m(s) x^2, \quad (3.2.7)$$

продифференцировав это выражение по x (чтобы получить градиент) и вспомнив, что горизонтальное отклонение зависит от импульса через дисперсионную функцию

$$x_\delta = \eta(s) \cdot \delta \quad (3.2.8)$$

для секступольной линзы можно получить фокусирующий коэффициент, зависящий от импульса частицы.

$$\Delta k_s(s) = \frac{e}{p_0} \frac{dB_z}{dx} = m(s) x_\delta = m(s) \eta(s) \delta, \quad (3.2.9)$$

и, следовательно, вклад секступольного магнита в хроматизм будет равен

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \oint m(s) \eta(s) \beta(s) ds. \quad (3.2.10)$$

Использование секступольных линз ведет к появлению квадратичной нелинейности в уравнениях движения. Для грубой оценки величины силы секступольной линзы, необходимой для компенсации хроматизма, предположим, что хроматизм, создаваемый квадрупольной линзой (3.2.6), компенсируется здесь же локально секступольным полем (3.2.10), так что

$$m = \frac{k_0}{\eta} \quad \text{или} \quad B'' = \frac{d^2 B_z}{dx^2} = \frac{G}{\eta}. \quad (3.2.11)$$

Характерные значения $G = 1$ кГс/см и $\eta = 100$ см приводят к $B'' = 10$ Гс/см².

Реально из-за экономии места количество секступольных линз значительно

меньше, чем квадрупольных, поэтому их сила может достигать $B'' = 100-500$ Гс/см² при характерной длине 10-50 см.

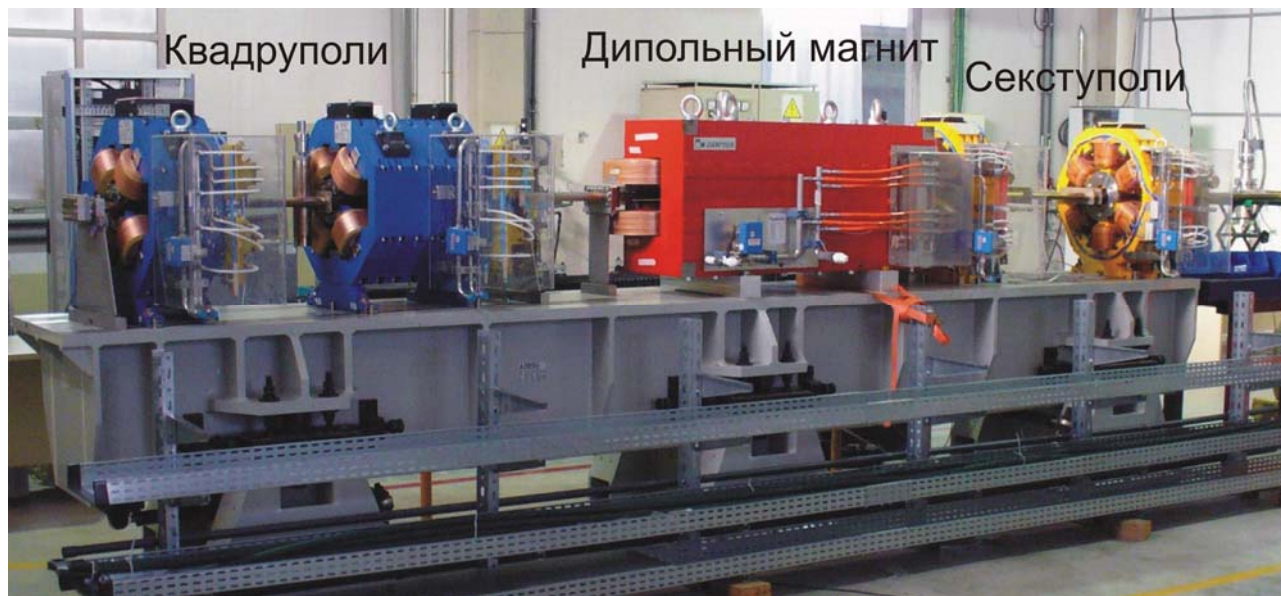


Рис.3.2.2 Магниты источника синхротронного излучения ALBA

На рис.3.2.2 показаны дипольный поворотный магнит, квадрупольные фокусирующие линзы и секступольные линзы, компенсирующие натуральный хроматизм, для источника синхротронного излучения ALBA (Испания).

3.3 Нелинейные ошибки магнитного поля основных элементов

Кроме нелинейных полей, намеренно вносимых в магнитную структуру ускорителя для решения тех или иных задач, нелинейные компоненты всегда содержатся в поле основных дипольных и квадрупольных магнитов. Одни из них связаны с неизбежными неточностями изготовления и сборки магнитов (такие нелинейные ошибки называют случайными), другие – с особенностью конструкции

магнитов (в основном, с конечной шириной полюса) и неустранимы даже при идеальной сборке и изготовлении (систематические ошибки).

Обычно допустимое содержание нелинейных составляющих магнитного поля задается в виде относительного отличия поля реального магнита от идеального на некотором заданном расстоянии от оси магнита (как правило, совпадающей с осью пучка):

$$\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{B_{real} - B_0}{B_0}.$$

Характерная величина ошибки $\Delta B / B_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$ и зависит от типа, размеров и конструкции магнита.

Уменьшение случайной ошибки достигается ужесточением допусков механической обработки и сборки магнитов, а систематической – специальным профилированием полюсов магнита. В качестве случайной ошибки могут фигурировать любые компоненты разложения поля в окрестности оси пучка, в то время, как только определенные систематические разрешены симметрией магнита. Последнее положение поясним на примере дипольного магнита (рис.3.3.1).

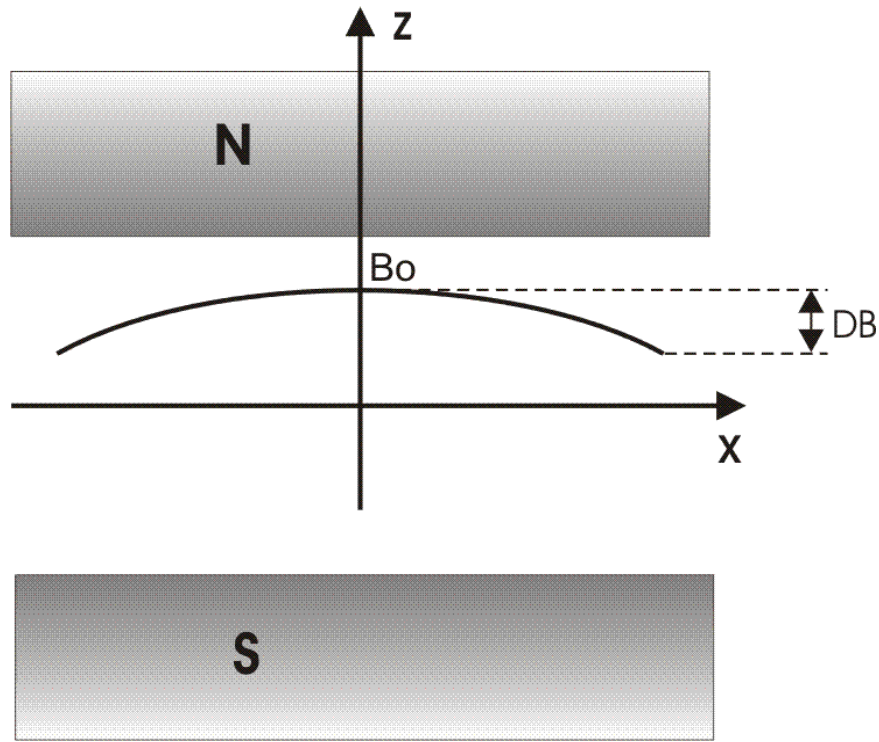


Рис.3.3.1 Нелинейность, связанная с шириной полюса магнита.

Конечная ширина полюса магнита обуславливает постепенный спад поля по сравнению со значением в центре, причем функция, описывающая зависимость поля от горизонтальной координаты, должна быть четной по условиям симметрии: $B(x) = B_0 + B_2x^2 + B_4x^4 + \dots$. Для оценки оставим только квадратичный член:

$$B(x) = B_0 + \Delta B(x) \approx B_0 + \frac{1}{2} B'' x^2,$$

поле в центре $B_0 = 10$ кГс, а качество поля определено как $\Delta B / B_0 = 10^{-3}$ в области $|x| \leq \pm 2$ см. Несложно видеть, что квадратичная нелинейность (секступольная составляющая поля) при этом равна $B'' = 5$ Гс/см². Эта величина существенно меньше, чем в секступольной линзе, компенсирующей хроматизм, однако, не сле-

дует забывать, что суммарная длина поворотных магнитов гораздо больше, чем суммарная длина секступольных линз, и интегральный вклад систематической квадратичной ошибки поля поворотных магнитов может быть значительным. Именно поэтому требования к качеству поля поворотных магнитов весьма высоки: $\Delta B / B_0 = 1 \div 2 \cdot 10^{-4}$.

3.4 Вихревые токи в вакуумной камере синхротрона

Теперь рассмотрим нелинейности, вносимые вихревыми токами в вакуумной камере синхротрона. Для того чтобы при подъеме энергии пучка частиц в синхротроне радиус орбиты не менялся, величина магнитного поля должна расти пропорционально энергии. Переменное магнитное поле приводит к появлению э.д.с. в металлических стенках вакуумной камеры, как это показано на рис.3.4.1.

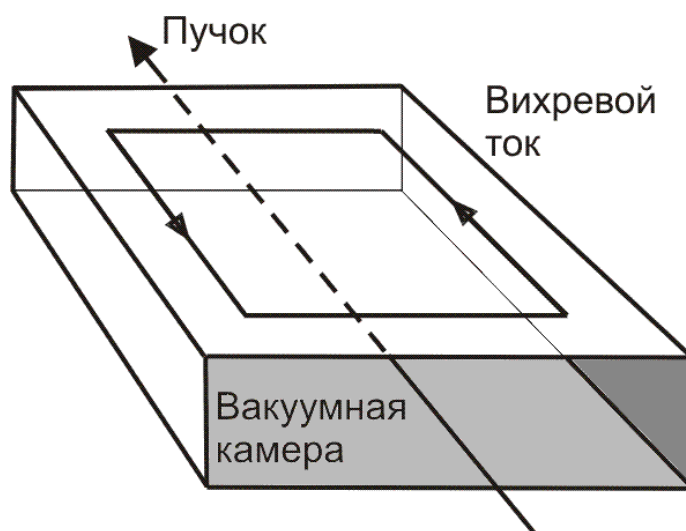


Рис.3.4.1 Вихревые токи в вакуумной камере синхротрона.

Циркуляция напряженности вихревого электрического поля $\vec{E}$ вдоль замкнутого контура L проводника дается выражением

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad (3.4.1)$$

где магнитный поток сквозь поверхность равен

$$\Phi_m = \int_s B_n ds. \quad (3.4.2)$$

Если длина контура (вакуумной камеры в магните) много больше ширины, равной $\pm x$, то напряженность электрического поля приблизительно равна

$$E = x \frac{dB}{dt} = x\dot{B}, \quad (3.4.3)$$

и для материала с удельной проводимостью σ плотность вихревых индукционных токов

$$j = \sigma E = \sigma x \dot{B}. \quad (3.4.4)$$

Полный ток, текущий внутри области между $x = 0$ и x , можно получить, интегрируя (3.4.4) в этих пределах и умножив на 2 из-за наличия двух поверхностей: нижней и верхней

$$I = d\sigma \dot{B} x^2, \quad (3.4.5)$$

где d - толщина вакуумной камеры.

Как известно, величина магнитной индукции в зазоре h магнита (предполагается, что насыщение железа ярма магнита мало) равна

$$B = \mu_0 (I_c + I) / h, \quad (3.4.6)$$

где в данном примере мы должны учитывать кроме обычного полного тока возбуждения I_c , текущего в обмотке магнита, вихревой ток I (3.4.5). Соответственно, полное поле на орбите будет равно

$$B(x) = B_0 + \Delta B = B_0 + \mu_0 \sigma \dot{B} \frac{d}{h} x^2 = B_0 + \frac{1}{2} B''_{ec} x^2, \quad (3.4.7)$$

иными словами, учет вихревых токов в вакуумной камере синхротрона приводит к квадратичной нелинейности B''_{ec} , аналогичной нелинейности секступольной линзы. Взяв для оценки характерные величины: $\mu_0 \sigma \approx 2 \text{ с/м}^2$ (для нержавеющей стали), магнитное поле, которое изменяется от 0.1 Т до 1 Т за 0.1 секунды (т.е., $\dot{B} = 9 \text{ Т/с}$), зазор между полюсами магнита $h = 50 \text{ мм}$ и толщину вакуумной камеры $d = 0.5 \text{ мм}$, получим квадратичную нелинейность, вносимую вихревыми токами

$$B''_{ec} = 0.36 \text{ Т/м}^2 = 0.36 \text{ Гс/см}^2.$$

Эта величина кажется небольшой, однако для нее также верны соображения о большой суммарной длине поворотных магнитов в структуре синхротрона. Кроме того, эта нелинейность весьма опасна в первый момент ускорения, когда энергия частиц еще мала.

Дополнительная литература

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
2. E.Courant and H.Snyder, Ann. of. Phys. **3**, 1 (1958).
3. К.Штеффен. Оптика пучков высокой энергии. «Мир», М., 1969.

Глава 4. Метод степенных рядов

4.1 Кубическая нелинейность

При анализе нелинейных задач широко используются методы теории возмущений, когда вместо исходной динамической задачи изучается близкая к ней задача, с известным решением, на которую действует «возмущение». Характеризуя различие между этими системами малым параметром ε , и располагая невозмущенным решением, мы ищем возмущенное решение в виде разложения по степеням ε .

Мы начнем с простейшего случая: одномерного горизонтального движения, описываемого уравнением (4.1.2). Причем, вначале в правой части мы оставим только кубическую нелинейность, которая, в определенном смысле, оказывается проще для изучения, чем старший, квадратичный, член:

$$x'' + K_x(s)x = \frac{1}{6} n(s)x^3. \quad (4.1.1)$$

Кроме того, будем рассматривать азимутально-симметричный случай, когда $K_x(s) = \text{const}$ и $n(s) = \text{const}$.

Для перехода от нелинейного уравнения Хилла к уравнению математического маятника с возмущением, воспользуемся преобразованием Флоке

$$\frac{d^2\zeta}{d\psi^2} + \nu_0^2\zeta = -\frac{1}{6} \nu_0^2 n \beta^3 \zeta^3, \quad (4.1.2)$$

и введем, для упрощения записи, следующие обозначения: $x = \zeta$, $t = \psi$, $\omega = \nu$ и

$\alpha = -\frac{1}{6}n\beta^3$, так что уравнение (4.1.2) примет следующий вид

$$x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon \alpha \omega_0^2 x^3. \quad (4.1.3)$$

Подобное написание подчеркивает, что уравнение (4.1.3) описывает проблему, более общую, чем рассматриваемая. Например, такое же уравнение получается при рассмотрении синхротронного движения в ускорителе или при исследовании движения нелинейного маятника. В правую часть (4.1.3) мы ввели малый безразмерный параметр ε , чтобы явно выделить кубический член как возмущение и для удобства вычислений. В полученном результате нужно будет положить $\varepsilon = 1$. Реально малым (неявным) параметром является амплитуда бетатронных колебаний.

Попытаемся найти решение (4.1.3) в виде ряда по параметру малости

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (4.1.4)$$

Подставив этот ряд в (4.1.3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях уравнения, в нулевом порядке получим уравнение гармонического осциллятора с решением

$$x_0 = A \cos \omega_0 t, \quad (4.1.5)$$

где мы предполагаем начальные условия $x_0(0) = A$, $x'_0(0) = 0$. Тогда в первом порядке по ε уравнение движения примет вид

$$x_1'' + \omega_0^2 x_1 = \alpha \omega_0^2 x_0^3 = \alpha \omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega_0 t, \quad (4.1.6)$$

причем $\cos^3 \omega_0 t$ может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\cos^3 \omega_0 t = \frac{1}{4} (\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t). \quad (4.1.7)$$

Полное решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Напомним, что у уравнения

$$y'' + y = a \cdot \cos p(t + \alpha) \quad (4.1.8)$$

существует два типа частных решений

$$y = \frac{1}{2} at \sin(t + \alpha), \text{ при } p = 1, \quad (4.1.9)$$

$$y = \frac{a}{1 - p^2} \cos(t + \alpha), \text{ при } p \neq 1.$$

Применяя (4.1.9) к уравнению (4.1.6) с правой частью, представленной в виде (4.1.7), для первого слагаемого получим частное решение

$$x_{11} = -\frac{1}{32} \alpha A^3 \cos 3\omega_0 t, \quad (4.1.10)$$

а для второго

$$x_{12} = \frac{3}{8} \alpha A^3 t \cdot \sin \omega_0 t. \quad (4.1.11)$$

Видно, что последнее решение линейно растет со временем независимо от начальной амплитуды A , тогда как интуитивно можно предположить (и это подтверждается опытом), что по крайней мере для очень малой амплитуды (которая, повторяем, является истинным параметром малости) движение должно быть близко к линейному, а следовательно, ограничено. Решение вида (4.1.11) называ-

ется секулярным и в данном случае возникает вследствие выбора неподходящего вида приближенного решения (4.1.4).

Корректный подход, разработанный Линдштедтом (а сам метод решения называется методом Пуанкаре-Линдштедта), состоит в одновременном разложении по степеням ε как отклонения x , так и частоты ω . Пусть $x = x(\omega t)$ является периодической функцией ωt с периодом 2π . Разложим x и ω по степеням ε , так что наряду с (4.1.4) имеем

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \quad (4.1.12)$$

Подстановка этих разложений в (4.1.6) дает

$$(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \dots)(x_0'' + \varepsilon x_1'' + \dots) + \omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) = \alpha\varepsilon\omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^3, \quad (4.1.13)$$

где штрих обозначает производную по аргументу ωt . В нулевом порядке имеем

$$x_0'' + x_0 = 0, \quad (4.1.14)$$

с решением $x_0 = A \cos \omega t$. Уравнение первого порядка имеет вид

$$\omega_0^2 x_1'' + 2\omega_0\omega_1 x_0'' + \omega_0^2 x_1 = \alpha\omega_0^2 x_0^3, \quad (4.1.15)$$

или

$$x_1'' + x_1 = -2 \frac{\omega_1}{\omega_0} x_0'' + \alpha x_0^3. \quad (4.1.16)$$

Подставляя в правую часть (4.1.16) решение нулевого порядка $x_0 = A \cos \omega t$, получим

$$x_1'' + x_1 = 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} A \cos \omega t + \frac{\alpha}{4} A^3 (\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t), \quad (4.1.16)$$

Условие периодичности $x = x(\omega t)$ требует, чтобы коэффициент при $\cos \omega t$ обращался в ноль, иначе в решении возникнут секулярные члены. Это можно сделать правильным выбором свободного параметра ω_1 :

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} \alpha \omega_0 A^2. \quad (4.1.17)$$

Легко видеть, что при таком выборе решение уравнения (4.1.16) есть

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_1 \sin \omega t - \frac{\alpha}{32} A^3 \cos 3\omega t. \quad (4.1.18)$$

В частности, для начальных условий $x_1(0) = x_1'(0) = 0$ (напомним, что начальную амплитуду колебаний мы задали в нулевом порядке) решение первого порядка примет вид

$$x_1 = \frac{\alpha}{32} A^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t), \quad (4.1.19)$$

а полное решение (4.1.3) до первого порядка включительно запишется как

$$x = A \cos \omega t + \frac{\alpha}{32} A^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t). \quad (4.1.20)$$

Рассматриваемый простейший случай уже показал ряд важных отличий нелинейного движения от линейного. Нелинейное возмущение привело к тому, что теперь частота колебаний системы не является постоянной для разных частиц, а зависит от амплитуды их колебаний (точнее, от квадрата амплитуды, согласно (4.1.17)). Это свойство называется неизохронностью системы. Кроме того, решение включает несколько гармоник основной частоты (в рассматриваемом случае – первую и третью), т.е., является негармоническим.

Посмотрим, к чему приводит ангармоничность колебаний для фазовых траекторий системы. Производная (4.1.20) по аргументу ωt записывается как

$$x' = -A \sin \omega t - \frac{\alpha}{32} A^3 (\sin \omega t - 3 \sin 3\omega t). \quad (4.1.21)$$

Возведем (4.1.20) и (4.1.21) в квадрат и сложим. Напомним, что для линейного движения фазовые траектории были бы окружности с радиусом, определяемым начальной амплитудой

$$x^2 + x'^2 = A^2. \quad (4.1.22)$$

В рассматриваемом же нелинейном случае это уже не так:

$$x^2 + x'^2 \approx A^2 - \frac{\alpha}{16} A^4 \cos 4\omega t - \left(\frac{\alpha}{16}\right)^2 A^6 (\cos 2\omega t + \cos 6\omega t), \quad (4.1.23)$$

здесь при каждой гармонике мы оставили только главные по параметру малости (амплитуде колебаний) члены.

Из (4.1.20) видно, что окружность радиуса $R_0 = A$, $A \ll 1$ искажена четвертой гармоникой частоты колебаний (но величина искажения $\Delta R \sim A^2$), а также второй и шестой (но величина искажения еще меньше $\Delta R \sim A^3$). Схематично это показано на рис. 5.1.1.

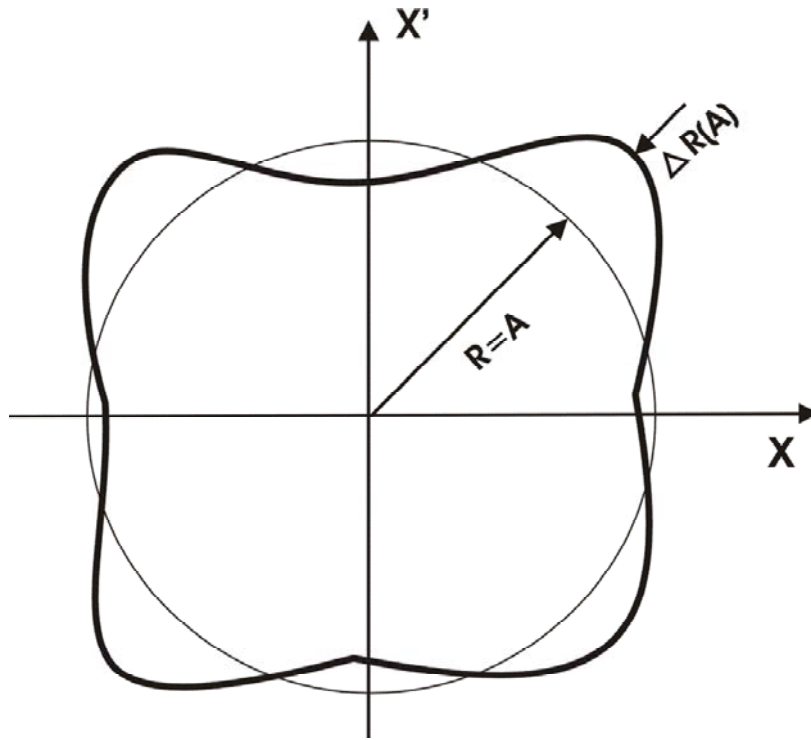


Рис.4.1.1 Нелинейное искажение фазовых траекторий

Очевидно, что с увеличением начальной амплитуды колебаний A , глубина «модуляции» фазовой окружности растет.

Продолжая рассмотрение фазовых траекторий в виде

$$x^2 + x'^2 = (R_0 + \Delta R(A))^2, \quad (4.1.24)$$

где $R_0 = A$, а ΔR является некоторой функцией начального отклонения, для максимального искажения фазовой кривой (когда косинусы равны -1) можно записать следующую оценку

$$(R_0 + \Delta R_{\max})^2 = A^2 \left(1 + \frac{\alpha}{16} A^2 + \left(\frac{\alpha}{16} \right)^2 A^4 + \dots \right). \quad (4.1.25)$$

Естественно было бы потребовать, чтобы по мере добавления новых порядков решения, ряд

$$S = \sum_n a_n = \sum_n \left(\frac{\alpha}{16} \right)^n A^{2n}, \quad (4.1.26)$$

оказывался бы сходящимся. Применяя к (4.1.26) признак сходимости рядов Коши (хотя и признак Даламбера дает тот же результат), получим

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\alpha}{16} A^2 < 1. \quad (4.1.27)$$

Иными словами, решение, предложенное ранее в виде ряда, существует не для любой начальной амплитуды колебаний A , а только при

$$A < \frac{4}{\sqrt{\alpha}}. \quad (4.1.28)$$

Конечно, ввиду грубости оценки, полученный результат можно рассматривать только как иллюстрацию, однако иллюстрацию очень важного аспекта нелинейной динамики. В отличие от невозмущенного случая, где движение частицы было ограничено только внешними геометрическими факторами (например, стенками вакуумной камеры), возмущенное движение содержит в себе ограничение возможной амплитуды колебаний. Движение с амплитудой больше некоторой оказывается неустойчивым, а апертюра, определяемая предельно допустимой начальной амплитудой (4.1.28), называется динамической апертурой. Причем из (4.1.25) можно сделать достаточно естественный вывод: чем больше величина возмущения α , тем меньше динамическая апертюра.

В конце рассмотрения мы можем перейти к исходным переменным задачи $A = A_x / \sqrt{\beta_x}$, $\omega = \nu$ и $\alpha = -n\beta^3 / 6$, и записать поправку к частоте бетатрон-

ных колебаний, возмущенных кубической нелинейностью, для случая азимутально-симметричного магнитного поля:

$$\Delta \nu = \frac{1}{16} n A_x^2 \beta_x^2 \nu_0. \quad (4.1.29)$$

4.2 Квадратичная нелинейность

Метод степенных рядов решения позволяет продолжить поиск решений более высоких порядков. Очевидно, однако, что с каждым шагом процедура поиска решения становится все более сложной: растет число членов степенного ряда, растет число гармоник решения и т.д. Поэтому закономерным является вопрос: до какого порядка мы должны проводить разложение, чтобы, с одной стороны, получение его было технически возможным, а с другой – полученное решение отражало поведение системы достаточно правдоподобно.

Вопрос этот не прост, и мы будем возвращаться к нему неоднократно. Сейчас же как иллюстрацию нетривиальности проблемы рассмотрим квадратичное возмущение движения частицы в циклическом ускорителе (первое слагаемое в правой части уравнения (4.1.2))

$$x'' + K_x(s)x = \frac{1}{2} m(s)x^2, \quad (4.2.1)$$

или, после преобразования Флоке

$$\frac{d^2 \zeta}{d\psi^2} + \nu_0^2 \zeta = -\frac{1}{2} \nu_0^2 m \beta^{5/2} \zeta^2, \quad (4.2.2)$$

и, окончательно, после упрощения записи аналогично (4.1.3)

$$x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon \alpha \omega_0^2 x^2, \quad (4.2.3)$$

где теперь $\alpha = -\frac{1}{2} m \beta^{3/2}$. Представляя решение в виде рядов (4.1.4) и (4.1.12) и проводя расчеты аналогично (4.1.13-16), получим уравнение первого порядка приближения

$$x_1'' + x_1 = 2A \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \omega t + \alpha A^2 \cos^2 \omega t = 2A \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \omega t + \frac{\alpha A^2}{2} (1 + \cos 2\omega t). \quad (4.2.4)$$

Чтобы избежать секулярности в решении первого порядка, необходимо приравнять $\omega_1 = 0$. Иными словами, квадратичная нелинейность в первом порядке приближения не приводит к зависимости частоты колебаний от амплитуды. Но значит ли это, что данный тип возмущения вообще не приводит к такой зависимости? Продолжим решение в следующем порядке.

Решение уравнения (4.2.4) с начальными условиями, заданными в предыдущем параграфе, имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{6} \alpha A^2 (3 - 2 \cos \omega t - \cos 2\omega t), \quad (4.2.5)$$

а уравнение второго порядка приближения ($\sim \varepsilon^2$) записывается как

$$x_2'' + x_2 = 2\alpha x_0 x_1 - 2x_0'' \frac{\omega_2}{\omega_0}. \quad (4.2.6)$$

Или, после подстановки в правую часть решений нулевого и первого порядков и приведения подобных

$$x_2'' + x_2 = -\frac{1}{6}\alpha^2 A^3 + \left(\frac{5}{6}\alpha^2 A^3 + 2A\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)\cos\omega t - \frac{1}{6}\alpha^2 A^3(\cos 2\omega t + \cos 3\omega t). \quad (4.2.7)$$

Для получения регулярного движения во втором порядке мы должны положить

$$\omega_2 = -\frac{5}{12}\alpha^2\omega_0 A^2, \quad (4.2.8)$$

т.е. второй порядок решения для секступольного возмущения приводит к такой же квадратичной зависимости частоты колебаний системы от амплитуды, как первый порядок октупольного возмущения (4.1.17). Видно, что если бы мы в данном случае ограничились только первым порядком решения, то результат (отсутствие зависимости частоты от амплитуды) был бы неправильным.

Возврат к координатам исходной задачи приводит к выражению

$$\Delta\nu = -\frac{5}{48}mA_x^2\beta_x^4\nu_0. \quad (4.2.9)$$

Получение полного решения второго порядка достаточно трудоемко и не приводит к принципиально новым результатам (уже из (4.2.7) ясно появление различных гармоник в решении).

4.3 Резонансы

До сих пор мы для простоты предполагали, что правая часть уравнений (4.1.3) и (4.2.3) не является функцией независимой переменной t (в нашем случае роль времени играет фазовая функция бетатронных колебаний $\psi(\theta)$). Однако, и нелинейный коэффициент в уравнение, и бета-функция зависят от азимутального

угла $\theta = s / R$. Следовательно, в общем случае неоднородное уравнение записывается как

$$x'' + \omega_0^2 x = g(t), \quad (4.3.1)$$

причем возмущение $g(t)$ периодическая функция, которая может быть представлена рядом Фурье (для простоты предположим, что функция четная)

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos n\Omega t. \quad (4.3.2)$$

Подставим это выражение в (4.3.1) и найдем частное решение также в виде ряда Фурье. Тогда для n -го члена ряда получим

$$x_n(t) = \frac{a_n}{\omega_0^2 - n^2\Omega^2} \cos n\Omega t. \quad (4.3.3)$$

Видно, что при $\omega_0 \approx \pm n\Omega$ имеет место резонанс, который приводит к появлению в рядах решения бесконечно больших членов, препятствующих сходимости рядов.

Полученный результат, с одной стороны, показывает, что описываемый метод неприменим для исследования поведения системы вблизи нелинейного резонанса, а с другой – дает понять, что это поведение (в частности, топология фазового пространства) должно существенно отличаться от нерезонансного.

Рекомендуемая литература

1. А.Лихтенберг и М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
2. Г.Е.О.Джакалья. Методы теории возмущений для нелинейных систем. «Наука», М., 1979.

5. Некоторые понятия механики Гамильтона

Рассмотренный в предыдущей главе метод построения рядов решения нелинейных уравнений по степеням малого параметра ε является весьма полезным и применяется как для исследования нелинейных систем вообще, так и циклических ускорителей в частности.

Однако наиболее развитыми, продуктивными и часто используемыми являются методы, основанные на результатах гамильтоновой механики. Как и раньше, решение задачи находится в виде степенных рядов по параметру малости, но процедура решения обеспечивает каноничность на каждом шаге, по крайней мере, с точностью достигнутого порядка малости. Иными словами, методы гамильтоновой механики обеспечивают выполнение теоремы Лиувилля о несжимаемости потока траекторий в фазовом пространстве консервативной системы на каждом шаге приближения. Для метода классических степенных рядов, рассмотренных ранее, это не так, и невыполнение теоремы Лиувилля вызывает накопление ошибки в решении, которая, в ряде случаев, может привести к неправильному результату.

Как мы уже видели, число членов ряда решения быстро растет по мере увеличения порядка приближения, особенно, если решать более реалистичную задачу, чем мы делали раньше, с учетом двумерных бетатронных колебаний и возмущением, зависящим от азимута. Канонические методы позволяют с большей «легкостью» получать решения высоких порядков. Кроме того, при использовании таких методов, зачастую вообще нет необходимости находить решение $x(t)$, поскольку многие практически важные свойства нелинейного движения (зависи-

мость частоты от амплитуды, размер динамической апертуры, форма фазовых траекторий и т.д.) могут быть получены значительно проще.

Предполагается, что читатель знаком с гамильтоновой механикой, и целью данной главы является напоминание тех ее положений, которые понадобятся в дальнейшем. Поэтому громоздкие доказательства и выводы, в основном, отсутствуют.

5.1 Канонические преобразования

Для системы с n степенями свободы имеется единственная функция $H(q, p, t)$, называемая гамильтонианом, и определяющая эволюцию системы во времени. Переменными являются n обобщенных координат q , n сопряженных им импульсов p и время t . Там, где это не противоречит смыслу, мы будем опускать подстрочный индекс при написании координат или импульсов. Движение системы определяют $2n$ уравнений Гамильтона

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (5.1.1)$$

где точка обозначает производную по времени.

Эффективным приемом при изучении динамических систем является замена переменных. Сама по себе такая замена не приводит к новой физике, поскольку свойства движения остаются неизменными и в старой, и в новой системе координат. Однако при правильно выбранном преобразовании можно получить гамильтониан, который в каком-то смысле легче поддается изучению, чем исходный. К

полученным результатам можно применить обратное преобразование к переменным исходной задачи.

Условием преобразования переменных является его каноничность. Иными словами, новые переменные $\bar{q}, \bar{p}$ так же, как и старые q, p , должны подчиняться уравнениям Гамильтона с новым гамильтонианом $\bar{H}$.

Правила такого преобразования находятся из вариационного принципа, согласно которому, и для новых, и для старых переменных выполняется условие

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \quad \text{и} \quad \delta \int (\bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - \bar{H}) dt = 0, \quad (5.1.2)$$

где (и далее) предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а координата и импульс между двумя состояниями системы меняются независимо. Условия (5.1.2) выполняются, только если выражения под интегралом отличаются на полную производную некоторой функции:

$$p_i \dot{q}_i - H = \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - \bar{H} + \frac{dF_1(q, \bar{q}, t)}{dt}, \quad (5.1.3)$$

где мы выбрали функцию F_1 (которая называется производящей функцией) зависящую от набора старых и новых переменных. Раскрывая полную производную

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} \dot{\bar{q}}_i, \quad (5.1.4)$$

и сравнивая (5.1.4) с (5.1.3) можно найти следующие правила преобразования

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}_i} \quad \text{и} \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (5.1.5)$$

Кроме F_1 можно определить еще три производящие функции смешанного (старых и новых) набора канонических переменных:

$$F_2(q, \bar{p}, t), \quad F_3(p, \bar{q}, t) \quad \text{и} \quad F_4(p, \bar{p}, t). \quad (5.1.6)$$

Например, F_2 , которую мы будем использовать далее, задает преобразование переменных в виде

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad \bar{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}} \quad \text{и} \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.1.7)$$

Возникает закономерный вопрос, к каким новым каноническим переменным нужно перейти, чтобы сделать изучение системы проще? Общего ответа на этот вопрос нет, и мы рассмотрим частный (но достаточно распространенный) пример. Возьмем полную производную одного из канонических импульсов

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5.1.8)$$

где первое слагаемое под знаком суммы равно нулю в силу независимости переменных, а второе отлично от нуля (и $\neq 0$) только при $i = k$. Кроме того, мы воспользовались определением уравнений Гамильтона (5.1.1). Теперь, если p_i не зависит явно от времени, а гамильтониан не зависит от сопряженной координаты q_i (которая тогда называется циклической координатой), импульс p_i является интегралом движения (т.е., сохраняется вдоль фазовой траектории системы)

$$p_i = \text{const} \quad \text{и} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i = \text{const}, \quad (5.1.9)$$

откуда непосредственным интегрированием находим решение в виде

$$q_i = \omega_i t + \alpha_i. \quad (5.1.10)$$

Если можно найти такое преобразование переменных, что все новые импульсы оказываются постоянными, то решение в новых переменных описывается (5.1.10), а обратное преобразование дает полное решение в исходных переменных.

5.2 Движение в фазовом пространстве

Решение уравнений Гамильтона (5.1.1) с n степенями свободы содержит $2n$ постоянных, соответствующих начальным значениям координат и импульсов. Они однозначно определяют эволюцию системы, которую можно представить как движение точки в $2n$ -мерном пространстве с координатами $(\vec{p}, \vec{q})$.

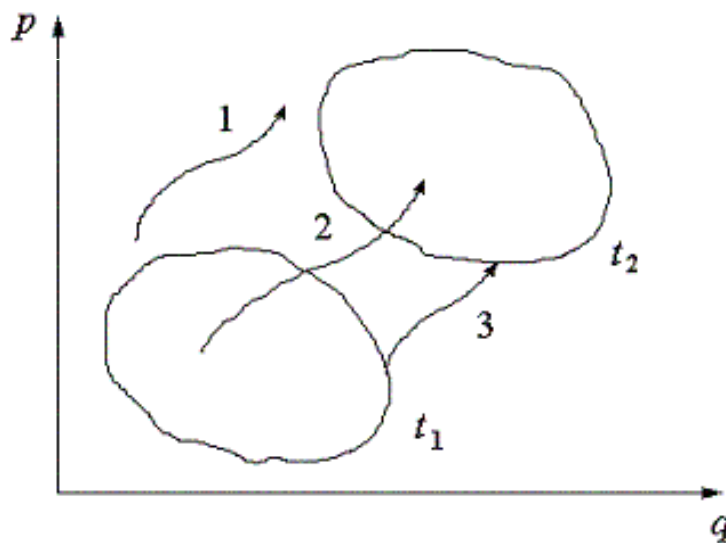


Рис.5.2.1. Траектории в фазовом пространстве.

Такое объединенное пространство $(\vec{p}, \vec{q})$ называется фазовым пространством системы. Примеры трех фазовых траекторий для двух моментов движения системы t_1 и t_2 показаны на рис.5.2.1.

Отметим три важных свойства фазового пространства.

1. В любой заданный момент времени траектории в фазовом пространстве не пересекаются (поскольку начальные условия однозначно определяют последующее движение).
2. Любая граница C_1 в фазовом пространстве, охватывающая некоторое множество начальных условий в момент времени t_1 , трансформируется в момент времени t_2 в границу C_2 , охватывающую траектории того же множества.
3. Поток траектории в фазовом пространстве несжимаем, иными словами, фазовый объем консервативной системы сохраняется (теорема Лиувилля).

Благодаря перечисленным свойствам анализ движения в фазовом пространстве приводит к значительным упрощениям при исследовании динамических задач. В частности, из теоремы Лиувилля можно показать существование специальных величин, называемых интегральными инвариантами, которые сохраняются при эволюции системы и играют важную роль в динамике гамильтоновых систем. Один из таких инвариантов, который будет необходим нам в дальнейшем, называется интегралом действия, и в случае одномерного движения определяется как

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq . \quad (5.2.1)$$

Интеграл действия может быть использован в качестве канонического импульса из предыдущего раздела, поскольку он сохраняется вдоль фазовой траек-

тории (такие переменные называются «действие-фаза» или «действие-угол»). Кроме того, он является адиабатическим инвариантом движения, т.е. остается приблизительно постоянным в случае медленного, по сравнению с периодом колебаний, изменения гамильтониана со временем.

Одним из основных методов анализа гамильтоновых систем является метод сечения Пуанкаре, заключающийся в последовательном понижении размерности изучаемой системы с помощью интегралов движения.

Если гамильтониан частицы не зависит от времени явно (см. ниже), он является интегралом движения. Будучи записанным в переменных «действие-фаза», он имеет вид

$$H(\varphi_x, J_x, \varphi_z, J_z) = const . \quad (5.2.2)$$

Топологическое изучение траекторий такой четырехмерной системы практически невозможно, поскольку ее траектория лежит на трехмерной энергетической поверхности $H = const$ в четырехмерном фазовом пространстве. Однако, тот факт, что гамильтониан является интегралом движения, позволяет выразить нам любую из четырех канонических переменных как функцию трех других, например,

$$J_z = f(\varphi_z, J_x, \varphi_x) . \quad (5.2.3)$$

Более того, поскольку интеграл действия $J_z(t) = const$, мы можем еще раз понизить размерность системы

$$J_x = f(\varphi_x, \varphi_z) . \quad (5.2.4)$$

Эта зависимость уже может быть представлена в виде трехмерной фазовой поверхности и доступна для изучения. Теперь, если зафиксировать еще одну из переменных, например $\varphi_z = \varphi_{z0} = const$, то мы придем к фазовой плоскости

$$J_x = f(\varphi_x, \varphi_{z0}), \quad (5.2.5)$$

на которой лежат двумерные фазовые траектории. Понижение размерности фазового пространства системы от поверхности к кривой на плоскости проиллюстрировано на рис.5.2.2.

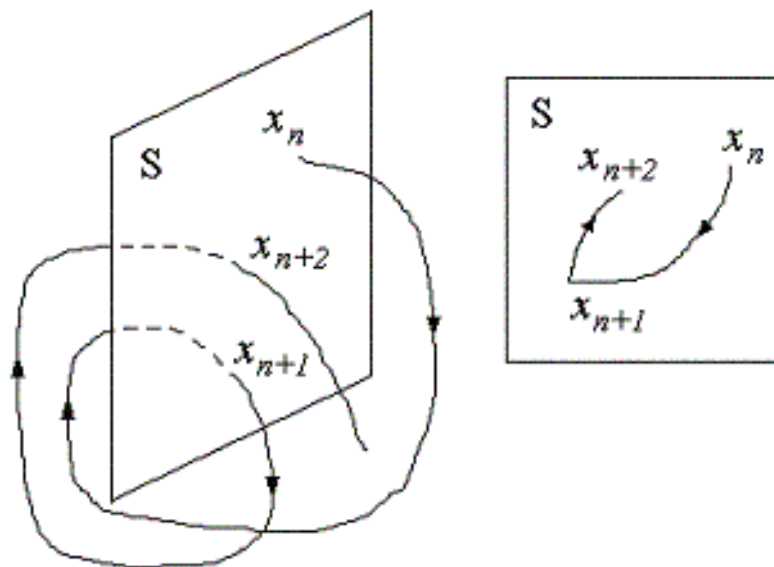


Рис.5.2.2 Сечение Пуанкаре в фазовом пространстве.

Мы не раз будем исследовать фазовые траектории, поскольку простые и наглядные топологические соображения позволяют многое сказать об особенностях системы.

5.3 Переменные действие-угол

Ранее было показано удобство такого канонического преобразования переменных, при котором новый сопряженный импульс $p_i = const$. Для периодических систем, для которых имеется два режима: колебание (p и q периодические функции времени) и вращение (p периодически зависит от q) удобно выбрать постоянные канонические импульсы специальным образом.

Будем считать интеграл действия

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq ,$$

новым каноническим импульсом. Тогда, согласно (5.1.10), сопряженная координата имеет вид

$$\varphi = \omega t + \alpha , \quad (5.3.1)$$

где α и ω - постоянные. Интегрируя φ по полному периоду колебаний T , получим

$$\Delta\varphi = \int_t^{t+T} d\varphi = \omega T . \quad (5.3.2)$$

С другой стороны, связь между новой координатой и новым импульсом может быть определена с помощью производящей функции F_2 (5.1.7)

$$\bar{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}} ,$$

что в нашем случае дает

$$\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial J} \quad \text{или} \quad d\varphi = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial J} \right) dq . \quad (5.3.3)$$

Подставляя (5.3.3) в (5.3.2) и меняя порядок дифференцирования, находим

$$\Delta\varphi = \oint \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial J} \right) dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint p dq = \frac{\partial}{\partial J} (2\pi J) = 2\pi. \quad (5.3.4)$$

Наконец, сравнивая (5.3.4) и (5.3.2), получим

$$\omega T = 2\pi, \quad (5.3.5)$$

т.е. постоянная ω есть не что иное, как частота колебаний системы. Таким образом, используя в качестве канонических переменные действие-угол, можно получать частоты колебаний системы без выяснения деталей движения и решения уравнений.

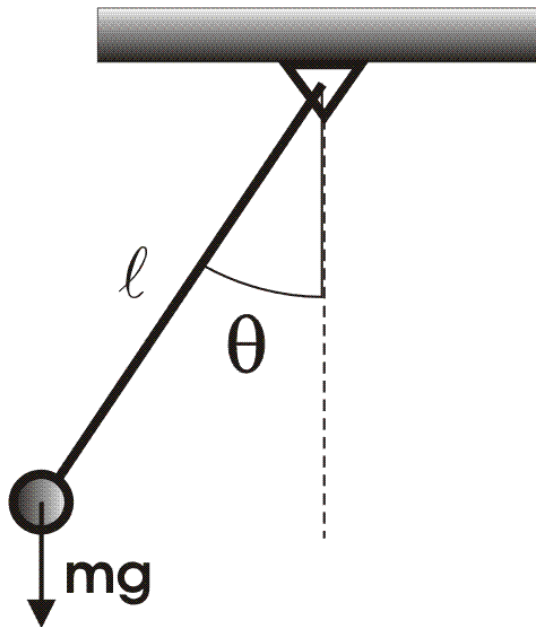


Рис.5.3.1 Математический маятник.

Продemonстрируем достоинства переменных действие-угол на примере математического маятника массой m , подвешенного на нити длиной l и совершающего колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести mg (рис.5.3.1).

Гамильтониан маятника есть сумма кинетической и потенциальной энергий (полная энергия системы)

$$H = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cdot (1 - \cos \theta) = E_0, \quad (5.3.6)$$

где $\theta = q$ – угол отклонения маятника от нижнего (устойчивого) положения, а сопряженный ему импульс $p = ml^2 \dot{\theta}$ – момент количества движения. Т.к. координата q есть аргумент косинуса, колебания являются нелинейными. Однако, если амплитуда отклонения маятника мала, раскладывая косинус в ряд, можно записать гамильтониан малых (линейных) колебаний маятника

$$H = a \frac{p^2}{2} + b \frac{q^2}{2} = E_0, \quad a = \frac{1}{ml^2}, \quad b = mgl. \quad (5.3.7)$$

Уравнения Гамильтона дают

$$p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -bq, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = ap. \quad (5.3.8)$$

Два дифференциальных уравнения первого порядка (5.3.8) могут быть записаны в виде одного уравнения второго порядка

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (5.3.9)$$

где частота и период колебаний равны

$$\omega_0 = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.3.10)$$

Теперь перейдем к переменным действие-угол. Для этого вычислим интеграл действия, подставив в (5.2.1) значение p из (5.3.7)

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{2E_0}{a} - \frac{b}{a} q^2 \right)^{1/2} dq = 4 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{q_{\max}} \left(\frac{2E_0}{a} - \frac{b}{a} q^2 \right)^{1/2} dq, \quad (5.3.11)$$

где интеграл по периоду колебаний заменен на интеграл, взятый от положения равновесия до точки максимального размаха $q_{\max}$, который находится из условия «потенциальная энергия» = E_0 :

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{2E_0}{b}}. \quad (5.3.12)$$

Вычисления (5.3.12) дают

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{ab}} = \frac{H}{\omega_0}, \quad (5.3.13)$$

или

$$H = \omega_0 J, \quad \omega_0 = \frac{\partial H}{\partial J}. \quad (5.3.14)$$

Теперь, подставив в (5.3.7) из (5.3.13) $E_0 = J\sqrt{ab}$ и выразив старый импульс как

$$p(q, J) = (2RJ - R^2 q^2)^{1/2}, \quad (5.3.15)$$

где $R = \sqrt{b/a}$, можно с помощью первого уравнения (5.1.5) найти производящую функцию F_1 , а с помощью второго - новую координату («угол») φ , сопряженную импульсу J . Однако более просто это делается при помощи производящей функции F_2 вида

$$F_2(q, \varphi) = \frac{1}{2} R q^2 \cot \varphi, \quad (5.3.16)$$

при этом связь между новыми и старыми переменными записывается как

$$p = \sqrt{2JR} \cos \varphi, \quad q = \sqrt{2J/R} \sin \varphi. \quad (5.3.17)$$

Видно, что фазовая траектория, описываемая переменными (5.3.17) – это эллипс, который может быть преобразован в окружность простым изменением масштаба: $\bar{p} = p / \sqrt{R}$, $\bar{q} = q\sqrt{R}$. Преобразованное таким образом фазовое движение в переменных действие-угол представляет собой вращение некоторого вектора постоянной длины J , а величина $R = \sqrt{b/a}$ является отношением полуосей исходного эллипса.

Рассмотренное преобразование имеет несомненные признаки сходства с преобразованием Флоке.

Переход от переменных (p, q) к переменным (J, φ) проиллюстрирован на рис.5.3.2.

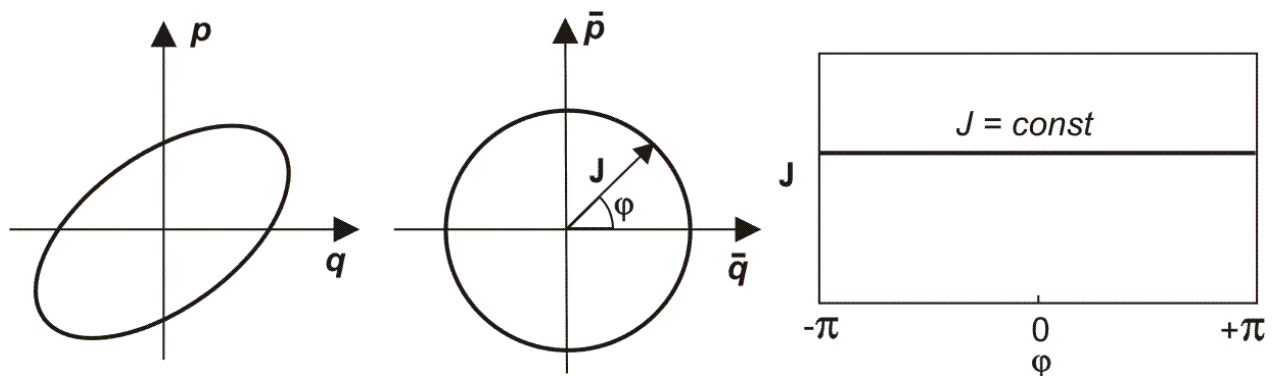


Рис.5.3.2 Фазовые траектории в переменных (p, q) и (J, φ) .

Для нелинейных колебаний действие уже не будет константой движения, однако, как интеграл невозмущенной системы, его будет удобно использовать для нахождения приближенного решения (как и в случае степенных рядов).

5.4 Интегрируемые и возмущенные системы

Для системы с одной степенью свободы не зависящий от времени гамильтониан является интегралом движения:

$$H(p, q) = E_0. \quad (5.4.1)$$

Разрешив (5.4.1) относительно импульса, получим

$$p = f(q, E_0). \quad (5.4.2)$$

Зависимость переменных p и q от времени можно определить из второго уравнения Гамильтона (5.1.1)

$$dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}, \quad (5.4.3)$$

интегрируя которую получим

$$t = \int_{q_0}^q \frac{dq}{\partial H / \partial p}. \quad (5.4.4)$$

Так как $\partial H / \partial p$ зависит только от переменных p и q , связанных соотношением (5.4.2), то интегрирование уравнений движения системы сводится к квадратуре, а сама система называется интегрируемой. Обычно интеграл (5.4.4) можно найти только численно.

Рассмотрим математический маятник с гамильтонианом (5.3.6) (постоянный член, не влияющий на уравнения движения, опущен)

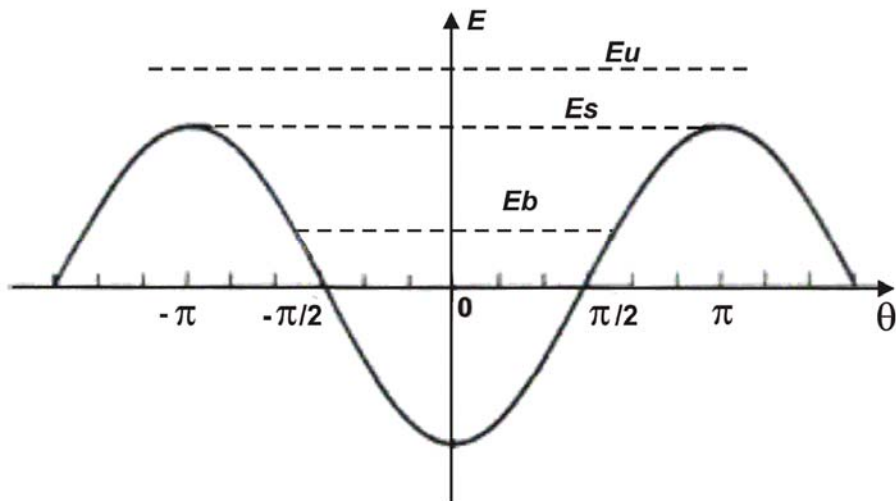
$$H = \frac{1}{2}ap^2 - b \cos \theta = E_0. \quad (5.4.5)$$

Подставляя (5.4.5) в (5.4.4), для периода колебаний получаем соотношение

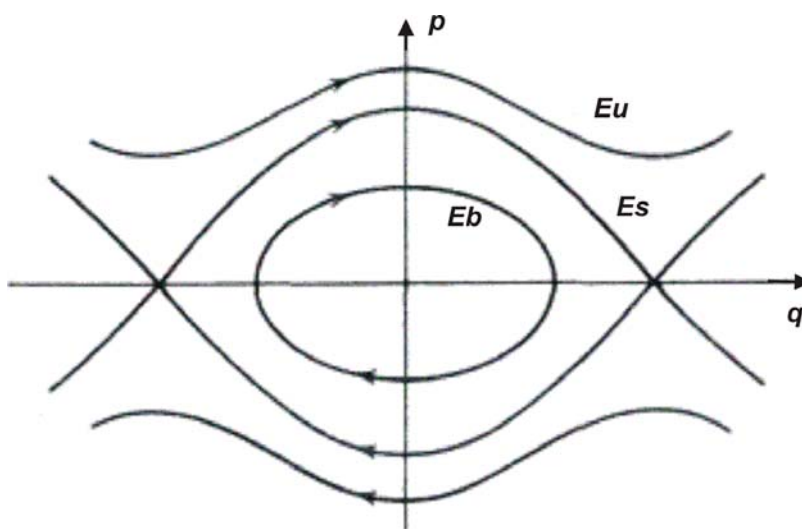
$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{2a}} \oint \frac{d\theta}{(E_0 + b \cos \theta)^{1/2}}, \quad (5.4.6)$$

которое может быть выражено через эллиптические интегралы. Из (5.4.6) следует, что, во-первых, период колебаний маятника зависит от энергии (или частота колебаний зависит от амплитуды), а во-вторых, для $\theta = \pm\pi$ и при определенном значении энергии $E_0 = b$ период колебаний становится бесконечным. Как легко видеть из рис.5.3.1, это точки перехода маятника от колебательного движения к вращательному.

Рассмотрим фазовые траектории при различной энергии маятника. Выражение (5.4.5) является суммой кинетической $T = ap^2/2$ и потенциальной $U = -b \cos \theta$ энергий (рис.5.4.1).



(a) Потенциальная функция.



(б) Фазовые траектории.

Рис.5.4.1 Колебания маятника.

Если энергия системы больше максимального значения потенциальной энергии $E_u = E_0 > b$, то импульс p всегда отличен от нуля и угол отклонения маятника θ меняется неограниченно (вращение). При $E_b = E_0 < b$ движение ограничено стенками потенциальной ямы и соответствует колебаниям маятника. При $E_s = E_0 = b$ движение происходит по фазовой траектории, ограничивающей два различных типа движения (колебание и вращение). Такая траектория называется сепаратрисой.

Движение имеет две особые точки при $p = 0$: одна находится в начале координат при $\theta = 0$ и является устойчивой, или эллиптической, особой точкой, другая, при $\theta = \pm\pi$, является неустойчивой, или гиперболической, особой точкой. Устойчивость в данном контексте означает, что фазовая траектория вблизи эллипти-

ческой точки остается в ее окрестности, тогда как траектория, начавшаяся вблизи гиперболической точки, удаляется от нее.

Гамильтониан (5.4.5) был получен для модели маятника. Однако оказывается, что гамильтониан такого вида получается почти во всех динамических системах (не обязательно интегрируемых), когда изучается движение вблизи резонанса. Такой гамильтониан называется «стандартным», или «универсальным». Он играет важную роль при исследовании резонансов.

Среди всех динамических систем интегрируемые системы являются исключением. В большинстве случаев приходится иметь дело с системами, которые можно рассматривать как возмущение интегрируемых систем и которые называются близкими к интегрируемым. «Близкие» означает, что возмущение все-таки мало по сравнению с невозмущенной частью. Поскольку исследование именно таких систем составляет основной материал курса, качественно рассмотрим основные особенности фазового движения таких систем (рис.5.4.2).

Запишем гамильтониан одномерной возмущенной системы в виде

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \varphi, t). \quad (5.4.7)$$

Здесь J и φ - переменные действие-угол невозмущенного движения, гамильтониан которого зависит только от канонического импульса J (см. (5.3.14)). Малое возмущение εH_1 зависит как от канонических переменных, так и от независимой пе-

ременной (времени) t , причем зависимость от φ и t является периодической.

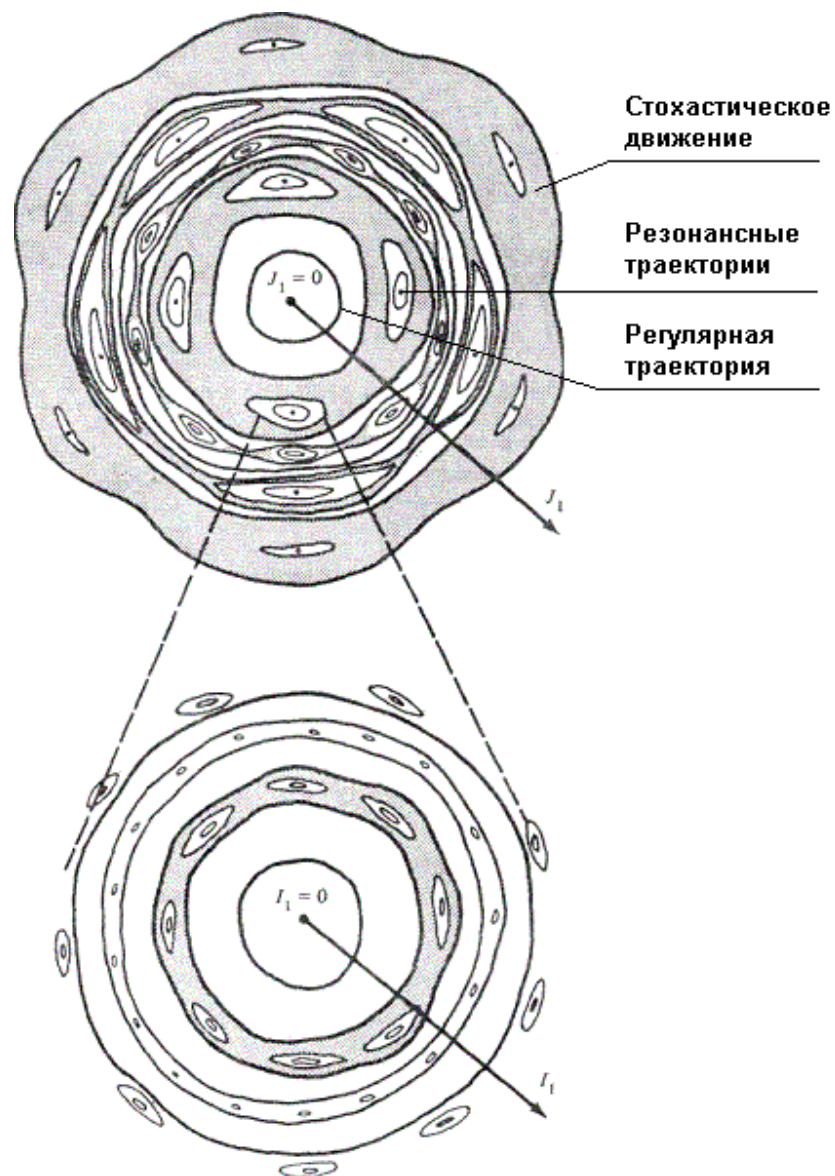


Рис.5.4.2 Различные виды фазовых траекторий. Вверху – исходное фазовое пространство, внизу – вблизи резонанса (увеличено и растянуто по вертикали).

Отличительной чертой возмущенных систем является наличие причудливо перемешанных между собой областей регулярного и стохастического (хаотического, случайного) движения. Стохастические траектории, как и регулярные, по-

лучаются из детерминированных уравнений, задаваемых гамильтонианом (5.4.7) без введения каких-либо дополнительных случайных сил.

Для регулярных траекторий угловые переменные зависят от времени либо квазипериодически (типичный случай), либо периодически. Для квазипериодического движения частоты несоизмеримы. В нашем случае (5.4.7) это означает, что

$$n\omega(J) = n(\omega_0 + \Delta\omega(J)) \neq m, \quad (5.4.8)$$

где n - целое, $\omega(J)$ - частота возмущенного движения, зависящая от амплитуды, и состоящая из невозмущенной частоты ω_0 и поправки $\Delta\omega(J)$, вносимой возмущением. Поскольку εH_1 является периодической функцией от t , то его можно разложить в ряд Фурье по этой (азимутальной) координате, тогда m - номер какой-либо гармоники этого ряда. Для квазипериодического случая регулярная траектория на фазовой плоскости представляет собой кривую, как показано на рис.5.4.2. Эта кривая составлена из большого числа точек пересечения фазовой траекторией плоскости сечения Пуанкаре (p, q) . Квазипериодическая траектория $q(t)$ никогда не замыкается, однако, в случае финитного движения, остается в одной и той же области пространства. При очень большом времени наблюдения точки пересечения покрывают инвариантную кривую всюду плотно.

В случае периодического движения

$$n\omega(J) = m, \quad (5.4.9)$$

и имеет место резонанс между частотой системы и m -той азимутальной гармоникой возмущения. Тогда фазовая траектория является периодической и на фазовой плоскости отображается n точками.

При частоте, близкой к резонансу

$$n\omega(J) \approx m \quad (5.4.10)$$

мы должны увидеть ряд фазовых траекторий как на рис.5.4.1 вплоть до сепаратрисы.

Следует отметить, что, поскольку движение вблизи резонанса периодически (и соответствует колебательному типу движения маятника (5.4.5)) с некоторой фазовой частотой ω_r , между этой частотой и основной частотой системы снова может возникнуть резонанс, называемый вторичным, который будет виден внутри островка основного резонанса как еще одна цепочка более мелких островков. Эта вложенная резонансная структура может повторяться до бесконечности.

Поскольку сепаратриса разделяет два принципиально разных типа движения (колебательное и вращательное, финитное и инфинитное) и при приближении к гиперболическим точкам, лежащим на сепаратрисе, период колебаний бесконечно растет (5.4.6), понятно, что движение вблизи сепаратрисы должно быть весьма нетривиально. В этой сложности движения лежит причина возникновения стохастических областей фазового пространства.

Стохастические слои зарождаются вблизи сепаратрис нелинейных резонансов. Однако, если расстояние по частоте между несколькими резонансами велико и каждый из них можно рассматривать как изолированный, ширина стохастического слоя мала, они отделены друг от друга квазипериодическими инвариантными фазовыми кривыми, и траектория системы не может переходить из одного слоя в другой. При увеличении величины возмущения, резонансные островки рас-

тут, и стохастические слои в окрестности их сепаратрис могут сливаться, разрушая инвариантные кривые, которые отделяли их раньше. В этом случае траектория движения может переходить с одного слоя в другой, удаляясь от начала координат. В конце концов, при дальнейшем росте возмущения стохастические слои сливаются, формируя область глобальной стохастичности. Амплитуда частицы, попавшей в такую область, растет диффузным образом вплоть до границы геометрической апертуры.

Рекомендуемая литература

1. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО РАН 278, Новосибирск, 1969.
2. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
3. Б.В.Чириков. Нелинейный резонанс. НГУ, Новосибирск, 1977.
4. А.Лихтенберг. Динамика частиц в фазовом пространстве. «Атомиздат», М., 1972.

Глава 6. Гамильтониан частицы

6.1 Гамильтониан частицы в сопровождающей системе координат

Гамильтониан частицы с зарядом e во внешнем электромагнитном поле, заданном векторным и скалярным потенциалами, имеет вид

$$H(\vec{x}, \vec{p}; t) = e\Phi(\vec{x}; t) + c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x}; t))^2 + m_0^2 c^2}, \quad (6.1.1)$$

где $\vec{p}$ - канонический импульс, сопряженный декартовым координатам частицы $\vec{x}$, соотносится с кинематическим импульсом $\gamma m_0 \vec{v}$ как

$$\gamma m_0 \vec{v} = \vec{p} - e\vec{A}, \quad (6.1.2)$$

а магнитное и электрическое поля выражаются через потенциалы согласно

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{и} \quad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (6.1.3)$$

Как и раньше, будем рассматривать движение частицы только в статическом магнитном поле и перейдем от декартовой системы координат в сопровождающую. Из-за криволинейности сопровождающей системы, поперечные компоненты кинематического импульса равны проекции вектора на соответствующие оси

$$p_x = \vec{p} \cdot \hat{x} \quad \text{и} \quad p_z = \vec{p} \cdot \hat{z}, \quad (6.1.4)$$

а продольная – нет

$$p_s = \vec{p} \cdot \hat{s}(1 + h(s) \cdot x), \quad (6.1.5)$$

причем кривизна $h(s) = 1/\rho(s)$ является функцией азимута $s = \theta \cdot R$.

Как и раньше, ограничимся только поперечными магнитными полями

$$\vec{B} = B_x(x, z)\hat{x} + B_z(x, z)\hat{z}, \quad (6.1.6)$$

для задания которых достаточно одной отличной от нуля компоненты $A_s = \vec{A} \cdot \hat{s} \neq 0$. Тогда три ортогональные проекции вектора $(\vec{p} - e\vec{A})$ на оси сопровождающей системы координат примут вид

$$(\vec{p} - e\vec{A})_s = \frac{p_s}{1 + \hbar x} - eA_s, \quad (\vec{p} - e\vec{A})_x = p_x \quad \text{и} \quad (\vec{p} - e\vec{A})_z = p_z, \quad (6.1.7)$$

подставляя которые в (6.1.1) найдем следующее выражение для гамильтониана:

$$H_1(x, z, s, p_x, p_z, p_s; t) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2 + p_x^2 + \left(\frac{p_s}{1 + \hbar x} - eA_s \right)^2}. \quad (6.1.8)$$

В этом выражении независимой переменной является время, а сам гамильтониан – интеграл движения (энергия) $H_1 = E$, поскольку он не зависит от времени явно.

Выберем в качестве новой независимой переменной длину дуги вдоль равновесной орбиты s , и перейдем к ней с помощью следующих соображений. Рассмотрим производную

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{dx/dt}{ds/dt} = \frac{\partial H / \partial p_x}{\partial H / \partial p_s}, \quad (6.1.9)$$

в последнем равенстве мы воспользовались определением уравнений Гамильтона.

Однако для сохраняющегося Гамильтониана можно записать

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_x} \cdot dp_x + \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot dp_s = 0, \quad (6.1.10)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial p_s}{\partial p_x} = -\frac{\partial H / \partial p_x}{\partial H / \partial p_s}. \quad (6.1.11)$$

Но тогда (6.1.9) приобретает формальный вид уравнения Гамильтона

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial(-p_s)}{\partial p_x} \quad (6.1.12)$$

с независимой переменной s и новым гамильтонианом $H_2 = -p_s$, перейти к которому можно, решив (6.1.8) относительно $-p_s$:

$$H_2(x, z, p_x, p_z; s) = -p_s = -(1 + hx) \cdot \left[eA_s + \sqrt{\frac{H_1^2}{c^2} - m_0^2 c^2 - p_x^2 - p_z^2} \right]. \quad (6.1.13)$$

Заметим, что

$$\frac{H_1^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - m_0^2 c^2 = p^2, \quad (6.1.14)$$

где p – полный импульс частицы. Пока мы рассматриваем движение частицы с заданным импульсом p_0 (напомним, что $p \approx p_0(1 + \Delta p / p_0) = p_0(1 + \delta)$), нормируя на который (6.1.13) можно получить следующий гамильтониан

$$H_3 = \frac{H_2}{p_0} = -(1 + hx) \cdot \left(\frac{e}{p_0} A_s + \sqrt{1 - \left(\frac{p_x}{p_0} \right)^2 - \left(\frac{p_z}{p_0} \right)^2} \right). \quad (6.1.15)$$

Обычно для удобства записи принято обозначать относительные импульсы $(p_{x,z} / p_0) \rightarrow p_{x,z}$, поэтому (6.1.15) можно переписать в виде

$$H_3 = -(1 + hx) \cdot \left(\frac{e}{p_0} A_s + \sqrt{1 - p_x^2 - p_z^2} \right). \quad (6.1.16)$$

6.2 Разложение гамильтониана по степеням малости

С учетом параксиального приближения $(p_{x,z}/p_0) \ll 1$, квадратный корень в (6.1.15) может быть разложен в ряд так, что

$$H_3 \approx -(1 + hx) \frac{e}{p_0} A_s - \left(1 + hx - \frac{1}{2} p_x^2 - \frac{1}{2} p_z^2 \right). \quad (6.2.1)$$

Теперь, чтобы записать гамильтониан частицы в явном виде, нам нужно найти продольную компоненту векторного потенциала A_s , что можно сделать, используя уравнения Максвелла $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ в криволинейной системе координат,

$$B_x = \frac{\partial A_s}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{h A_s}{1 + hx} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \approx -h A_s - \frac{\partial A_s}{\partial x},$$

и разложения поля (3.1.1) и (3.1.2). Необходимое выражение, с точностью до членов четвертого порядка, определяющих кубическую нелинейность, имеет вид

$$\frac{e}{p_0} A_s = -h \left(x - \frac{1}{2} h x^2 \right) - \frac{1}{2} k (x^2 - z^2) - \frac{1}{6} m (x^3 - 3x z^2) - \frac{1}{24} n (x^4 - 6x^2 z^2 + z^4). \quad (6.2.2)$$

Подстановка (6.2.2) в (6.2.1) дает гамильтониан, представленный рядом по канонически сопряженным переменным

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} (K_x x^2 + K_z z^2) + \frac{1}{6} m (x^3 - 3x z^2) + \frac{1}{24} n (x^4 - 6x^2 z^2 + z^4). \quad (6.2.3)$$

При выводе мы пренебрегли слагаемым, равным 1, так как оно не влияет на уравнения движения, и опустили подстрочный индекс у H .

Помня, что амплитуда бетатронных колебаний является неявным параметром малости, гамильтониан (6.2.3) может быть записан в виде «интегрируемая (невозмущенная) часть» + «малое возмущение»

$$H = H_0 + \varepsilon H_1,$$

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}(K_x(s)x^2 + K_z(s)z^2), \quad (6.2.4)$$

$$\varepsilon H_1 = \frac{1}{6}m(s)(x^3 - 3xz^2) + \frac{1}{24}n(s)(x^4 - 6x^2z^2 + z^4).$$

Как и раньше, фокусирующие коэффициенты, определяющие линейные бетатронные колебания равны: $K_x(s) = h^2(s) + k(s)$ и $K_z(s) = -k(s)$. Легко видеть, что уравнения Гамильтона

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (6.2.4)$$

(и аналогичные для вертикального движения), дают в точности уравнения в лагранжевой форме (3.1.4) и (3.1.5), полученные ранее. В частности, для линейного случая получаем

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, \quad p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -K_x(s)x, \quad (6.2.6)$$

или, дифференцируя второй раз первое уравнение (6.2.5) и подставляя второе

$$x'' + K_x(s)x = 0.$$

6.3 Преобразование координат

Следующим нашим шагом будет переход в гамильтониане (6.2.4) к естественным переменным периодических систем – «действие-фаза».

В азимутально-симметричном приближении можно записать

$$q = x(s) = \sqrt{2J_x \beta_x} \cdot \cos(\nu_x \theta), \quad (6.3.1)$$

$$p = x'(s) = \frac{dx(s)}{ds} = -\sqrt{\frac{2J_x}{\beta_x}} \cdot \sin(\nu_x \theta),$$

и прямое вычисление интеграла действия дает

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint x' \frac{dx}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \oint x'^2 ds = \frac{1}{2\pi} 2J_x \int_0^{2\pi} d\left(\nu_x \frac{s}{R}\right) \sin^2 \nu_x \frac{s}{R} = J_x. \quad (6.3.2)$$

То есть, константа J_x , определяемая начальными условиями и задающая радиус фазовой окружности (см. рис.6.3.2), является канонической переменной действия. Очевидно, что для рассматриваемого случая фазовая переменная имеет вид $\varphi = \nu\theta$.

В общем случае, чтобы сохранить гамильтонов формализм, мы должны произвести замену переменных каноническим путем, т.е. при помощи производящей функции. Найдем вид этой функции из следующих соображений. Согласно (3.4.6) и (3.4.7), переменные, преобразующие фазовый эллипс в окружность есть

$$x/\sqrt{\beta} = \sqrt{2J} \cos \psi \quad \text{и} \quad (\alpha x + \beta x')/\sqrt{\beta} = -\sqrt{2J} \sin \psi. \quad (6.3.3)$$

Подставив первое уравнение (6.3.3) во второе и записав x' , как функцию x и ψ , получим

$$x' = -\frac{x \tan \psi + \alpha x}{\beta}. \quad (6.3.4)$$

Кроме того, вспомним, что для канонического преобразования связь между старым импульсом $p_x = x'$ и старой координатой x задается производящей функцией старой и новой координат типа $F_1(q, \bar{q}, t) = F_1(x, \psi, s)$, а само преобразование имеет вид

$$x' = \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad \text{и} \quad J = -\frac{\partial F_1}{\partial \psi}. \quad (6.3.5)$$

Интегрирование (6.3.4) по x сразу дает вид искомой производящей функции

$$F_1 = -\frac{\alpha + \tan \psi}{2\beta} x^2, \quad (6.3.6)$$

где произвольная константа интегрирования принята равной 0. Тогда, преобразование, связывающее отклонение x и действие J имеет вид

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \psi} = \frac{\sec^2 \psi}{2\beta} x^2, \quad (6.3.6)$$

что совпадает с (6.3.3) и, таким образом, подтверждает вид найденной производящей функции, верной не только для азимутально-симметричного приближения, но и в общем случае.

Невозмущенный гамильтониан в новых переменных находится согласно третьему выражению (5.1.5)

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial s},$$

и, после некоторых алгебраических выкладок с использованием уравнения для бетатронной функции $2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4\beta^2 K(s) = 4$, оказывается равен

$$H_0 = J/\beta(s). \quad (6.3.7)$$

Это выражение близко к тому, которое было получено для маятника (6.3.14): $H = \omega_0 J$. Роль частоты колебаний маятника ω_0 для бетатронных колебаний играет скорость изменения фазы или «мгновенная» частота

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{1}{\beta(s)}. \quad (6.3.8)$$

Переход к переменным «действие-фаза» привел к каноническому импульсу J – интегралу невозмущенного движения и гамильтониану (6.3.7), не зависящему от времени явно. Уравнение Гамильтона (6.3.8), аналогичное уравнению (6.1.9), может быть проинтегрировано, что сразу дает известное выражение для набег фазы бетатронных колебаний

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}. \quad (6.3.9)$$

В случае двумерных колебаний гамильтониан (6.3.7) принимает вид

$$H_0 = J_x/\beta_x(s) + J_z/\beta_z(s), \quad (6.3.10)$$

а связь новых и старых колебаний

$$x = \sqrt{2J_x\beta_x} \cos \psi_x \quad \text{и} \quad z = \sqrt{2J_z\beta_z} \cos \psi_z. \quad (6.3.11)$$

В дальнейшем мы будем использовать преобразования (6.3.11) и гамильтониан (6.3.10), однако заметим, что может быть сделано еще одно преобразование

канонических переменных, убирающее неявную зависимость (6.3.7) от времени через $\beta(s)$. Для этого нужно найти новую фазовую переменную, которая бы зависела от s линейно.

Рассмотрим величину

$$\int \frac{ds}{\beta} - \nu \frac{s}{C} = \int \frac{ds}{\beta} - \nu \theta, \quad (6.3.12)$$

где $C = 2\pi R$ – периметр ускорителя, ν - бетатронное число, а θ - азимутальный угол, которая представляет собой колебания бетатронной фазы вокруг среднего (линейного) набега бетатронной фазы (см. верхний рис.3.1.2).

Формально полный набег бетатронной фазы (6.3.9) может быть представлен следующим образом

$$\psi = \text{линейный набег} + \text{колебание} = \varphi + \left(\int \frac{ds}{\beta} - \nu \theta \right). \quad (6.3.13)$$

Тогда искомая фазовая переменная, линейно изменяющаяся с временем s , находится как

$$\varphi = \psi - \int \frac{ds}{\beta} + \nu \theta, \quad (6.3.14)$$

Замена фазовой переменной оставляет действие без изменения: $\bar{J} = J$.

Для канонического преобразования (6.3.14) удобно воспользоваться

$$F_2 = \bar{J} \cdot \left(\psi - \int \frac{ds}{\beta} + \nu \theta \right). \quad (6.3.15)$$

Новые и старые переменные при

$$J = \frac{\partial F_2}{\partial \psi}, \quad \varphi = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}}, \quad (6.3.16)$$

а новый гамильтониан записывается как

$$H_0 = \frac{\nu}{R} J, \quad (6.3.17)$$

и представляет собой гамильтониан линейного осциллятора с $\omega_0 = \nu / R$.

Рекомендуемая литература

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
2. E.Courant and H.Snyder, Ann. of. Phys. **3**, 1 (1958).
3. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц. «Атомиздат», М., 1970.

Глава 7. Каноническая теория возмущений

7.1 Одна степень свободы

Рассмотрим одномерный гамильтониан в переменных действие-угол, состоящий невозмущенной части и малого возмущения

$$H(J, \varphi) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \varphi, \theta). \quad (7.1.1)$$

Невозмущенная часть гамильтониана зависит только от J и, следовательно, соответствующие уравнения движения имеют решение

$$J = J_0 = \text{const}, \quad \varphi = \omega\theta + \alpha, \quad \omega = \frac{\partial H_0}{\partial J}. \quad (7.1.2)$$

Будем искать преобразование переменных $(J, \varphi) \rightarrow (\bar{J}, \bar{\varphi})$, в которых не только $\bar{H}_0$, но и $\varepsilon \bar{H}_1$ зависит только от импульса

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) = \bar{H}_0(\bar{J}) + \varepsilon \bar{H}_1(\bar{J}) + \varepsilon^2 \bar{H}_2(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta), \quad (7.1.3)$$

а зависимость от θ и $\bar{\varphi}$ отодвигается в более высокие порядки. Тогда в новых переменных задача решается с точностью ε по правилам (7.1.2). Повторение процедуры дает решение для последующих порядков.

Начнем построение теории возмущений с определения преобразования при помощи производящей функции типа $F_2(\varphi, J, \theta)$

$$J = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{J}}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial \theta}. \quad (7.1.4)$$

Производящую функцию будем искать в виде ряда по степеням параметра малости

$$F_2 = F_{20} + \varepsilon F_{21} + \varepsilon^2 F_{22} + \dots, \quad (7.1.5)$$

причем член низшего порядка $F_{20} = \varphi \cdot \bar{J}$ выберем так, чтобы получалось тождественное преобразование $J = \bar{J}, \varphi = \bar{\varphi}$. Подставляя (7.1.5) в два первые выражения (7.1.4), получим

$$J(\bar{J}, \varphi) = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial \varphi} + \dots = \bar{J} + \Delta J, \quad (7.1.6)$$

$$\varphi(\bar{J}, \bar{\varphi}) = \bar{\varphi} - \varepsilon \frac{\partial F_{21}}{\partial \bar{J}} - \varepsilon^2 \frac{\partial F_{22}}{\partial \bar{J}} - \dots = \bar{\varphi} + \Delta \varphi. \quad (7.1.7)$$

Согласно третьему уравнению (7.1.4), новый гамильтониан равен старому, выраженному через новые переменные, плюс производная производящей функции по времени. Чтобы выразить старый гамильтониан через новые переменные, подставим (7.1.6) и (7.1.7) в (7.1.1), и разложим получившуюся функцию в ряд Тейлора по степеням ΔJ и $\Delta \varphi$. Сделаем это отдельно для H_0 и для H_1 ограничиваясь первым порядком по ε :

$$H_0(J) = H_0(\bar{J} + \Delta J) = H_0(\bar{J}) + \Delta J \frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}} + \dots, \quad (7.1.8)$$

где производная берется в точке $\bar{J} = J$. Подставляя (7.1.6) в (7.1.8) и воспользовавшись определением $\omega_0 = \partial H_0 / \partial J$, получим

$$H_0(\bar{J}, \bar{\varphi}) = H_0(\bar{J}) + \varepsilon \omega_0 \frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} + \dots. \quad (7.1.9)$$

Поскольку εH_1 уже содержит малый параметр, то

$$\varepsilon H_1(J, \varphi, \theta) = \varepsilon H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) + \dots, \quad (7.1.10)$$

и, согласно (7.1.4), новый гамильтониан с точностью до первого порядка малости запишется как

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) = H_0(\bar{J}) + \varepsilon \left[\omega_0 \frac{\partial F_{21}}{\partial \bar{\varphi}} + H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) + \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} \right]. \quad (7.1.11)$$

С другой стороны, формально новый гамильтониан также может быть представлен степенным рядом вида

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon \bar{H}_1 + \varepsilon^2 \bar{H}_2 + \dots, \quad (7.1.12)$$

так что, сравнивая (7.1.11) и (7.1.12), можно записать

$$\bar{H}_0 = H_0(\bar{J}) \quad \text{и} \quad \bar{H}_1 = \left(\omega_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) F_{21} + H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta). \quad (7.1.13)$$

Цель нашего преобразования – получить гамильтониан, который не зависит от циклических переменных θ и $\bar{\varphi}$ (см. (7.1.3)) с точностью ε . Это можно сделать с помощью выбора пока неопределенной производящей функции F_{21} .

Для этого разделим возмущение H_1 на постоянную, не зависящую от θ и $\bar{\varphi}$ $\langle H_1 \rangle$, и переменную $\{H_1\}$ части: $H_1 = \langle H_1 \rangle + \{H_1\}$. Постоянную часть определим как нулевую гармонику H_1

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) d\bar{\varphi} d\theta, \quad (7.1.14)$$

тогда переменная часть будет равна

$$\{H_1\} = H_1 - \langle H_1 \rangle. \quad (7.1.15)$$

Теперь, если приравнять

$$\omega_0 \frac{\partial F_{21}}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial F_{21}}{\partial \theta} = -\{H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta)\}, \quad (7.1.16)$$

то оставшаяся постоянная часть и даст искомый гамильтониан первого порядка возмущения, зависящий только от канонического импульса

$$\bar{H}_1(\bar{J}) = \langle H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) \rangle. \quad (7.1.17)$$

Таким образом, гамильтониан (7.1.3)

$$\bar{H}_1(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) + \varepsilon \langle H_1(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) \rangle, \quad (7.1.18)$$

получается путем формальной замены $(J, \varphi) \rightarrow (\bar{J}, \bar{\varphi})$ в старом гамильтониане (7.1.1) с последующим усреднением по всем периодическим переменным.

Поправка первого порядка к частоте находится обычным образом

$$\omega_1(\bar{J}) = \frac{\partial}{\partial \bar{J}} \langle H_1 \rangle. \quad (7.1.19)$$

Поскольку теперь новый канонический импульс $\bar{J}$ является константой движения, определяемой начальными условиями, фазовые траектории системы $J(\varphi)$ в первом порядке могут быть найдены из уравнения (7.1.6)

$$J(\bar{J}, \varphi) \approx \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi}, \quad (7.1.20)$$

где производящая функция F_{21} находится из уравнения (7.1.16). Для решения этого уравнения воспользуемся периодичностью всех входящих в него функций, и разложим их в ряд Фурье по $\bar{\varphi}$

$$F_{21} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\bar{J}, \theta) e^{im\bar{\varphi}} \quad \text{и} \quad \{H_1\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m(\bar{J}, \theta) e^{im\bar{\varphi}}. \quad (7.1.21)$$

Подстановка (7.1.21) в (7.1.16) дает уравнение, определяющее амплитуды гармоник

$$\left[im\omega_0 + \frac{\partial}{\partial \theta} \right] f_m = -h_m, \quad (7.1.22)$$

с интегральным решением

$$f_m = \frac{i}{2 \sin(\pi m \omega_0)} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} h_m(\bar{J}, \theta') e^{im\omega(\theta' - \theta - \pi)} d\theta'. \quad (7.1.23)$$

Альтернативное решение получается, если разложить функции в (7.1.16) в двойной ряд Фурье и по $\bar{\varphi}$, и по θ

$$F_{21} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f_{m,n}(\bar{J}) e^{i(m\bar{\varphi} - n\theta)} \quad \text{и} \quad \{H_1\} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} h_{m,n}(\bar{J}) e^{i(m\bar{\varphi} - n\theta)}. \quad (7.1.24)$$

Подстановка (7.1.24) в (7.1.16) дает гармоническую форму решения для производящей функции

$$F_{21} = i \sum_{m,n} \frac{h_{mn}(\bar{J})}{m\omega_0 - n} e^{i(m\bar{\varphi} - n\theta)}. \quad (7.1.25)$$

И интегральная, и гармоническая формы решения имеют свои преимущества и широко используются при решении различных задач.

Следует отметить, что в любом решении мы снова сталкиваемся с одной из фундаментальных проблем классической теории возмущений – малыми знаменателями, которые препятствуют сходимости рядов решения вблизи резонансных значений частот $\omega_0 = n/m$, поэтому (7.1.25) суммируется для $m\omega_0 \neq n$.

Усреднение возмущения имеет простую физическую интерпретацию. Мы вправе предполагать, что вдали от резонансных значений частот (т.е. там, где

можно применять полученное решение), наибольшее влияние на поведение системы будет иметь как раз постоянная составляющая возмущения, в то время как действие переменной за длительный период усреднится в ноль.

Описанную выше процедуру можно повторить, чтобы найти решение в более высоком порядке. Однако следует оговориться, что, поскольку и производящая функция и соотношения (7.1.6) и (7.1.7) зависят от смешанного набора переменных, а решение должно быть выражено в переменных одного набора, «распутывание» переменных на каждом шаге создает существенные трудности в применении метода в высоких порядках.

7.2 Ошибка фокусировки линейной структуры ускорителя

Вначале рассмотрим применение классической канонической теории на примере малой линейной ошибки фокусировки. Гамильтониан горизонтальных бетатронных колебаний имеет вид

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2} + \frac{K_x(s)x^2}{2}. \quad (7.2.1)$$

Малая ошибка фокусировки $\Delta K_x(s)$, обусловленная, например, погрешностью изготовления квадрупольной линзы, приводит к следующему возмущению (7.2.1)

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \left(\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} K_x(s)x^2 \right) + \frac{1}{2} \Delta K_x(s)x^2, \quad (7.2.2)$$

где $\varepsilon = \Delta K_x(s)$.

Перейдем к переменным действие-угол; H_0 преобразуется в (7.3.7), а подстановка $x = \sqrt{2J_x \beta_x} \cos \varphi_x$ дает

$$H = J_x / \beta_x(s) + \frac{1}{2} J_x \Delta K_x(s) \beta_x(s) [1 + \cos 2\varphi_x], \quad (7.2.3)$$

где использовано $2 \cos^2 \varphi_x = 1 + \cos 2\varphi_x$.

Следующим шагом является переход к новым переменным $(\bar{J}_x, \bar{\varphi}_x)$, таким, чтобы новый гамильтониан не зависел от φ и s . В первом порядке решения такой гамильтониан равен среднему от старого гамильтониана:

$$\bar{H} = \bar{J}_x / \beta_x(s) + \frac{1}{2} \bar{J}_x \Delta K_x(s) \beta_x(s). \quad (7.2.4)$$

Поскольку новый импульс сохраняется и новый гамильтониан не зависит от сопряженной координаты и времени, решение системы сразу же находится согласно (7.3.8) и (7.3.9)

$$\bar{\varphi}(s) = \int \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{J}} ds = \int_0^s \frac{ds}{\beta_x(s)} + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta K_x(s) \beta_x(s) ds, \quad (7.2.5)$$

и, так как бетатронная частота вычисляется как $\nu = \varphi(0 \rightarrow C) / 2\pi$, где C – периметр ускорителя, изменение частоты бетатронных колебаний за счет ошибки фокусировки равно

$$\Delta \nu_x = \frac{1}{4\pi} \oint \Delta K_x(s) \beta_x(s) ds. \quad (7.2.6)$$

Теперь вычислим искажение инвариантных кривых, вызванное возмущением с помощью производящей функции (7.1.24). Единственная гармоника возмущенного гамильтониана (7.2.3)

$$\varepsilon H_1 = h_2 \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \bar{J}_x \Delta K_x(s) \beta_x(s) \cos 2\varphi, \quad (7.2.7)$$

поэтому производящая функция первого порядка малости записывается как

$$F_{21}(s) = -\frac{\bar{J}_x}{4 \sin(2\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} \Delta K_x(s') \beta_x(s') \sin 2[\bar{\varphi}_x - \psi_x(s') - \psi_x(s) - \pi\nu_x] ds', \quad (7.2.8)$$

С помощью найденной производящей функции уравнение фазовых траекторий принимает вид

$$J_x(\varphi_x, s) = \bar{J}_x + \frac{\partial F_{21}(\bar{J}_x, \varphi_x, s)}{\partial \varphi_x}, \quad (7.2.9)$$

где в первом порядке можно заменить $\bar{\varphi}_x \approx \varphi_x$. В следующих порядках приближения это уже не так, поскольку переход к исходным переменным $J_x(\varphi_x)$ требует решение уравнения $\bar{\varphi}_x = \varphi_x + \varepsilon \partial F_{21} / \partial \bar{J}_x$, которое, как правило, можно решить только численно.

Подстановка (7.2.8) в (7.2.9) дает

$$J_x(s) = \bar{J}_x \left\{ 1 - \frac{1}{2 \sin(2\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} \Delta K_x(s') \beta_x(s') \cos 2[\psi_x(s') - \psi_x(s) - \pi\nu_x] ds' \right\}, \quad (7.2.10)$$

или

$$\frac{\Delta J_x(s)}{\bar{J}_x} = -\frac{1}{2 \sin(2\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} \Delta K_x(s') \beta_x(s') \cos 2[\psi_x(s') - \psi_x(s) - \pi\nu_x] ds'. \quad (7.2.11)$$

Линейная ошибка фокусировки меняет не форму кривой – эллипса, – а его размеры и наклон. Поэтому можно говорить не об искажении фазового пространства, а об изменении огибающей пучка или бетатронной функции.

Из выражения $x = \sqrt{2J_x \beta_x} \cos \varphi_x$, при $\varphi_x = 0$ (что соответствует условию $p_x = 0$) можно получить

$$J_x(s) = \frac{x^2}{2\beta_x(s)}, \quad (7.2.12)$$

или

$$\frac{\Delta J_x(s)}{J_x} = -\frac{\Delta \beta_x}{\beta_x}. \quad (7.2.13)$$

Сравнивая (7.2.13) с (7.2.11) получим известную из линейной теории бетатронных колебаний формулу искажения бетатронной функции из-за малых ошибок фокусировки

$$\frac{\Delta \beta_x}{\beta_x} = \frac{1}{2 \sin(2\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} \Delta K_x(s') \beta_x(s') \cos 2[\psi_x(s') - \psi_x(s) - \pi\nu_x] ds'. \quad (7.2.14)$$

На рис.7.2.1 показано искажение бетатронных функций для одной ячейки периодичности FODO. Ошибка фокусировки – тонкая квадрупольная линза с большим градиентом – размещена в начале магнитной структуры.

Отметим, что искажение бетатронной функции неограниченно растет при приближении бетатронной частоты к полуцелому резонансу $\nu = n/2$.

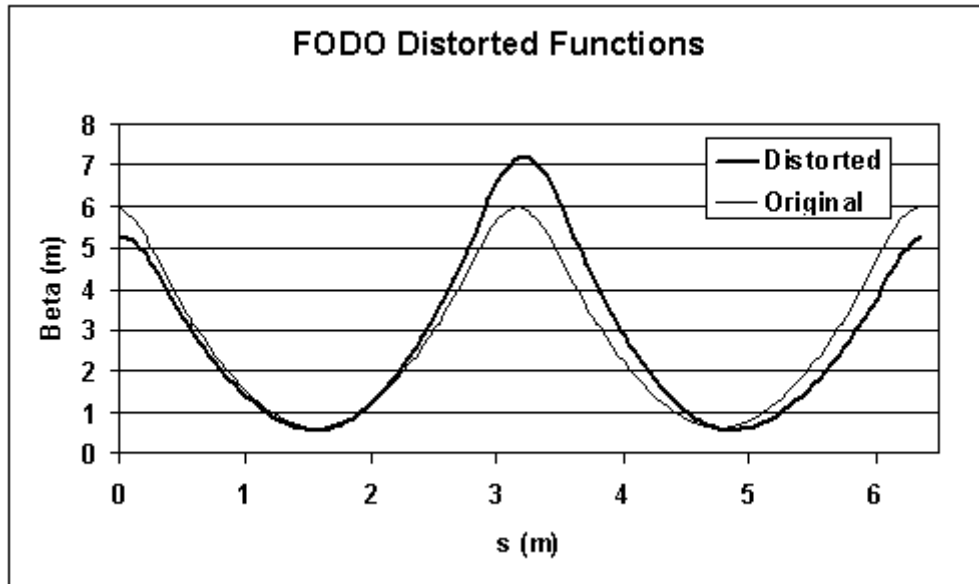


Рис.7.2.1 Идеальная и возмущенная горизонтальная бетатронная функция ячейки FODO.

7.3 Многомерная теория возмущений - кубическая нелинейность

Полученные выше результаты могут быть легко обобщены на случай многомерных колебаний. При этом разложение в ряд по степеням малости проводится для всех канонических переменных, а усреднение – по всем периодическим переменным. Произведения типа $m\bar{\varphi}$ или $m\omega$ понимаются как $\vec{m}\vec{\omega} = \sum_k m_k \omega_k$, в частности, резонансный знаменатель в (7.1.25) принимает вид $m_x \omega_x + m_z \omega_z - n$.

Ранее в разделе 5.1 мы рассмотрели зависимость частоты от амплитуды и фазовые траектории для одномерной кубической нелинейности в азимутально-симметричном ускорителе. Теперь, в качестве второго примера применения канонической теории возмущений, усложним задачу и исследуем кубическую нелинейность с произвольным распределением по азимуту для двумерного движения.

Согласно (7.2.4) соответствующая возмущенная часть гамильтониана имеет вид

$$\varepsilon H_1(x, z; s) = \frac{1}{24} n(s) (x^4 - 6x^2 z^2 + z^4). \quad (7.3.1)$$

Подставляя

$$x = \sqrt{2J_x \beta_x} \cos \varphi_x \quad \text{и} \quad z = \sqrt{2J_z \beta_z} \cos \varphi_z \quad (7.3.2)$$

перейдем к переменным действие-угол

$$\varepsilon H_1 = \frac{1}{6} n \left(J_x^2 \beta_x^2 \cos^4 \varphi_x - 6J_x J_z \beta_x \beta_z \cos^2 \varphi_x \cos^2 \varphi_z + J_z^2 \beta_z^2 \cos^4 \varphi_z \right). \quad (7.3.3)$$

Усредняя (7.3.3) по фазовым переменным с учетом $\langle \cos^4 \varphi \rangle = 3/8$ и $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$ получим новый гамильтониан, зависящий только от нового импульса $\vec{J} = (J_x, J_z)$

$$\bar{H}_1 = \langle H_1 \rangle = \frac{1}{16} n(s) \cdot \left(\bar{J}_x^2 \beta_x^2(s) - 4\bar{J}_x \bar{J}_z \beta_x(s) \beta_z(s) + \bar{J}_z^2 \beta_z^2(s) \right), \quad (7.3.4)$$

усредняя по продольной переменной s и используя (7.1.19)

$$\Delta \nu_{x,z} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{x,z}} \langle H_1 \rangle ds, \quad (7.3.5)$$

найдем поправку к частотам бетатронных колебаний

$$\Delta \nu_x = \alpha_{xx} \bar{J}_x + \alpha_{xz} \bar{J}_z \quad \text{и} \quad \Delta \nu_z = \alpha_{zx} \bar{J}_x + \alpha_{zz} \bar{J}_z, \quad (7.3.6)$$

где коэффициенты равны

$$\alpha_{xx} = \frac{1}{16\pi} \oint n(s) \beta_x^2(s) ds, \quad \alpha_{zz} = \frac{1}{16\pi} \oint n(s) \beta_z^2(s) ds,$$

$$\alpha_{xz} = \alpha_{zx} = -\frac{1}{8\pi} \oint n(s) \beta_x(s) \beta_z(s) ds. \quad (7.3.7)$$

Следует отметить существенную простоту получения решения по сравнению с использованной ранее техникой степенных рядов, несмотря на то, что рассматриваемый сейчас случай более сложный.

Теперь, если снова предположить, что распределение магнитного поля не зависит от азимута, выбрать начальные условия

$$x(0) = A_x, \quad p_x(0) = 0 \quad \text{или} \quad \varphi_x = 0, \quad J_x(0) = A_x^2 / (2\beta_x), \quad (7.3.8)$$

то зависимость горизонтальной бетатронной частоты от амплитуды запишется (с учетом, для случая азимутальной симметрии $\nu_x = R / \beta_x$) как

$$\Delta \nu_x = \frac{2\pi R}{16\pi} \frac{A_x^2}{2\beta_x} n \beta_x^2 = \frac{1}{16} n A_x^2 \beta_x^2 \nu_{x0}, \quad (7.3.9)$$

что совпадает с результатом (5.1.29), полученным ранее при помощи классических рядов.

Следует отметить, что общий вид зависимости частоты от амплитуды с учетом высших порядков теории возмущений может быть представлен в виде ряда (одномерный случай):

$$\Delta \nu(J) = \alpha_1 J + \alpha_2 J^2 + \alpha_3 J^3 + \dots \quad (7.3.10)$$

Чтобы построить возмущенные фазовые траектории, нужно найти производящую функцию F_{21} и подставить ее в уравнение (7.1.20). Для этого воспользуемся решением в интегральной форме (7.1.23), причем для упрощения выкладок рассмотрим только горизонтальное движение:

$$\{H_1\} = H_1 - \langle H_1 \rangle,$$

$$\{H_1\} = \frac{1}{6} n(s) \beta_x^2(s) \bar{J}_x^2 \cos^4 \bar{\varphi}_x - \langle H_1 \rangle = h_2(\bar{J}_x, s) \cos 2\bar{\varphi}_x + h_4(\bar{J}_x, s) \cos 4\bar{\varphi}_x,$$

$$h_2(\bar{J}_x, s) = \frac{1}{12} n(s) \beta_x^2(s) \bar{J}_x^2, \quad h_4(\bar{J}_x, s) = \frac{1}{48} n(s) \beta_x^2(s) \bar{J}_x^2. \quad (7.3.11)$$

В первом приближении октупольное возмущение в горизонтальном случае содержит только две гармоники угловой координаты: вторую и четвертую.

Соответственно и производящая функция первого порядка приближения примет вид (введено обозначение $\Psi_x(s) = \bar{\varphi}_x + \psi_x(s') - \psi_x(s) - \pi\nu_x$)

$$F_{21} = -\bar{J}_x^2 \left\{ \frac{1}{48} \frac{1}{2 \sin(4\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} n(s') \beta_x^2(s') \sin 4\Psi_x(s) ds' \right\} \quad (7.3.12)$$

$$- \bar{J}_x^2 \left\{ \frac{1}{12} \frac{1}{2 \sin(2\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} n(s') \beta_x^2(s') \sin 2\Psi_x(s) ds' \right\}.$$

А зная ее, мы можем вычислить фазовые инвариантные кривые (7.1.20)

$$J_x(\varphi_x, s) \approx \bar{J}_x + \frac{\partial F_{21}}{\partial \bar{\varphi}_x} = \bar{J}_x - \bar{J}_x^2 \left\{ \frac{1}{24 \sin(4\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} n(s') \beta_x^2(s') \cos 4\Psi_x(s) ds' \right\}$$

$$- \bar{J}_x^2 \left\{ \frac{1}{12 \sin(2\pi\nu_x)} \int_s^{s+C} n(s') \beta_x^2(s') \cos 2\Psi_x(s) ds' \right\}. \quad (7.3.13)$$

Далее процедура построения фазовых траекторий должна быть следующей.

Исходя из начальных условий (x_0, p_{x0}) или (φ_{x0}, J_{x0}) , находится константа движения $\bar{J}_x$ и подставляется в (7.3.13), решение уравнения $J_x(\varphi_x, s)$ и дает искомые траектории. Для простоты положим $s = 0$; кроме того, будем считать, что возму-

щение создается тонкой октупольной линзой с интегральной силой (nl) , расположенной в начале структуры ускорителя: $(nl) \cdot \delta(0)$.

Вычисление интегралов в (7.3.13) дает

$$J_x(\varphi_x) = \bar{J}_x - \frac{1}{24} \bar{J}_x^2 \cdot (nl) \cdot \beta_{x0}^2 \left[\frac{\cos 4(\varphi_x - \pi \nu_x)}{\sin 4(\pi \nu_x)} + 2 \frac{\cos 2(\varphi_x - \pi \nu_x)}{\sin 2(\pi \nu_x)} \right]. \quad (7.3.14)$$

Пример фазовой кривой, полученной теоретически с помощью (7.3.14), показан на рис.7.3.1.

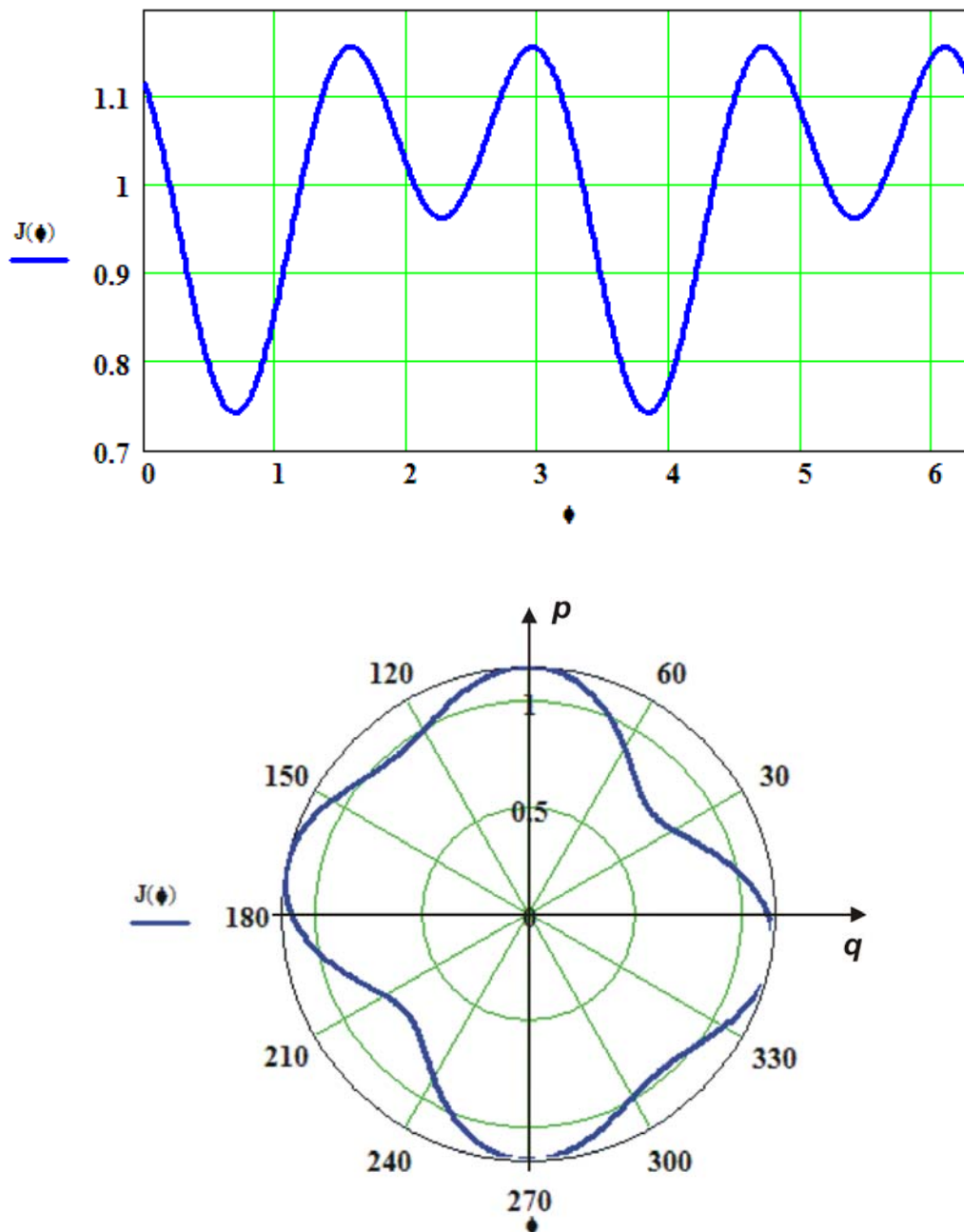


Рис.7.3.1 Фазовая траектория для кубической нелинейности. Вверху – в координатах (J, φ) , внизу – в координатах (p, q) .

Если задаться начальными условиями в виде (7.3.8), и подставить их в (7.3.14), то константа движения J_x находится как решение квадратного уравнения:

$$J_x(0) = \bar{J}_x - \frac{1}{24} \bar{J}_x^2 \cdot (nl) \cdot \beta_{x0}^2 F(\nu_x), \quad (7.3.15)$$

$$F(\nu_x) = \cot 4(\pi \nu_x) + 2 \cot 2(\pi \nu_x). \quad (7.3.16)$$

При этом требование существования неотрицательного действительного решения приводит к условию на начальную амплитуду колебаний

$$0 \leq \frac{1}{6} J_x(0) \beta_{x0}^2 \cdot (nl) \cdot F(\nu_x) \leq 1, \quad (7.3.17)$$

откуда следует, что фазовые траектории системы в рассматриваемом приближении существуют, только если начальная амплитуда колебаний удовлетворяет условию

$$A_x^2 \leq \frac{12}{(nl) \beta_{x0}^2 F(\nu_x)}. \quad (7.3.18)$$

Последнее выражение может рассматриваться как грубая граница области устойчивого движения (динамической апертуры) и качественно совпадает с оценкой (5.1.28). Однако теперь из-за продольной вариации возмущения апертура зависит от бетатронной частоты резонансным образом. Вблизи резонансов $4\nu_x = n$ и $2\nu_x = n$ апертура уменьшается до нуля.

Фазовые траектории для одномерной кубической нелинейности, полученные с помощью математического моделирования, показаны на рис.7.3.2.

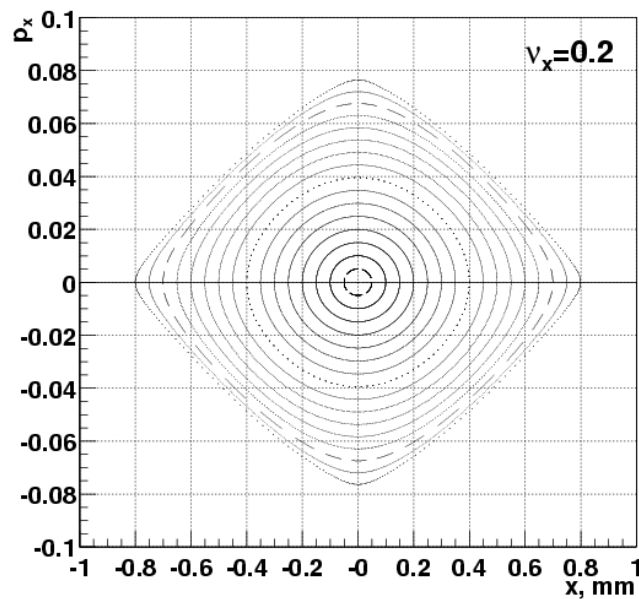


Рис.7.3.2 Фазовые траектории системы с кубической нелинейностью. Некоторые траектории выглядят пунктирными из-за конечного (1000) числа оборотов.

Поскольку частота колебаний $\nu_x = 0.2$ близка к резонансу $\nu_x = 1/4$, подчеркивающего соответствующую гармонику в (7.3.13), в картине фазовых траекторий на рис.7.3.2 отчетливо прослеживается симметрия четвертого порядка.

Дополнительная литература

1. А.Лихтенберг и М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
2. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969.
3. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004.
4. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.

8. Свойства нелинейных резонансов

8.1 Резонансная теория возмущений

Резонанс бетатронных колебаний наступает при условии

$$m_x \nu_x + m_z \nu_z = n, \quad (8.1.1)$$

где m_x, m_z и n - целые. Сумма $|m_x| + |m_z|$ называется порядком резонанса (не путать с порядком приближенного решения). Как мы увидим дальше, различные порядки приближения одного и того же возмущения возбуждают резонансы различных порядков. Уравнение (8.1.1) описывает набор прямых на плоскости бетатронных частот, показанных на рис.8.1.1.

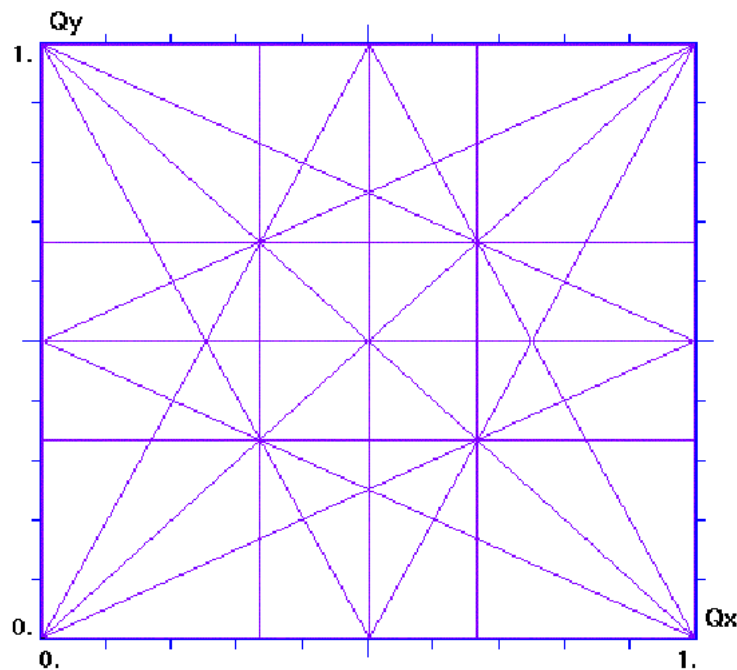


Рис.8.1.1 Линии бетатронных резонансов до третьего порядка включительно.

Математически резонансы проявляются как малые знаменатели, препятствующие сходимости рядов приближенного решения. Топология фазового пространства резко меняется в окрестности резонанса. Ранее рассмотренные методы приближений не годятся при изучении свойств нелинейного резонанса, и новая, резонансная, теория возмущений должна применяться для этого.

Рассмотрим гамильтониан, состоящий из невозмущенной части и малого возмущения. Разделим, как мы это делали раньше, возмущение на постоянную (среднюю) и переменную (осциллирующую) части

$$H = H_0 + \varepsilon \bar{H}_1 + \varepsilon \{H_1\}. \quad (8.1.2)$$

Постоянная составляющая определяет зависимость частоты от амплитуды, а переменная может быть разложена в ряд Фурье по φ и θ .

Вначале мы рассмотрим одномерное движение. Пусть частота колебаний близка к рациональному числу $\nu \approx n/m$. Раньше в качестве гамильтониана первого порядка приближения мы брали постоянную составляющую возмущения. Теперь имеется «почти» постоянная гармоника разложения $A_{mn} \cos(m\varphi - n\theta)$, чье действие на систему может быть таким же сильным, как действие постоянной части. Таким образом, оставляя в гамильтониане, который описывает движение частицы, только значимые члены, получим

$$H \approx \nu \cdot J + \alpha(J) + f(J) \cos(m\varphi - n\theta), \quad (8.1.3)$$

где были введены обозначения $\alpha(J) = \bar{H}_1(J)$ и $f(J) = A_{mn}(J)$. Попытка прямого решения уравнений Гамильтона приведет к появлению резонансного знаменателя

$m\nu - n$, который можно устранить заменой переменных $(J, \varphi) \rightarrow (I, \phi)$ при помощи производящей функции вида

$$F_2(I, \varphi) = \left(\varphi - \frac{n}{m} \theta \right) \cdot I, \quad (8.1.4)$$

задающей следующее преобразование

$$J = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = I, \quad \phi = \frac{\partial F_2}{\partial I} = \varphi - \frac{n}{m} \theta, \quad (8.1.5)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = H - \frac{n}{m} I = \delta \cdot I + \alpha(I) + f(I) \cos m\phi, \quad (8.1.6)$$

где $\delta = \nu - n / m$ - расстояние по частоте от резонанса (отстройка). И хотя нам не удалось добиться, чтобы новый гамильтониан зависел только от канонического импульса, он все же проще для изучения, чем исходный (8.1.3), поскольку не зависит явно от времени и, следовательно, является интегралом движения.

Скорость изменения новой резонансной угловой переменной $d\phi / d\theta = d\varphi / d\theta - n / m$ характеризует медленные фазовые отклонения от резонанса, а преобразование (8.1.4-6) иногда представляют как переход во «вращающуюся» в фазовом пространстве систему отсчета (рис.8.1.2).

Как будет показано позже, гамильтониан (8.1.6) аналогичен гамильтониану возмущенного маятника (6.4.5)

$$H = \frac{1}{2} ap^2 - b \cos q = E_0. \quad (8.1.7)$$

8.2 Общие свойства нелинейных резонансов

Важную информацию о свойствах системы дают фазовые траектории, которые получаются при решении (8.1.6) для разных значений $H = E_0$. Поведение фазовых траекторий существенно зависит от конкретного вида $\alpha(I)$ и $f(I)$, определяемых нулевой и резонансной гармониками потенциала возмущения. Поэтому сделаем несколько предварительных замечаний относительно их величины.

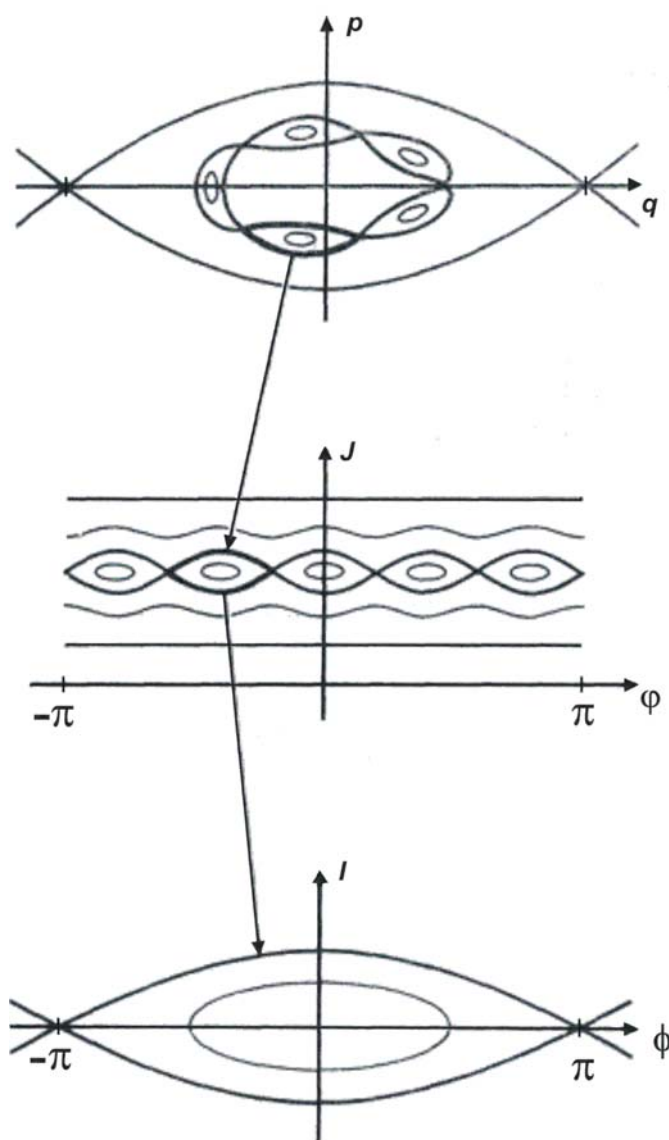


Рис.8.1.2 Переход к резонансной системе координат.

Слагаемое $\alpha(I)$ ответственно за нелинейный сдвиг частоты. Действительно, из (8.1.3)

$$\Delta\nu = \frac{d\langle H_1 \rangle}{dI} = \frac{d\alpha(I)}{dI}, \quad (8.2.1)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по периодическим переменным. А как мы видели раньше ((5.1.29) и (8.3.6) для кубической нелинейности, (5.2.9) – для квадратичной), по крайней мере, в старшем порядке малости зависимость частоты от амплитуды дает

$$\alpha(I) = \alpha_0 I^2. \quad (8.2.2)$$

С другой стороны, зависимость $f(I)$ определяется мультипольностью потенциала возмущения H_1 (7.2.4) и правилами преобразования к переменным действие-фаза (7.3.11):

$$x \sim \sqrt{I}, \quad H_{1k} \sim x^k \sim I^{k/2} \quad (8.2.3)$$

Например, для секstupольного возмущения $H_1 \sim x^3$, следовательно, $f(I) \sim I^{3/2}$, а для октупольного – $H_1 \sim x^4$ и $f(I) \sim I^2$.

Сейчас мы рассмотрим резонансы высокого порядка, для которых степень действия в $f(I)$ больше, чем в $\alpha(I)$, иными словами, для $k > 4$. Оказывается, свойства таких резонансов могут быть сформулированы достаточно просто в общем виде, независимо от конкретного порядка резонанса.

В частности, из (8.2.2) и (8.2.3) можно сделать вывод относительно соотношения величины вторых производных $\alpha(I)$ и $f(I)$ по переменной действия:

$$\alpha'' = \alpha_0 = const \quad \text{и} \quad f'' \sim A_{nm} I^{k/2-2}. \quad (8.2.4)$$

Т.к. α_0 и A_{nm} определяются амплитудой нулевой и n -той гармоник потенциала возмущения, их можно считать равными по порядку величины, а учитывая, что $k > 4$ и $I \ll 1$ для резонансов высокого порядка получим

$$\alpha'' \gg f''. \quad (8.2.5)$$

Это соотношение понадобится нам в дальнейшем.

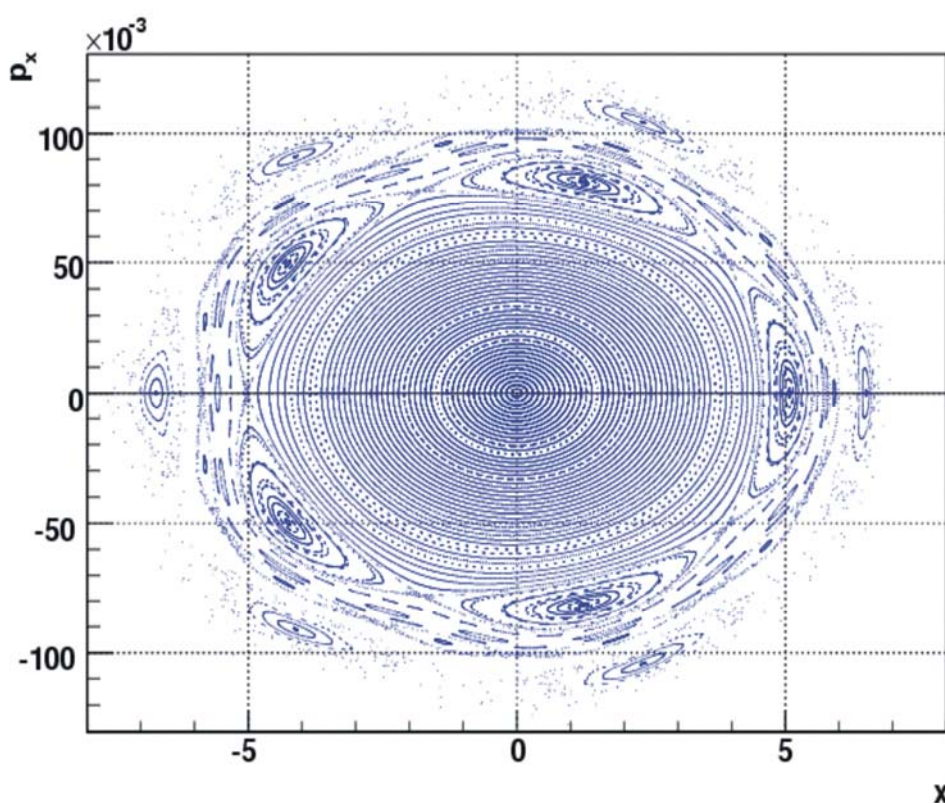


Рис.8.2.1 Фазовые траектории резонансов высокого порядка.

В качестве иллюстрации на рис.8.2.1 приведен фазовый портрет в координатах (x, x') , полученный для реальной структуры циклического ускорителя с помощью математического моделирования. По мере увеличения начальной амплитуды движения, частота меняется, и последовательно становятся видны траек-

тории резонансов 5-го и 6-го порядков. Причем резонанс 6-го порядка прослеживается на границе области устойчивого движения в виде «островков», погруженных в «море» стохастичности.

В принципе, в пределе сильного возмущения $f(I) \gg \alpha(I)$ резонансы высоких порядков могут напрямую ограничивать динамическую апертуру, так, как это делают резонансы низких порядков, рассматриваемые в Главе 10. Однако создать мультипольный магнитный элемент со столь большой амплитудой поля практически невозможно.

8.3 Особые точки резонанса

Фазовый портрет резонанса пятого порядка схематично показан на рис.8.1.2. Резонансные траектории представлены цепочкой из пяти островков. Значение переменной действия I_r , отвечающее точному выполнению резонансного условия, находится из уравнения ($m = 5$)

$$\nu(I_r) = \nu_0 + \Delta \nu(I_r) = n / m, \quad (8.3.1)$$

которое может быть переписано в виде

$$\alpha'(I_r) = n / m - \nu_0 = -\delta, \quad (8.3.2)$$

где, напомним, штрих обозначает производную по I , (см. (8.2.1)), а δ – отстройка невозмущенной частоты от резонансной. В частности, из (8.2.2)

$$I_r = -\frac{\delta}{2\alpha_0}. \quad (8.3.3)$$

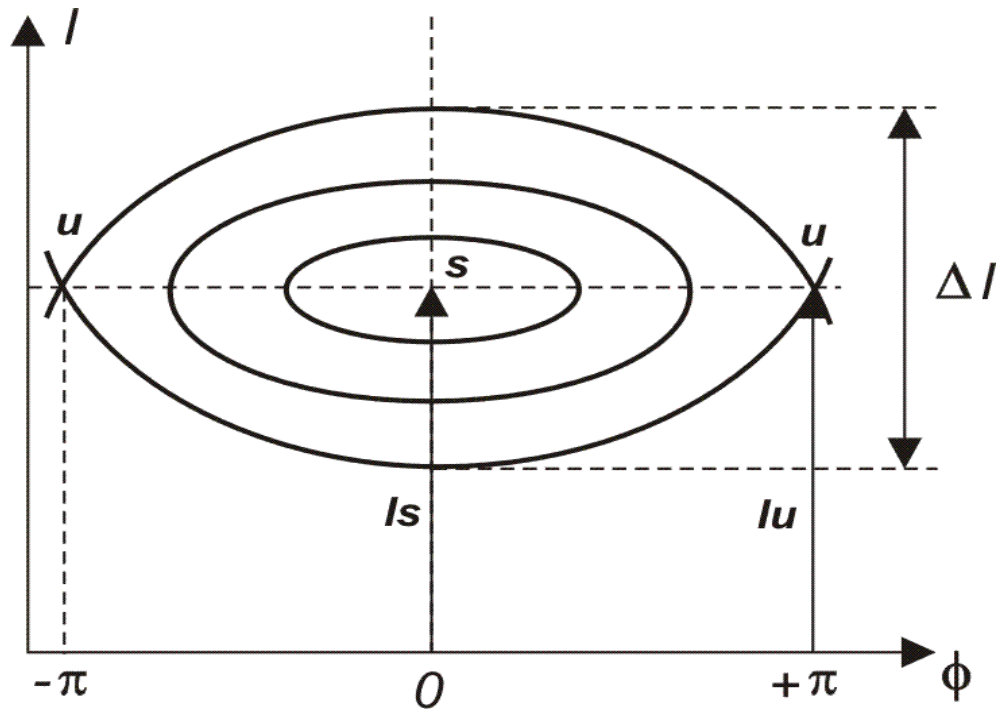


Рис.8.3.1 Резонансные траектории.

Траектории одного резонансного островка показаны на рис.8.3.1 и, фактически, повторяют фазовый портрет маятника (рис.6.4.1).

В центре фазовой области резонанса находится эллиптическая (или устойчивая) особая точка s ; сепаратриса – пограничная траектория, отделяющая резонансный и нерезонансный тип движения – соединяет две гиперболические (неустойчивые) особые точки u .

Эллиптической точке соответствует значение переменной действия I_s , а гиперболическим – I_u . Координаты этих точек не изменяются во времени, поэтому, их положение на фазовой диаграмме может быть найдено из уравнений Гамильтона

$$\frac{dI}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = 0. \quad (8.3.4)$$

Первое условие, примененное к (8.1.6) дает

$$\sin m\phi = 0 \quad \text{или} \quad \phi = \pm k\pi / m, \quad (8.3.5)$$

где k – целое. Второе условие (8.3.4) совместно с первым приводит к уравнению

$$\delta + \alpha'(I_{u,s}) \pm f'(I_{u,s}) = 0. \quad (8.3.6)$$

Знак «–» соответствует минимуму потенциала и, следовательно, эллиптической (устойчивой) особой точке, и наоборот, при знаке «+» потенциал максимален и особая точка – гиперболическая (неустойчивая).

Подставив δ из (8.3.2) в (8.3.6) получим

$$-\alpha'(I_r) + \alpha'(I_{u,s}) \pm f'(I_{u,s}) = 0. \quad (8.3.7)$$

Представив действие, соответствующее положению особой точки как

$$I_{u,s} = I_r + (I_{u,s} - I_r), \quad (8.3.8)$$

и предположив, что $(I_{u,s} - I_r) \ll I_r$, можно записать следующее разложение

$$\alpha'(I_{u,s}) \approx \alpha'(I_r) + \alpha''(I_r)(I_{u,s} - I_r) \quad \text{и} \quad f'(I_{u,s}) \approx f'(I_r) + f''(I_r)(I_{u,s} - I_r). \quad (8.3.9)$$

Подставляя (8.3.9) в (8.3.7) и учитывая (8.2.5), получим

$$I_{u,s} \approx I_r \pm \frac{f'(I_r)}{\alpha''(I_r)}, \quad (8.3.10)$$

где «+» соответствует устойчивой точке, а «–» – неустойчивой. Как и раньше, можно сказать, что в рассматриваемом приближении

$$f' \sim I^{k/2-1} \ll \alpha'' = \text{const},$$

поэтому можно сказать, что I_s слегка больше, а I_u слегка меньше значения резонансной амплитуды I_r .

8.4 Ширина сепаратрисы резонанса

Важной величиной, характеризующей степень влияния резонанса на движение, является размер сепаратрисы по переменной ΔI , показанный на рис.8.3.1.

Ширина сепаратрисы может быть найдена из условия сохранения резонансного гамильтониана (8.1.6). Поскольку гиперболическая точка u принадлежит сепаратрисе, то значения гамильтониана в этой и в любой другой точке сепаратрисы должны быть равны:

$$\delta \cdot I_0 + \alpha(I_0) + f(I_0) \cos m\phi = \delta \cdot I_u + \alpha(I_u) + f(I_u), \quad (8.4.1)$$

где I_0 – действие на сепаратрисе. Максимальная ширина сепаратрисы по действию соответствует угловому положению эллиптической точки (рис.8.3.1), для которой, согласно (8.3.5) и (8.3.6), $\cos m\phi = -1$. Учитывая это и предполагая, что ширина резонанса мала, по сравнению величиной действия для точки u

$$I_0 = I_u + \Delta I, \quad \Delta I \ll I_u, \quad (8.4.2)$$

можно разложить $\alpha(I_0)$ и $f(I_0)$ в (8.4.1) в ряд Тейлора до второго порядка, что даст

$$\Delta I [\delta + \alpha'(I_u) + f'(I_u)] + \frac{1}{2} \Delta I^2 [\alpha''(I_u) - f''(I_u)] = 2f(I_u). \quad (8.4.3)$$

Выражение в скобках при ΔI определяет устойчивую гиперболическую точку (8.3.6) и, следовательно, равно нулю. Учитывая (8.2.5) и записывая, ввиду (8.3.10), $I_u \approx I_r$ получим оценку размера сепаратрисы резонанса по действию:

$$\Delta I \approx \pm 2 \sqrt{\frac{f(I_r)}{\alpha''(I_r)}}. \quad (8.4.4)$$

Знак « $\pm$ » появился из-за того, что при вычислении мы учитывали только одну ветвь сепаратрисы.

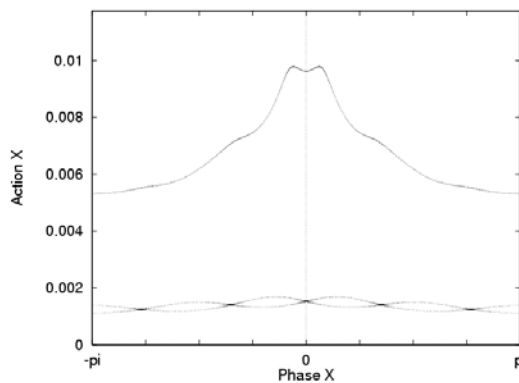
В частности, для (8.2.2) имеет место

$$\Delta I \approx \pm \sqrt{2f(I_r)/\alpha_0}. \quad (8.4.5)$$

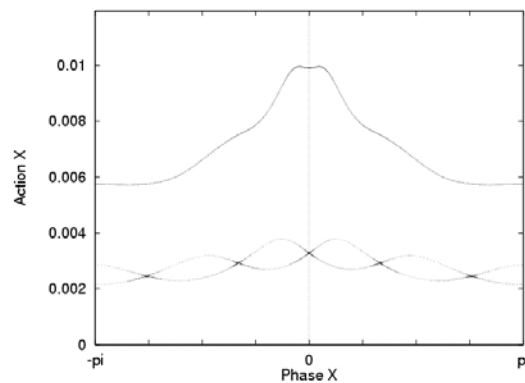
Теперь, если вспомнить, что согласно (8.2.3) $f(I_r) \sim I_r^{k/2}$, а резонансное действие равно (8.3.3) $I_r = -\delta/2\alpha_0$, то для (8.4.5) можно записать оценку

$$\Delta I \sim \delta^{k/4}.$$

Иными словами, для $k > 4$ при приближении частоты к резонансному условию ($\delta \rightarrow 0$) размер резонанса уменьшается, он как бы «схлопывается». При $\nu = n/m$ ширина сепаратрисы $\Delta I = 0$.



$$\nu_x = 1.205$$



$$\nu_x = 1.220$$

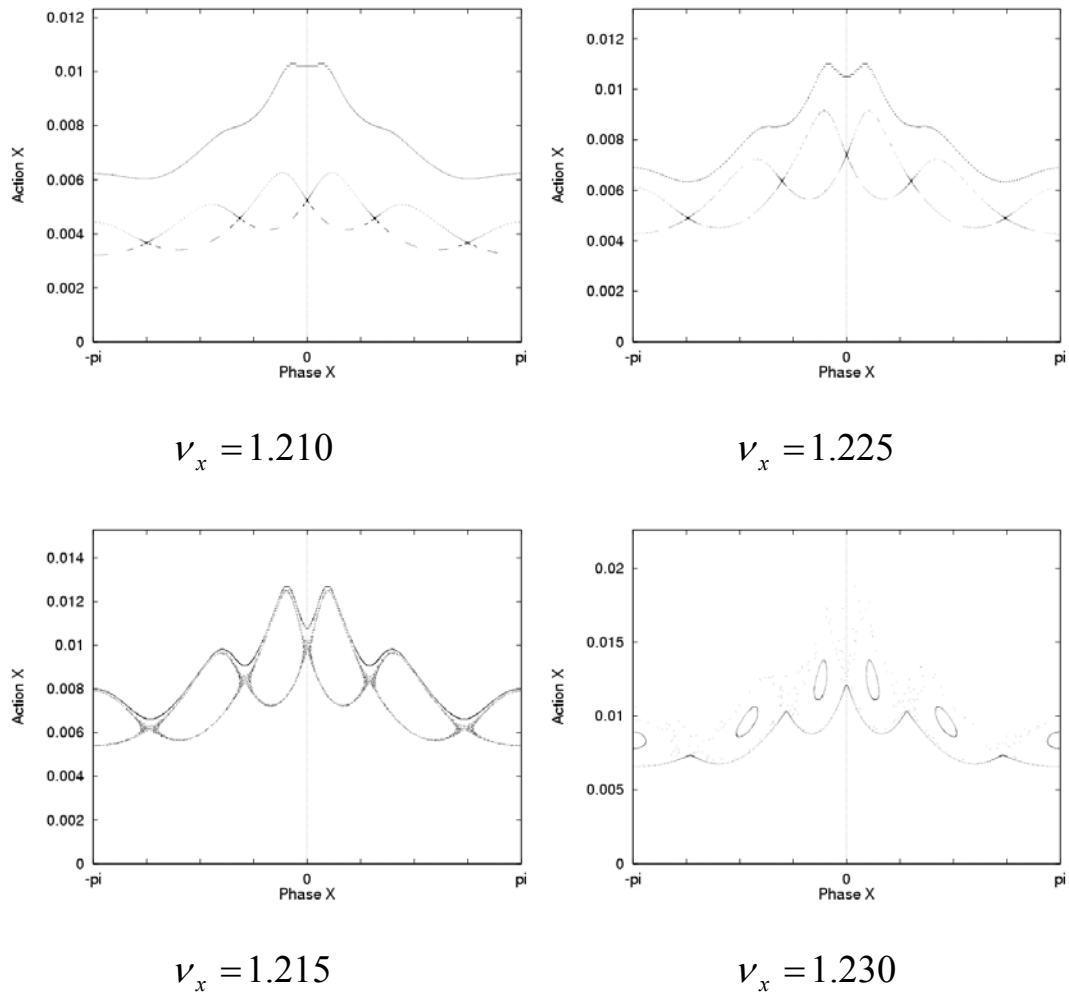


Рис.8.4.1 Фазовое пространство вблизи резонанса $5\nu_x = 6$ для разных бетатронных частот.

Последний вывод проиллюстрирован на рис.8.4.1 с помощью моделирования резонанса $5\nu_x = 6$ для разного набора начальных (невозмущенных) частот. Чем ближе невозмущенная частота к резонансному значению $\nu_x = 1.2$ ($\delta \rightarrow 0$), тем ближе к началу координат реализуется резонанс ($I_r \rightarrow 0$), и тем меньше ширина его сепаратрисы ($\Delta I \rightarrow 0$).

И, наоборот, при некоторой отстройке от резонансной частоты, резонансный островок увеличивается, и вблизи границы устойчивости стохастическая об-

ласть разрушает и поглощает ранее устойчивые траектории внутри резонанса, а сама граница устойчивости (динамическая апертюра) уменьшается приблизительно на ширину резонанса.

8.5 Фазовые колебания

Запишем еще раз гамильтониан (8.1.6), описывающий поведение системы вблизи резонанса

$$H = \delta \cdot I + \alpha(I) + f(I) \cos m\phi, \quad (8.5.1)$$

где $\delta = \nu - n / m$ - резонансная отстройка по частоте.

Рассмотрим малые отклонения траектории от устойчивой точки I_s , представив действие для этой траектории в виде $I = I_s + \Delta I$ ($\Delta I \ll I_s$). Раскладывая $\alpha(I)$ и $f(I)$ в ряд до членов ΔI^2 включительно, получим

$$\begin{aligned} H \approx & [\delta \cdot I_s + \alpha(I_s)] + \Delta I [\delta + \alpha'(I_s) + f'(I_s) \cos m\phi] \\ & + \frac{1}{2} \Delta I^2 [\alpha''(I_s) + f''(I_s) \cos m\phi] + f(I_s) \cos m\phi. \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Первое выражение в квадратных скобках является константой и может быть опущено, поскольку оно не влияет на уравнения движения. Второе выражение в квадратных скобках равно нулю согласно определению устойчивой точки (8.3.6). Кроме того, учитывая $\alpha'' \gg f''$, получим гамильтониан, соответствующий движению системы вблизи резонанса

$$H \approx \frac{1}{2} \alpha''(I_s) \cdot \Delta I^2 + f(I_s) \cos m\phi. \quad (8.5.3)$$

Видно, что получившийся гамильтониан по виду совпадает с гамильтонианом маятника

$$H = \frac{1}{2}ap^2 - b \cos q = E_0, \quad (8.5.4)$$

и именно в этом смысле, как уже упоминалось, гамильтониан маятника универсальным образом описывает поведение системы вблизи любого нелинейного резонанса. Два дифференциальных уравнений Гамильтона первого порядка, получаемые из (8.5.3), могут быть сведены в уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} + m \cdot \alpha''(I_s) \cdot f(I_s) \sin m\phi = 0, \quad (8.5.5)$$

или, учитывая, что для малых отклонений $\sin m\phi \approx m\phi$,

$$\ddot{\phi} + m^2 \cdot \alpha''(I_s) \cdot f(I_s) \phi = 0. \quad (8.5.6)$$

Последнее уравнение описывает колебания угловой переменной ϕ около устойчивой точки с частотой

$$\Omega = m \sqrt{\alpha''(I_s) f(I_s)}. \quad (8.5.7)$$

Примером такого поведения являются синхротронные колебания частицы с неравновесной энергией в ускорителе с резонансным типом ускорения. Здесь угловой переменной ϕ соответствует фаза синхротронного движения, а выражение (8.5.7) дает частоту малых синхротронных колебаний.

Рекомендуемая литература

1. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО РАН 278, Новосибирск, 1969.
2. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
3. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969.
4. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
5. Б.В.Чириков. Нелинейный резонанс. НГУ, Новосибирск, 1977.
6. А.Лихтенберг. Динамика частиц в фазовом пространстве. «Атомиздат», М., 1972.
7. Пестриков Д. В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие НГУ, Новосибирск, 2002.
8. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004.

Глава 9. Одномерный резонанс низкого порядка

В отличие от рассмотренных в предыдущей главе резонансов высоких порядков, для которых удастся установить некоторые общие, независимо от порядка резонанса, свойства, для резонансов низких порядков это не так. Их параметры существенно зависят от поведения, величины и знака $\alpha(I)$ и $f(I)$. Для примера ниже мы разберем параметрический, секступольный и октупольный резонансы.

9.1 Параметрический резонанс

В качестве первого примера рассмотрим возмущение, вызванное погрешностями коэффициента фокусировки $K(s) + \Delta K(s)$. Мы уже исследовали такое возмущение в Главе 8.2 с помощью нерезонансной теории. Полученная там производящая функция (8.2.8) содержит малый знаменатель и может быть использована только вдали от полуцелых резонансов $\nu = n/2$. Сейчас же наша цель – изучение поведения частицы в окрестности такого резонанса, который называется параметрическим.

Начнем рассмотрение с гамильтониана (8.2.3)

$$H = J/\beta(s) + \frac{1}{2} J \cdot \Delta K(s) \beta(s) [1 + \cos 2\varphi], \quad (9.1.1)$$

в котором избавимся от временной зависимости невозмущенного гамильтониана с помощью (7.3.15), а возмущенную часть разложим в ряд Фурье по азимутальной переменной $\theta = s/R$ (здесь и далее, для простоты вычислений мы будем считать

возмущение четным, так что в разложении присутствуют только косинусные гармоники):

$$H = \nu_0 J + J A_0 + J \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_n \cos(2\varphi + n\theta). \quad (9.1.2)$$

В (9.1.2) мы выделили из-под знака суммы нулевую гармонику возмущения

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{2} R \cdot \Delta K(s) \beta(s) d(s/R), \quad (9.1.3)$$

которая отвечает за сдвиг частоты колебаний. В обозначениях (9.1.3)

$$\alpha(J) = A_0 \cdot J,$$

и уравнение (9.2.1) позволяет сразу найти сдвиг частоты

$$\Delta \nu = d\alpha(J)/dJ = \frac{1}{4\pi} \oint \Delta K(s) \beta(s) ds.$$

Из-за линейной зависимости $\alpha(I)$, сдвиг частоты не зависит от амплитуды колебаний частицы: частота всех частиц пучка смещается на величину $\Delta \nu$. Поэтому, нулевую гармонику возмущения можно выбросить из (9.1.2), а частоту невозмущенного гамильтониана заменить на $\nu = \nu_0 + \Delta \nu$. Выбирая из (9.1.2) резонансную гармонику с номером n , для которой $\nu = n/2 + \delta$, $\delta \ll 1$, получим

$$H = \nu \cdot J + J A_n \cos(2\varphi - n\theta). \quad (9.1.4)$$

Переход к резонансным переменным осуществляется с помощью производящей функции (9.1.4)

$$F_2(\varphi, I) = \left(\varphi - \frac{n}{2} \theta \right) \cdot I, \quad (9.1.5)$$

а каноническое преобразование, которое она задает

$$I = J, \quad \phi = \varphi - \frac{n}{2} \theta \quad \text{и} \quad \bar{H} = H + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \theta} = H - \frac{n}{2} I,$$

приводит к следующему виду гамильтониана параметрического резонанса

$$\bar{H} = I \cdot (\delta + A_n \cos 2\phi), \quad (9.1.6)$$

который является интегралом движения, т.к. не зависит от времени явно. Уравнение описывает движение в потенциальной яме $\bar{H}(I, \phi)$, а фазовые траектории $I(\phi)$ находятся решением (9.1.6) для $\bar{H} = E_0$.

Характер движения в окрестности резонанса в сильной степени зависит от соотношения δ и A_n . Перепишем (9.1.6) в виде

$$H = I \cdot (\delta / A_n + \cos 2\phi). \quad (9.1.7)$$

Мы нормировали все выражение на константу A_n , что, очевидно, не скажется на уравнениях движения. Пусть, для определенности $\delta / A_n > 0$; $\cos 2\phi$ принимает значение $+1$ при $\phi = 0, \pi$, и -1 при $\phi = \pm \pi / 2$.

Движение, если оно финитно, заключено между двумя ветвями гамильтониана (9.1.17): $H_+ = H(I)_{\cos 2\phi=+1}$ и $H_- = H(I)_{\cos 2\phi=-1}$. Рис.9.1.1 показывает схематически поведение H_+ и H_- для различных значений параметра δ / A_n .

Обе функции линейно зависят от переменной действия, и для $\delta / A_n > 1$ (когда либо частота далека от точного значения резонанса, либо амплитуда гармоники мала), движение для любого значения $E_0 > 0$ остается конечным. Для случаев же $\delta / A_n = 1$ и $\delta / A_n < 1$ это не так, и движение, независимо от начальных условий, оказывается неустойчивым.

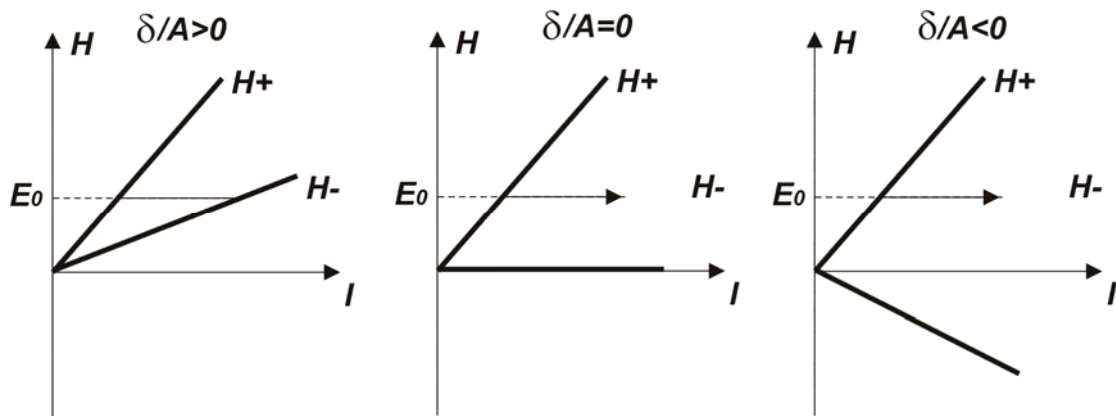
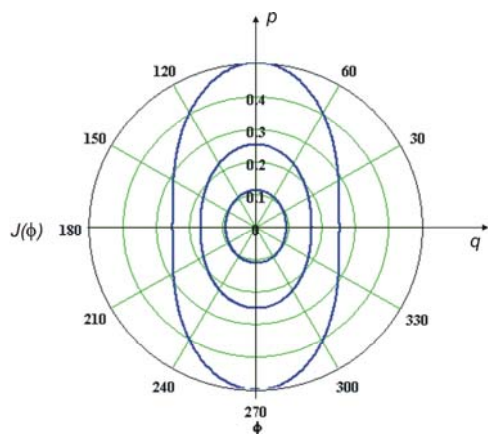
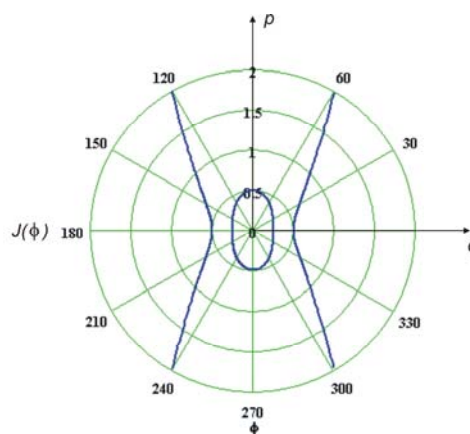


Рис.9.1.1 Схематическое поведение H_+ и H_- от I .

На рис. 10.1.2 приведены фазовые диаграммы параметрического резонанса для разных значений δ / A_n .

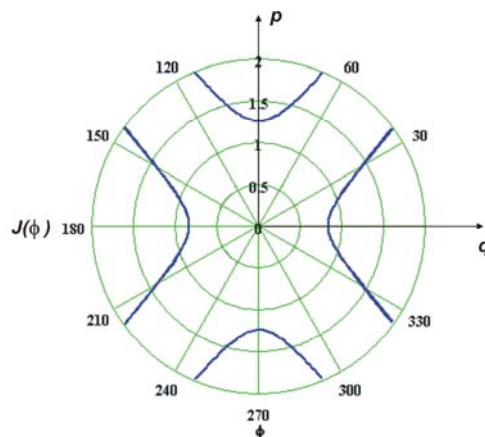


(а) $\delta / A_n = 10,5,3$ (снаружи внутрь)



(б) $\delta / A_n = 1$ для примера показана,

также, траектория с $\delta / A_n = 3$



$$(в) \delta / A_n = 0.1$$

Рис.9.1.2 Фазовые траектории вблизи параметрического резонанса.

Если $\delta \gg A_n$, то траектории (рис.9.1.2, а) близки к невозмущенным окружностям, влияние резонанса мало, и амплитуда бетатронных колебаний практически постоянна. При $\delta / A_n \rightarrow 1$ траектории искажаются, что указывает на медленные биения амплитуды колебаний между $I_{\max}$ и $I_{\min}$. Глубину биений можно вычислить, пользуясь постоянством гамильтониана (9.1.6) вдоль фазовой кривой:

$$I_{\max}(\delta - A_n) = I_{\min}(\delta + A_n). \quad (9.1.8)$$

Или, переходя к отклонению частицы от оси пучка $A \sim \sqrt{I}$,

$$\frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \left(\frac{\delta + A_n}{\delta - A_n} \right)^{1/2}. \quad (9.1.9)$$

При $\delta / A_n = 1$ глубина биений бесконечна, фазовые траектории разрываются (рис.9.1.2, б), и движение становится неустойчивым.

При дальнейшем уменьшении δ / A_n картина существенно не меняется (рис.9.1.2, в), движение неустойчиво, увеличивается только скорость возрастания амплитуды.

Точно на резонансе, при $\delta = 0$, амплитуда, как легко получить из уравнения Гамильтона $dI / d\theta = -\partial H / \partial \phi$, меняется с максимальной скоростью

$$A \sim \exp(\pm |A_n| \theta), \quad (9.1.10)$$

и либо уменьшается, либо возрастает в зависимости от начальных условий. Однако резонансное уменьшение амплитуды рано или поздно сменяется ростом, и частица теряется за пределами апертуры.

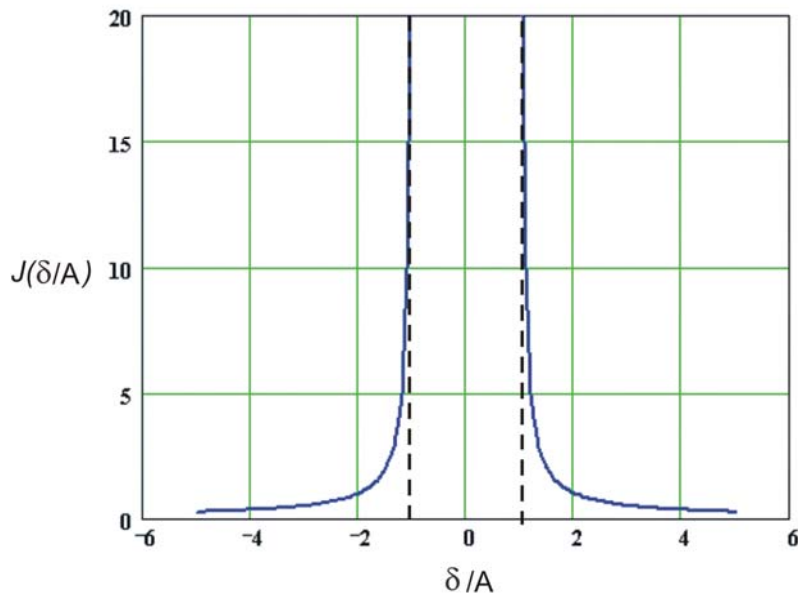


Рис.9.1.3 Резонансная кривая параметрического резонанса. Запрещенная полоса

$\delta / A_n = \pm 1$ показана пунктирными линиями.

Интересно построить зависимость амплитуды колебаний, как функцию бетатронной частоты вблизи резонанса $I(\delta)$. Такая зависимость называется резонансной кривой и легко находится из (9.1.7) при $\cos 2\phi = \pm 1$:

$$I(\delta) = \frac{H}{\delta / A_n \pm 1}. \quad (9.1.11)$$

Из графика этой функции, приведенного на рис.9.1.3, видно, что амплитуда колебаний равна бесконечности не только в точности на резонансе $\nu = n/2$, но и внутри некоторой полосы вблизи резонанса, где $\delta / A_n = \pm 1$. Этот факт следует и из анализа фазовых траекторий на рис.9.1.2. Кроме того, нежелательными явля-

ются слишком большие биения амплитуды колебаний вблизи параметрического резонанса, которые могут привести к потере частиц на ограничениях апертуры. Поэтому, область частот в окрестности полужелтых значений является запрещенной, а ее ширина зависит от силы гармоники A_n , которую всегда полезно уменьшать, не допуская больших ошибок фокусировки.

9.2 Секступольный одномерный резонанс

Согласно (7.2.4) возмущенная часть секступольного горизонтального гамильтониана имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{6} m(s) x^3. \quad (9.2.1)$$

Переход к переменным действие-фаза $x = \sqrt{2J\beta(s)} \cos \varphi$ с учетом того, что

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi)$$

приводит к

$$H_1 = \frac{1}{6\sqrt{2}} J^{3/2} \beta^{3/2}(s) m(s) (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi). \quad (9.2.2)$$

Отметим две важные особенности получившегося гамильтониана. Во-первых, горизонтальное секступольное возмущение возбуждает резонансы на частотах $\nu = n/3$ и $\nu = n$. А во-вторых, (9.2.2) не содержит постоянной составляющей по φ , и попытка его усреднения, с целью получения зависимости частоты от амплитуды, приведет к результату $\langle H_1 \rangle_\varphi = 0$. Иными словами, квадратичная

нелинейность в первом порядке приближения не приводит к сдвигу частоты. Такой же результат для случая постоянного по азимуту поля был получен ранее в разделе 4.2.

Исследуем сейчас поведение системы вблизи резонанса $3\nu = n$. Для этого разложим (9.2.2) по гармоникам азимута $\theta = s/R$, и оставим гармонику, соответствующую ближайшему резонансу $A_n = 2^{3/2} A_{3n}$:

$$H \approx \nu \cdot J + J^{3/2} A_n \cos(3\phi - n\theta). \quad (9.2.3)$$

Переход к резонансным переменным с помощью соответствующей производящей функции (9.1.4) приводит к гамильтониану, описывающему поведение частицы вблизи резонанса $3\nu_x = n$

$$H = \delta \cdot I + I^{3/2} A_n \cos 3\phi, \quad (9.2.4)$$

где $\delta = \nu - n/3$ – отстройка по частоте. Будем для определенности полагать $\delta / A_n > 0$, противоположный знак приводит к зеркальному отражению фазовых траектории относительно оси p , не меняя сути результатов.

Далее мы можем повторить рассуждения, использованные при изучении параметрического резонанса. Движение происходит в потенциальной яме $H(I, \phi)$, а фазовые траектории находятся из $H = E_0$.

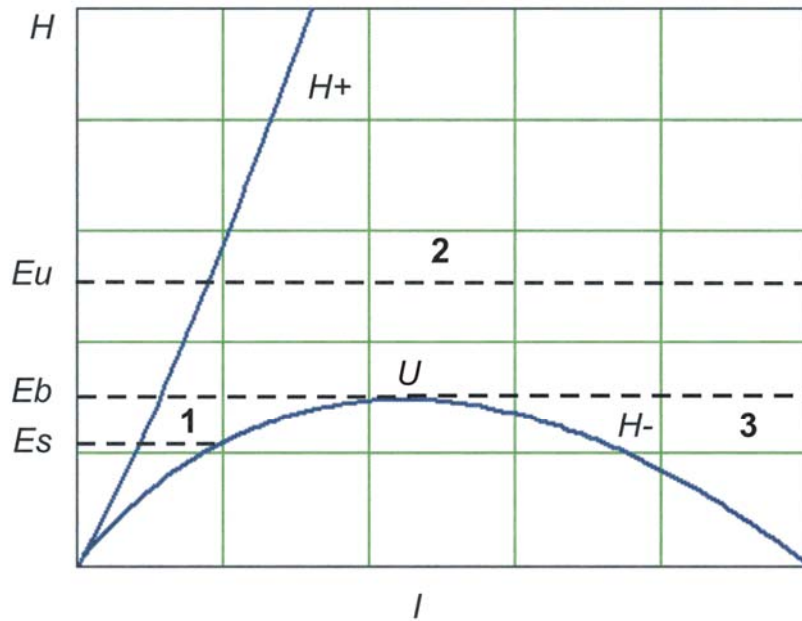


Рис.9.2.1 Схематическое поведение H_+ и H_- от I . U обозначает положение неустойчивой особой точки.

Характер фазовых кривых определяется двумя образующими потенциальной ямы $H_{\pm}$ (изображенными на рис.9.2.1), которые получаются из (9.2.4) при $\cos 3\phi = \pm 1$. На графике можно выделить три области движения. Область 1, слева от особой точки, устойчива при условии $E_0 = E_s < E_b$. Области 2 и 3 - неустойчивы. Энергия E_b соответствует сепаратрисе, разграничивающей устойчивое и неустойчивое движение.

Фазовые траектории резонанса показаны на рис.9.2.2. Сепаратриса характерной треугольной формы соединяет три неустойчивые особые точки, которые могут быть найдены из уравнений (9.3.4).

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 3 \sin 3\phi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial I} = \delta + \frac{3}{2} A_n \cdot I^{1/2} \cos 3\phi = 0, \quad (9.2.5)$$

Первое уравнение определяет угловые координаты гиперболических неподвижных точек: $\{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ или $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$. В точках первого набора $\cos 3\phi = +1$, а в точках второго – $\cos 3\phi = -1$.

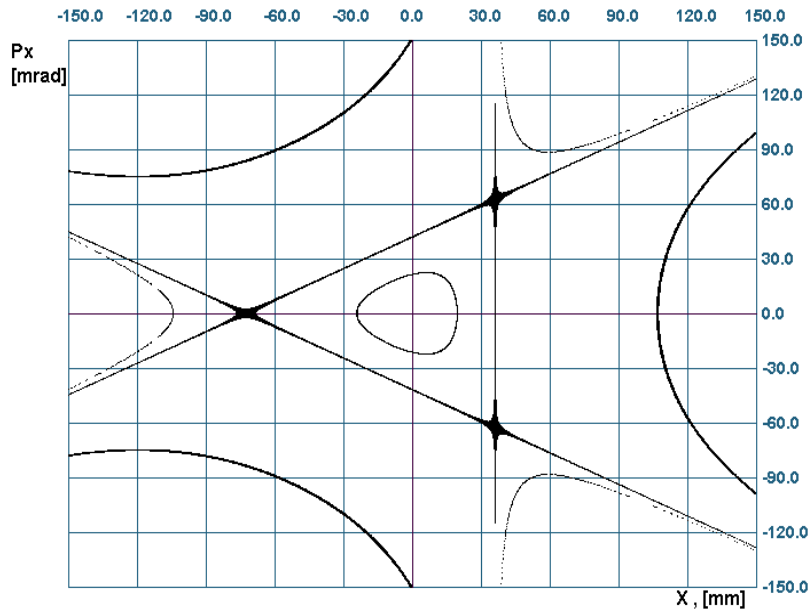


Рис.9.2.2 Фазовые траектории вблизи резонанса $\nu_x = n/3$.

Конкретный набор точек получается из второго уравнения (9.2.5):

$$I^{1/2} = -\frac{2\delta}{3A_n \cos 3\phi}, \quad (9.2.6)$$

где знак косинуса выбирается так, чтобы $I_x^{1/2} > 0$. Для нашего случая $\delta/A_n > 0$, следовательно, $\cos 3\phi = -1$, и угловое положение особых точек задается набором $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$. Подставляя $\cos 3\phi = -1$ в (9.2.6) получим положение точки по переменной действия

$$I^{1/2} = \frac{2\delta}{3A_n}. \quad (9.2.7)$$

Это значение может рассматриваться как граница динамической апертуры вблизи резонанса $\nu = n/3$. Переход к исходным переменным дает эту границу в виде

$$A_x = \sqrt{2\beta \cdot I} = \frac{2\delta}{3A_n} \cdot \sqrt{2\beta} . \quad (9.2.8)$$

Второй резонанс $\nu = n$, возбуждаемый секступольным возмущением, может быть рассмотрен так же, как и $3\nu = n$.

Для него, например, первое условие (9.2.5) дает $\sin \phi = 0$, следовательно, имеется только одна гиперболическая точка при $\phi = 0$ или $\phi = \pi$ (в зависимости от знака δ / A_n). Фазовый портрет такого резонанса показан на рис.9.2.3.

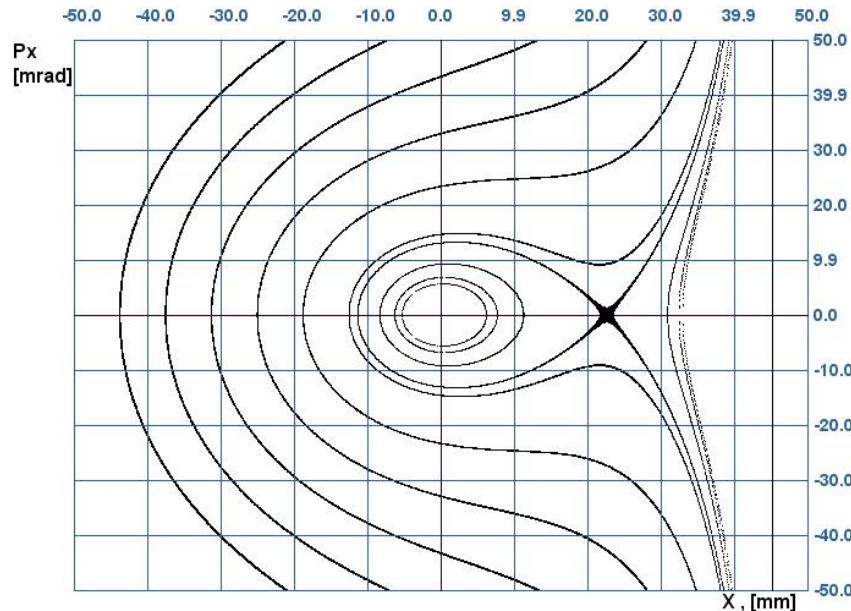


Рис.9.2.3 Фазовые траектории резонанса $\nu = n$.

9.3 Секступольный резонанс при ненулевой $\alpha(I)$

Картина резонанса существенно меняется, если в гамильтониан (9.2.4)

включить зависимость частоты от амплитуды (9.2.2) $\alpha(I) = \alpha_0 \cdot I^2$

$$H = \delta \cdot I + \alpha_0 \cdot I^2 + A_n I^{3/2} \cos 3\phi. \quad (9.3.1)$$

Как и раньше для определенности примем $\delta / A_n > 0$, но теперь усилим это условие тем, что и $\delta > 0$, и $A_n > 0$.

Чтобы найти области устойчивого движения, построим образующие потенциальной ямы $H_{\pm}$, которые получаются из (9.3.1) при $\cos 3\phi = \pm 1$. В зависимости от знака α_0 реализуются две конфигурации резонанса, показанные на рис.9.3.1. Соответствующие фазовые траектории приведены на рис.9.3.2.

Характерной особенностью обоих случаев является то, что теперь движение всегда заключено между $H_{\pm}$, то есть, ограничено стенками потенциальной ямы, то есть, является устойчивым. Говорят, что нелинейность (под которой понимают зависимость частоты от амплитуды) стабилизирует резонанс. Качественно картину можно представить следующим образом. При достижении резонансных условий амплитуда колебаний увеличивается, но, одновременно, изменяется частота движения, а, следовательно, нарушается резонансное условие, и неустойчивости не возникает.

Однако вернемся к анализу рис.9.3.1. Теперь на картине имеется два экстремума, в которых движение системы останавливается. Для случая $\alpha_0 > 0$ обе неподвижные точки лежат на одной кривой H_- , причем неустойчивая точка соот-

ветствует максимуму, а устойчивая – минимуму. Для случая $\alpha_0 < 0$ неустойчивая точка принадлежит H_- , а устойчивая – H_+ .

Во избежание недоразумений следует еще раз оговориться о значении терминов «устойчивый» и «неустойчивый» в данном случае: траектория близкая к устойчивой точке всегда будет лежать в ее окрестности, в то время как траектория близкая к неустойчивой точке будет, с течением времени, удаляться от нее. Однако, амплитуда колебаний частицы, попавшей в окрестность гиперболической точки, не обязательно растет к бесконечности, приводя к потере частицы на стенках вакуумной камеры.

Для обеих конфигураций нелинейность формирует еще три (кроме существовавшей ранее центральной) области устойчивого (в упомянутом смысле) движения (рис.9.3.2). Для лучшего понимания их особенностей найдем положение особых (неподвижных) точек на фазовой плоскости с помощью условий (9.3.4).

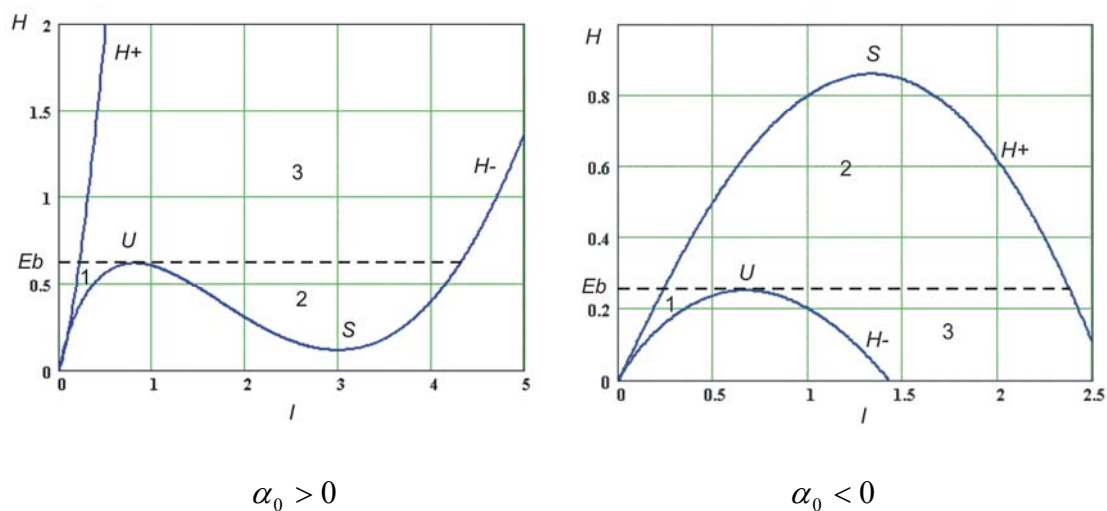


Рис.9.3.1 Схематическое поведение H_+ и H_- от I . U и S обозначает положение неустойчивой и устойчивой особых точек.

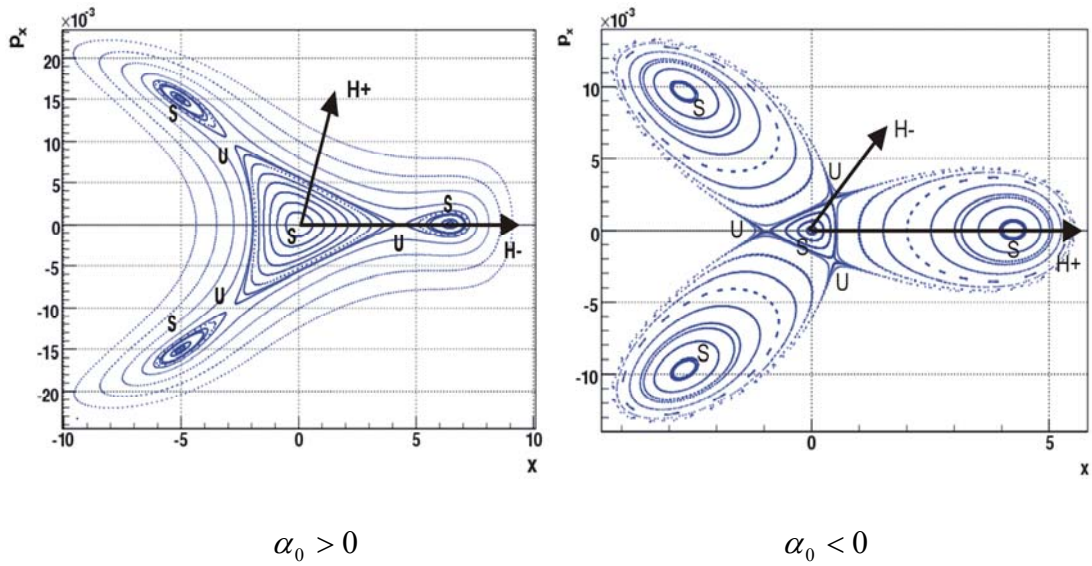


Рис.9.3.2 Фазовые траектории резонанса $3\nu = n$.

Условие $\partial H / \partial \phi = 0$ приводит к первому уравнению (9.2.5) и, следовательно, задает такое же угловое положение особых точек, как и в случае нулевого сдвига частоты: $\{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ и $\{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$. В точках первого набора $\cos 3\phi = +1$, а в точках второго – $\cos 3\phi = -1$.

Однако уравнение $\partial H / \partial I = 0$, которое приводит к

$$\delta + 2\alpha_0 \pm \frac{3}{2} A_n I_{u,s}^{3/2} = 0, \quad (9.3.2)$$

где знак перед третьим слагаемым определяется условием $\cos 3\phi = \pm 1$, нужно рассматривать для двух конфигураций отдельно.

(а) Для $\alpha_0 > 0$ решение квадратного уравнения (9.3.2) дает

$$I_{u,s}^{1/2} = \frac{3A_n}{8\alpha_0} [\mp 1 \pm \sqrt{D}], \quad \text{где} \quad D = 1 - \frac{32\alpha_0\delta}{9A_n}. \quad (9.3.3)$$

Условие существования положительного решения $1 > D > 0$ приводит к тому, что оба экстремума лежат на кривой H_- ($\cos 3\phi = -1$, что соответствует $+1$ в квадратных скобках (9.3.3)). А значения переменной действия в неподвижных точках равны

$$I_u^{1/2} = \frac{3A_n}{8\alpha_0} [1 - \sqrt{D}] \quad \text{и} \quad I_s^{1/2} = \frac{3A_n}{8\alpha_0} [1 + \sqrt{D}]. \quad (9.3.4)$$

(б) Для $\alpha_0 < 0$ решение квадратного уравнения (9.3.2) дает

$$I_{u,s}^{1/2} = -\frac{3A_n}{8|\alpha_0|} [\mp 1 \pm \sqrt{D}], \quad \text{где} \quad D = 1 + \frac{32|\alpha_0|\delta}{9A_n}. \quad (9.3.5)$$

Теперь всегда $D > 1$, и положительность решения приводит к тому, что устойчивая точка лежит на кривой H_+ ($\cos 3\phi = +1$ и -1 в квадратных скобках (9.3.5)), а неустойчивая – H_- ($\cos 3\phi = -1$ и $+1$ в квадратных скобках (9.3.5)). Координаты переменной действия для рассматриваемого случая будут

$$I_u^{1/2} = -\frac{3A_n}{8|\alpha_0|} [1 - \sqrt{D}] \quad \text{и} \quad I_s^{1/2} = \frac{3A_n}{8|\alpha_0|} [1 + \sqrt{D}]. \quad (9.3.6)$$

Для полноты картины секступольного резонанса третьего порядка с ненулевой зависимостью частоты колебаний, нужно бы рассмотреть варианты поведения системы с разными знаками δ и A_n , а также, случай, когда в (9.3.3) $D = 0$, однако, это предлагается сделать читателю. Как уже отмечалось ранее, для резонансов низких порядков необходимость учета различных знаков и величин резонансной отстройки, гармоники возмущения и сдвига частоты приводит к множественным вариантам поведения фазовых кривых.

Размер новых областей устойчивого движения (резонансных островков), появляющихся при $\alpha(I) \neq 0$, может быть найден из условия сохранения гамильтониана на сепаратрисной траектории $H_s(I, \phi) = H(I_u, \phi_u)$. При этом, однако, получается уравнение четвертой степени, а оценка, которой мы пользовались в разделе 8.4 неприменима, из-за того, что резонансный островок не мал по сравнению с величиной резонансного действия.

Целый резонанс $\nu = n$, который также возбуждается секступольным возмущением, может быть исследован при ненулевой зависимости частоты от амплитуды аналогично резонансу $3\nu = n$. Характерное поведение фазовых траекторий вблизи целого резонанса для $\delta / A_n > 0$ и $\alpha_0 < 0$ показано на рис.9.3.3.

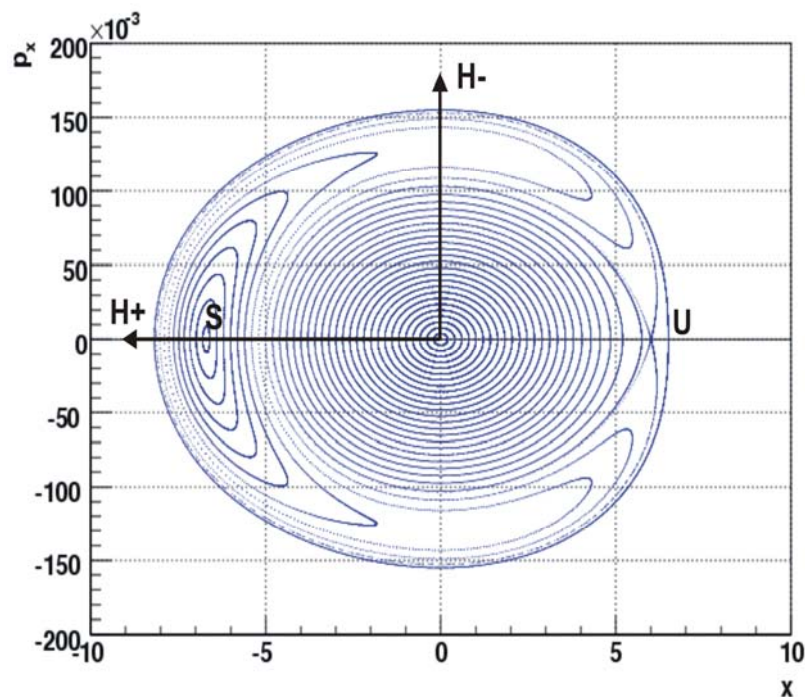


Рис.9.3.3 Фазовые траектории резонанса $\nu = n$ при $\delta / A_n > 0$ и $\alpha_0 < 0$.

9.4 Октупольный одномерный резонанс

Согласно (7.2.4) октупольная поправка к невозмущенному горизонтальному движению имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{24} n(s) x^4. \quad (9.4.1)$$

К переменным действие-фаза перейдем при помощи $x = \sqrt{2J\beta(s)} \cos \varphi$, и учтем, что

$$\cos^4 \varphi = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3).$$

Как и в случае секступольного возмущения, октупольное возбуждает два резонанса: $4\nu = n$ и $2\nu = n$. Однако, теперь постоянная составляющая не равна нулю, следовательно, зависимость частоты от амплитуды появляется уже в первом порядке приближения.

В качестве примера рассмотрим резонанс $4\nu = n$, для которого

$$H_1 = \frac{1}{48} J \cdot \beta^2(s) \cdot n(s) (3 + \cos 4\varphi). \quad (9.4.2)$$

Переход к резонансным переменным даст

$$H = \delta \cdot I + \alpha_0 I^2 + A_n I^2 \cos 4\phi, \quad (9.4.3)$$

где $\delta = \nu - n/4$ – отстройка по частоте от ближайшего резонанса, а α_0 и A_n определяются нулевой и резонансной азимутальной гармоникой (9.4.2).

Условие

$$\partial H / \partial \phi = 4 \sin 4\phi = 0 \quad (9.4.4)$$

задает угловые координаты восьми особых точек (четырех – эллиптических и четырех – гиперболических), а $\partial H / \partial I$ (совместно с (9.4.4)) определяет их радиальные координаты

$$\delta + 2I_{u,s}(\alpha_0 \pm A_n) = 0. \quad (9.4.5)$$

Амплитуда неподвижных точек равна

$$I_{u,s} = -\frac{\delta}{2(\alpha_0 \pm A_n)}. \quad (9.4.6)$$

Конфигурация фазового пространства зависит от знаков и величин δ , α_0 и A_n .

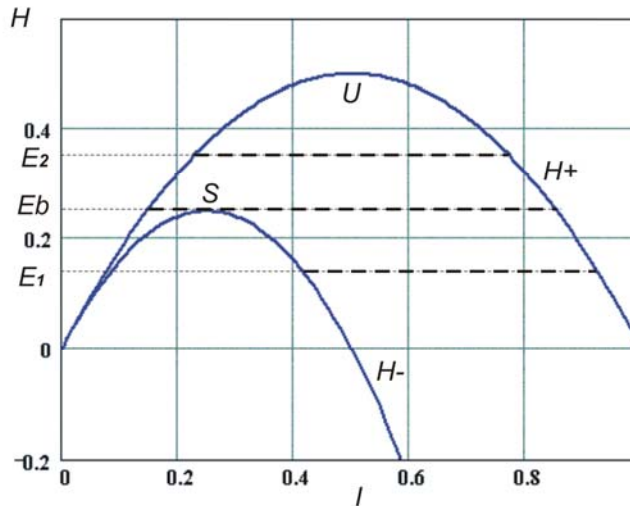


Рис.9.4.1 Кривые $H_{\pm}$ для октупольного возмущения.

Так, при $\delta > 0$ неподвижные точки (а следовательно, четыре резонансные островка) возникают при $(\alpha_0 \pm A_n) < 0$. Поведение кривых $H_{\pm}$ при этом похоже на рис.9.3.1 при $\alpha_0 < 0$.

Другое соотношение коэффициентов, входящих в (9.4.5), приводит к другой картине фазового пространства. Пример фазовых кривых показан вблизи $4\nu = n$ на рис.9.4.2.

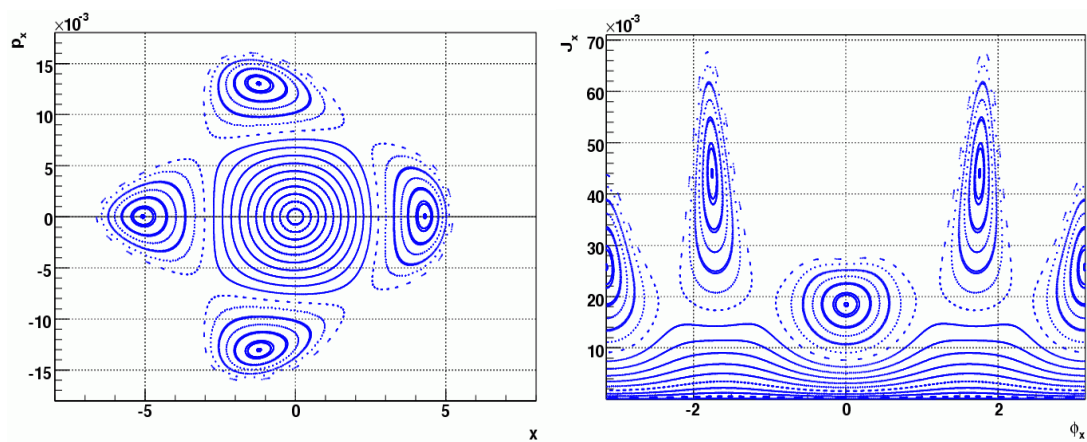


Рис.9.4.2 Фазовое пространство резонанса $4\nu = n$.

Рекомендуемая литература

1. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО РАН 278, Новосибирск, 1969.
2. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
3. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969 г.
4. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
5. Б.В.Чириков. Нелинейный резонанс. НГУ, Новосибирск, 1977.
6. А.Лихтенберг. Динамика частиц в фазовом пространстве. «Атомиздат», М., 1972.
7. Пестриков Д. В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие НГУ, Новосибирск, 2002.
8. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004.
9. В.В.Сажаев, Динамическая апертура ускорителей с высоким хроматизмом: теория и эксперимент, Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1997.

Глава 10. Резонансный выпуск частиц из ускорителя

До сих пор мы говорили о нелинейных явлениях скорее как о негативных для движения пучка: нелинейности приводят к появлению резонансов, уменьшают динамическую апертуру, ограничивают время жизни частиц и т.п. Однако иногда нелинейные эффекты могут использоваться для выполнения тех или иных задач, возникающих в процессе работы циклического ускорителя.

Характерным примером является выпуск частиц из ускорителя с использованием свойств нелинейного резонанса. При выпуске частиц должно соблюдаться два условия:

- при обычной работе установки (когда не требуется выпускать частицы) устройства выпуска не должны влиять на движение пучка, в частности, ограничивать апертуру и уменьшать время жизни,
- эффективность выпуска (т.е. отношение числа успешно выпущенных частиц к исходной интенсивности пучка) должна быть достаточно высокой, идеально – близкой к 100%.

Для выпуска в вакуумную камеру ускорителя за пределами апертуры помещается специальное устройство – выпускной (септум-) магнит (рис.10.1), которое с помощью электрического, магнитного или электромагнитного поля отклоняет частицы так, чтобы они перешли из вакуумной камеры ускорителя в канал транс-

портировки. При обычной работе ускорителя амплитуда колебаний частиц мала, и они не попадают в область поля септума.

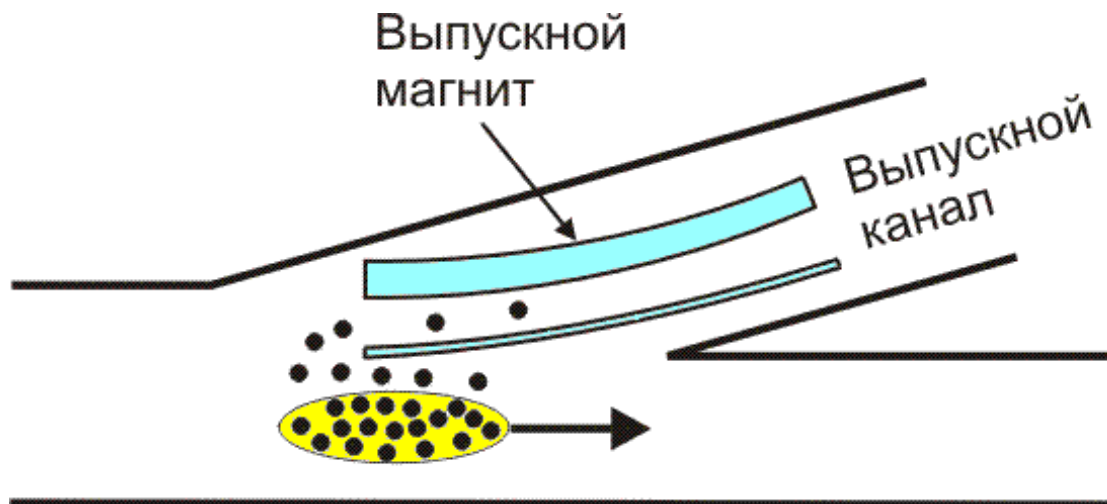


Рис.10.1 Схема вывода пучка из накопителя.

При выпуске пучок возмущается, так, чтобы на азимуте септума амплитуда движения частиц увеличилась, и они оказались бы в канале транспортировки. Быстрый рост амплитуды колебаний частицы можно обеспечить, поместив ее в неустойчивую область резонанса (в качестве примера мы рассмотрим резонанс $3\nu = n$), как это показано на рис.10.2.

Когда необходимо произвести выпуск частиц, частота бетатронных колебаний ν подводится к резонансному значению. При этом область устойчивости уменьшается, и часть пучка («хвост» функции распределения) оказывается за ее пределами. Отклонение таких частиц быстро растет, они оказываются в области поля септума и выводятся из ускорителя. Причем, поскольку орбита, соответствующая неустойчивой точке резонанса $3\nu = n$, замыкается на каждом третьем

обороте, выпускаемая частица продвигается к септуму дискретно, как это видно из рис.10.2.

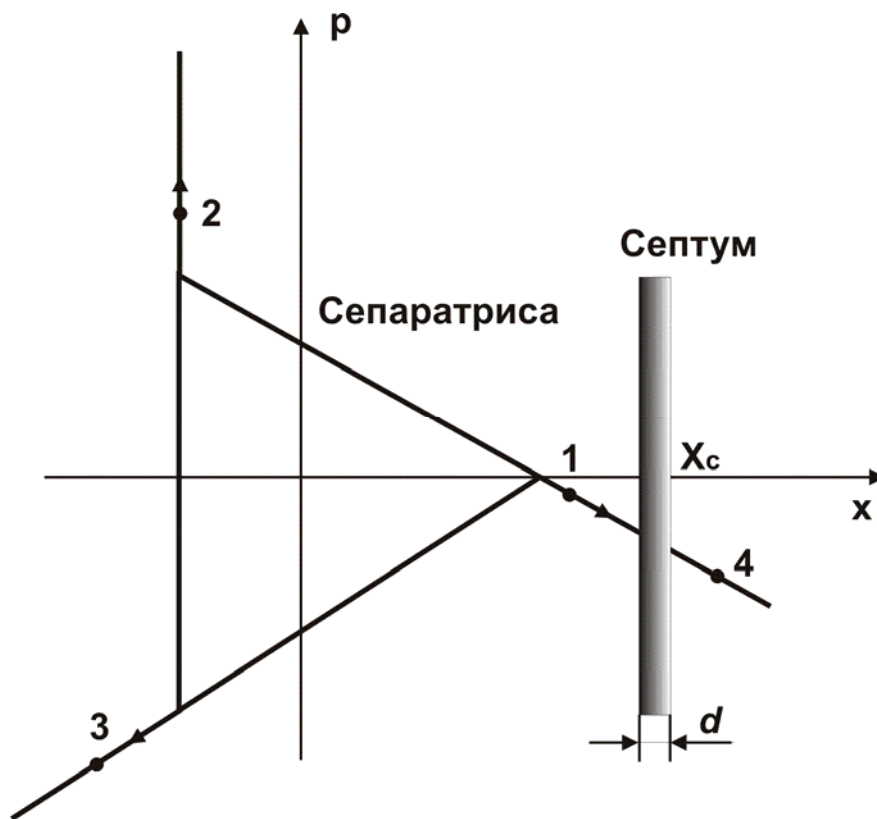


Рис.10.2 Схема выпуска частиц на фазовой плоскости резонанса $3\nu = n$.

Цифры показывают положение частицы на последующем обороте. Через 3 оборота частица оказывается в поле септума.

Однако, распределение частиц непрерывно, а септум всегда имеет конечную толщину d , поэтому часть частиц попадает в септум и гибнет, тем самым уменьшая эффективность выпуска. Оценим эффективность медленного выпуска частиц на резонансе $3\nu = n$.

По определению, если $F(x)$ – функция плотности распределения частиц, то доля числа частиц, потерянных на септуме относительно всех выпускаемых частиц составляет

$$f = \left(\int_{x_c}^{x_c+d} F(x) dx \right) / \left(\int_{x_c}^{\infty} F(x) dx \right), \quad (10.1)$$

где x_c – координата положения септума, а d – его толщина (рис.10.1). С другой стороны, если на N -том обороте выпускаемая частица достигает на азимуте септума координаты x_c , а на следующем, $N+1$ -ом обороте, оказывается внутри септума с координатой $x_c + \Delta$, то на этом распределение плотности частиц внутри вакуумной камеры ускорителя обрывается, и пределы интегрирования в (10.1) могут быть изменены следующим образом:

$$f = \left(\int_{x_c}^{x_c+d} F(x) dx \right) / \left(\int_{x_c}^{x_c+\Delta} F(x) dx \right). \quad (10.2)$$

Теперь рассмотрим подробнее распределение плотности пучка частиц $F(x)$ за пределами сепаратрисы резонанса (рис.10.3).

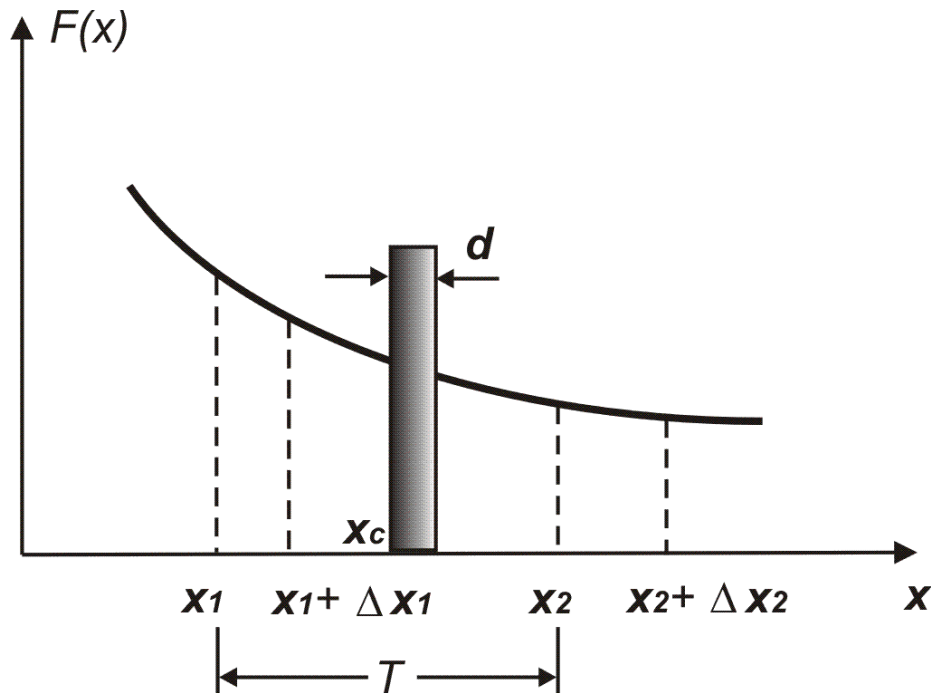


Рис.10.3 Распределение плотности выпускаемых частиц.

В начальный момент времени число частиц в интервале амплитуд от x_1 до $x_1 + \Delta x_1$ равно $F(x_1)\Delta x_1$. Спустя время T мы увидим эти частицы в интервале амплитуд от x_2 до $x_2 + \Delta x_2$ и, следовательно,

$$F(x_1)\Delta x_1 = F(x_2)\Delta x_2. \quad (10.3)$$

С другой стороны, рассматривая интервал времени T

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(dx/dt)} = \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} \frac{dx}{(dx/dt)}, \quad (10.4)$$

можно записать

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} \frac{dx}{(dx/dt)} = \int_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} \frac{dx}{(dx/dt)}, \quad (10.5)$$

или

$$\frac{\Delta x_1}{(dx/dt)_1} = \frac{\Delta x_2}{(dx/dt)_2}. \quad (10.6)$$

Вводя вместо времени t номер оборота N (т.к. мы рассматриваем поведение частиц пооборотно на одном и том же азимуте септума) из (10.6) следует, что $\Delta x \sim (dx/dN)$. Но тогда из равенства (10.3) можно сразу записать, что $F(x) \sim (dx/dN)^{-1}$ и представить (10.2) в виде

$$f = \left(\int_{x_c}^{x_c+d} \frac{dx}{(dx/dN)} \right) / \left(\int_{x_c}^{x_c+\Delta} \frac{dx}{(dx/dN)} \right). \quad (10.7)$$

Поскольку толщина септума много меньше его координаты $d \ll x_c$, то для числителя (10.7) можно сделать оценку $[d/(dx/dN)]_{x_c}$. Знаменатель же (10.7) – это просто время (выраженное в числе оборотов), за которое частица из положения x_c перейдет в положение $x_c + \Delta$. Для резонанса $3\nu = n$ этот период равен 3. Поэтому доля числа частиц, попавших в септум, принимает простой вид

$$f = \frac{1}{3} \frac{d}{(dx/dN)_{x_c}}, \quad (10.8)$$

и все, что нам нужно, чтобы оценить ее – это найти скорость движения частицы dx/dN с поперечной координатой, равной координате септума x_c .

Для этого перепишем гамильтониан (10.2.4), описывающий движение вблизи резонанса $3\nu = n$

$$H = \delta \cdot I + I^{3/2} A_n \cos 3\phi, \quad (10.9)$$

где $\delta = \nu - n/3$ – резонансная отстройка бетатронной частоты, а A_n характеризует силу возмущения.

Т.к. нас интересует отклонение частицы от равновесной орбиты по горизонтали, перейдем от переменных (I, ϕ) к переменным (p, x) согласно

$$x = \sqrt{2I} \cdot \cos \phi \quad \text{и} \quad p_x = -\sqrt{2I} \cdot \sin \phi. \quad (10.10)$$

Это преобразование отличается от введенного ранее (например (7.3.1)) отсутствием масштабного множителя β .

С учетом (10.10) гамильтониан (10.9) запишется в виде

$$H = \frac{1}{2} \delta \cdot (x^2 + p_x^2) + A_n \cdot (x^3 - 3xp_x^2), \quad (10.11)$$

а уравнения Гамильтона примут вид

$$\frac{dp_x}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\delta \cdot x - 3A_n \cdot (x^2 - p_x^2), \quad (10.12a)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \delta \cdot p_x - 6A_n \cdot xp_x. \quad (10.12б)$$

Теперь исследуем поведение системы вблизи неустойчивой особой точки, чьи координаты были найдены в Главе 10.2 (10.2.7):

$$\phi_u = 0 \quad \text{и} \quad I_u^{1/2} = \frac{2\delta}{3A_n}. \quad (10.13)$$

Вспомнив, что мы ввели в разделе 9.2 обозначение $A_n = 2^{2/3} A_{3n}$, где A_{3n} – азимутальная гармоника потенциала возмущения, и перейдя к переменным (10.10), получим координаты интересующей нас точки:

$$x_u = \frac{\delta}{3A_{3n}} \quad \text{и} \quad p_u = 0. \quad (10.14)$$

Рассмотрим движение частицы вблизи (x_u, p_u) , введя малое отклонение $\Delta x_u, \Delta p_u$ так, что

$$x = x_u + \Delta x_u, \quad p_x = p_u + \Delta p_u = 0 + \Delta p_u. \quad (10.15)$$

Подставив (10.15) в (10.12) и оставив только линейные члены по Δx_u и Δp_u получим

$$\frac{d}{d\theta} \Delta p_u \approx -\delta(x_u + \Delta x_u) - 3A_{3n}(x_u^2 + 2x_u \Delta x_u), \quad (10.16a)$$

$$\frac{d}{d\theta} \Delta x_u \approx \Delta p_u (\delta - 6A_{3n}x_u). \quad (10.16б)$$

Комбинируя два дифференциальных уравнения первого порядка (10.16) в одно уравнение второго порядка относительно Δx_u , подставляя в него (10.14) и оставляя слагаемые младшей степени по δ (а именно, $\sim \delta^2$), приходим к окончательному выражению, описывающему движение частицы в окрестности неустойчивой особой резонанса $3\nu = n$:

$$\frac{d^2(\Delta x_u)}{d\theta^2} - 3\delta^2 \Delta x_u = 0. \quad (10.17)$$

До сих пор мы интересовались положением особых точек (условия (8.3.4)). Об устойчивости этих точек мы судили, исходя из топологических соображений (поведения фазовых траекторий) или исследуя экстремумы кривых $H_{\pm}$. Однако более строго вывод об устойчивости неподвижной точки делается исходя из линеаризованного уравнения движения частицы в окрестности этой точки. Видно, что решение уравнения (10.17) характеризует расходящиеся траектории и тем самым показывает, что точка с координатами (10.14) действительно неустойчивая. А, например, для центральной (эллиптической) точки резонанса $3\nu = n$ с координатами $x_s = p_s = 0$ соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d^2(\Delta x_s)}{d\theta^2} + \delta^2 \Delta x_s = 0$$

с решением устойчивого (колебательного) типа.

Решение уравнения (10.17) позволяет оценить величину $(dx / dN)_{x_c}$, которая определяет эффективность выпуска частиц (10.8).

Задавая для начального момента времени $x(0) = x_0$ и $p_x(0) = 0$, получим решение (10.17) в виде

$$\Delta x(\theta) = x_0 \cosh(\sqrt{3} \cdot \delta \cdot \theta) \quad \text{и} \quad dx/d\theta = x_0 \cdot \delta \sqrt{3} \cdot \sinh(\sqrt{3} \cdot \delta \cdot \theta). \quad (10.18)$$

Поскольку нас интересует изменение координаты частицы на последовательных оборотах, изменение азимутального угла можно представить в виде $\theta = 2\pi N$. Константу x_0 в (10.18) можно найти, зная координату септума x_c , которая будет достигнута частицей на обороте N_c после прохождения неустойчивой особой точки

$$x_c = x_0 \cosh(\sqrt{3} \delta \cdot 2\pi N_c). \quad (10.19)$$

Подставив x_0 , выраженное через x_c , во второе уравнение (10.18) и учтя, что для $x_c \gg x_0$ $\tanh(\sqrt{3} \delta \cdot 2\pi N_c) \approx 1$, получим

$$(dx/dN)_{x_c} \approx 2\pi \cdot x_c \cdot \delta \sqrt{3} \quad (10.20)$$

и, подставляя полученную оценку в (10.8), окончательно найдем относительное число частиц, попавших в септум, при выпуске на нелинейном резонансе $3\nu = n$

$$f \approx \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} \frac{d}{\delta \cdot x_c}. \quad (10.21)$$

Взяв для оценки следующие величины: толщина электростатического септума $d = 0.1$ мм, резонансная отстройка $\delta = 0.005$ и координата септума $x_c = 20$ мм, получим, что $f = 3\%$, или, что 97% частиц будет успешно выпущено за пределы вакуумной камеры ускорителя.

Глава 11. Двумерные резонансы бетатронных колебаний

11.1 Общие свойства резонансов связи

Условие резонанса двумерных бетатронных колебаний имеет вид

$$m_x \nu_x \pm m_z \nu_z = n, \quad (11.1.1)$$

где m_x , m_z и n – целые числа, а гамильтониан, соответствующий такому резонансу, можно записать как

$$H = \nu_x J_x + \nu_z J_z + A_{m_x m_z n}(J_x, J_z) \cos(m_x \varphi_x \pm m_z \varphi_z - n\theta). \quad (11.1.2)$$

В зависимости от того, сумма или разность фаз является аргументом косинуса, резонанс называется «суммовым» или «разностным». Свойства таких резонансов, как мы увидим ниже, различны.

Произведем преобразование переменных $(J, \varphi) \rightarrow (I, \phi)$ при помощи производящей функции вида

$$F(\varphi_x, I_1, \varphi_z, I_2, \theta) = (m_x \varphi_x \pm m_z \varphi_z - n\theta) I_1 + \varphi_z I_2. \quad (11.1.3)$$

При этом новые и старые переменные оказываются связанными с помощью следующих соотношений:

$$\phi_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = m_x \varphi_x \pm m_z \varphi_z - n\theta; \quad \phi_2 = \frac{\partial F}{\partial I_2} = \varphi_z, \quad (11.1.4)$$

$$J_x = \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} = m_x I_1, \quad J_z = \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} = \pm m_z I_1 + I_2, \quad (11.1.5)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial \theta} = H - nI_1. \quad (11.1.6)$$

Видно, что новые переменные описывают колебания системы по некоторым, вообще говоря, неортогональным направлениям 1 и 2, связанным со старыми координатами x и z сложным образом. Эти моды колебаний и являются базовыми для дальнейшего изучения движения системы.

Согласно (11.1.4-6) новый гамильтониан записывается как

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \nu_x m_x I_1 + \nu_z (I_2 \pm m_z I_1) + A_n(I_1, I_2) \cos \phi_1 - nI_1 \\ &= (m_x \nu_x \pm m_z \nu_z - n) I_1 + \nu_z I_2 + A_n(I_1, I_2) \cos \phi_1. \end{aligned} \quad (11.1.7)$$

Гамильтониан не зависит от времени θ и является интегралом движения:

$\bar{H} = const$, а поскольку он не зависит и от циклической координаты ϕ_2 , канонически сопряженный ей импульс тоже является интегралом движения: $I_2 = const$, или в старых переменных (из (11.1.5))

$$J_z \mp \frac{m_z}{m_x} J_x = const. \quad (11.1.8)$$

Величина константы определяется начальными условиями.

Использование гамильтонового формализма позволяет сделать важные выводы касательно общих свойств резонансов связи, не прибегая к решению уравнений движения.

Для разностных резонансов (11.1.8) принимает вид

$$J_z + \frac{m_z}{m_x} J_x = const, \quad (11.1.9)$$

и легко видеть, что для ограниченных начальных условий движение на разностном резонансе всегда ограничено (т.е. амплитуда колебаний по обеим координатам никогда не может достичь бесконечно больших величин). Разностные резонансы не приводят к неустойчивости, а только «перекачивают» энергию из одной степени свободы в другую. При этом амплитуда колебаний испытывает биения с максимальными значениями

$$J_{z \max} = I_2, \quad J_{x \max} = \frac{m_x}{m_z} I_2. \quad (11.1.10)$$

Другое дело для суммовых резонансов, когда

$$J_z - \frac{m_z}{m_x} J_x = \text{const}. \quad (11.1.11)$$

Здесь нет ограничений для роста амплитуды колебаний (т.е. суммовые резонансы приводят к неустойчивому движению). При этом обе амплитуды растут одновременно, так, чтобы разность (11.1.11) оставалась постоянной.

Ниже в качестве примера рассмотрим резонансы связи, которые возникают из-за наличия перекрестного члена в секступольном возмущении (6.2.4):

$$H_1 = -\frac{1}{2} m(s) x z^2.$$

Переходя к переменным действие-угол с помощью (6.3.11), получим

$$H_1 = -\frac{1}{8} m(s) (2J_x \beta_x(s))^{1/2} (2J_z \beta_z(s)) [2 \cos \varphi_x + \cos(\varphi_x + 2\varphi_z) + \cos(\varphi_x - 2\varphi_z)]. \quad (11.1.12)$$

Интересно отметить, что перекрестный член секступольного возмущения создает не только суммовый и разностный резонансы (второе и третье слагаемое в

квадратных скобках), но и целый горизонтальный резонанс (первое слагаемое), который, как от параметра, зависит от амплитуды вертикальных колебаний.

11.2 Разностный резонанс $\nu_x - 2\nu_z = n$

Усреднив (11.1.12) вблизи $\nu_x - 2\nu_z = n$ и оставив только резонансную азимутальную гармонику A_{-n} , получим гамильтониан

$$H = \nu_x J_x + \nu_z J_z + A_{-n} (2J_z) (2J_x)^{1/2} \cos(\varphi_x - 2\varphi_z - n\theta). \quad (11.2.1)$$

Переход к резонансным переменным осуществляется при помощи

$$F(\varphi_x, I_1, \varphi_z, I_2, \theta) = (\varphi_x - 2\varphi_z - n\theta) I_1 + \varphi_z I_2, \quad (11.2.2)$$

и приводит к

$$J_x = I_1, \quad \phi_1 = \varphi_x - 2\varphi_z - n\theta, \quad (11.2.3)$$

$$J_z = I_2 - 2I_1, \quad \phi_2 = \varphi_z.$$

Интеграл движения (11.1.8) определяется начальными условиями и записывается как

$$I_2 = J_z + 2I_1 = J_z + 2J_x = \text{const}, \quad (11.2.4)$$

а новый (резонансный) гамильтониан принимает вид

$$\bar{H} = \nu_z I_2 + \delta \cdot I_1 + 2A_{-n} \cdot (I_2 - 2I_1) (2I_1)^{1/2} \cos \phi_1, \quad (11.2.5)$$

где $\delta = \nu_x - 2\nu_z - n$ – играет роль резонансной отстройки, а $\nu_z I_2$ – константа, не влияющая на уравнения движения. Таким образом, движение свелось к одномер-

ному, в координатах (ϕ_1, I_1) , и с параметрами, определяемыми начальными условиями системы в исходных переменных.

Исследование удобно продолжать в декартовых координатах (q, p) (не (x, p_x) !):

$$q = (2I_1)^{1/2} \cos \phi_1 \quad \text{и} \quad p = -(2I_1)^{1/2} \sin \phi_1, \quad (11.2.6)$$

где по сравнению с предыдущими обозначениями угловая координата смещена на $\pi/2$ для более привычной ориентации фазовых траекторий (см. рис.11.2.1).

В новых координатах гамильтониан (11.2.5) перепишется в виде (константа $\nu_z I_2$ отброшена)

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \delta \cdot (q^2 + p^2) + 2A_{-n} (I_2 - q^2 - p^2) q. \quad (11.2.7)$$

Далее заметим, что поскольку $J_z > 0$, то из (11.2.4) следует, что физически допустимое движение в переменных (ϕ_1, I_1) возможно только внутри окружности с радиусом

$$I_1 = I_2 / 2, \quad (11.2.8)$$

а сепаратрисное значение гамильтониана определяется подстановкой (11.2.8) в (11.2.5):

$$H_s = I_2 \cdot \delta / 2. \quad (11.2.9)$$

Подставляя (11.2.9) в (11.2.7) последнее выражение можно представить в виде суперпозиции окружности с радиусом $R = \sqrt{I_2}$ и прямой, параллельной оси p и проходящей через точку $q_1 = \delta / (4A_{-n})$:

$$(p^2 + q^2 - I_2)(q - q_1) = 0. \quad (11.2.10)$$

Это есть не что иное, как уравнение сепаратрисы резонанса $\nu_x - 2\nu_z = n$ на фазовой плоскости.

Принципиально различаются два случая, показанные на рис.11.2.1: (а) прямая $q = q_1$ лежит за пределами ограничивающей окружности ($R = \sqrt{I_2} \leq q_1$) и (б) прямая пересекает окружность ($R = \sqrt{I_2} > q_1$). На окружности $J_z = 0$, а амплитуда горизонтальных колебаний максимальна, в то время как в центре окружности наоборот: $J_x = 0$, и максимальна вертикальная амплитуда.

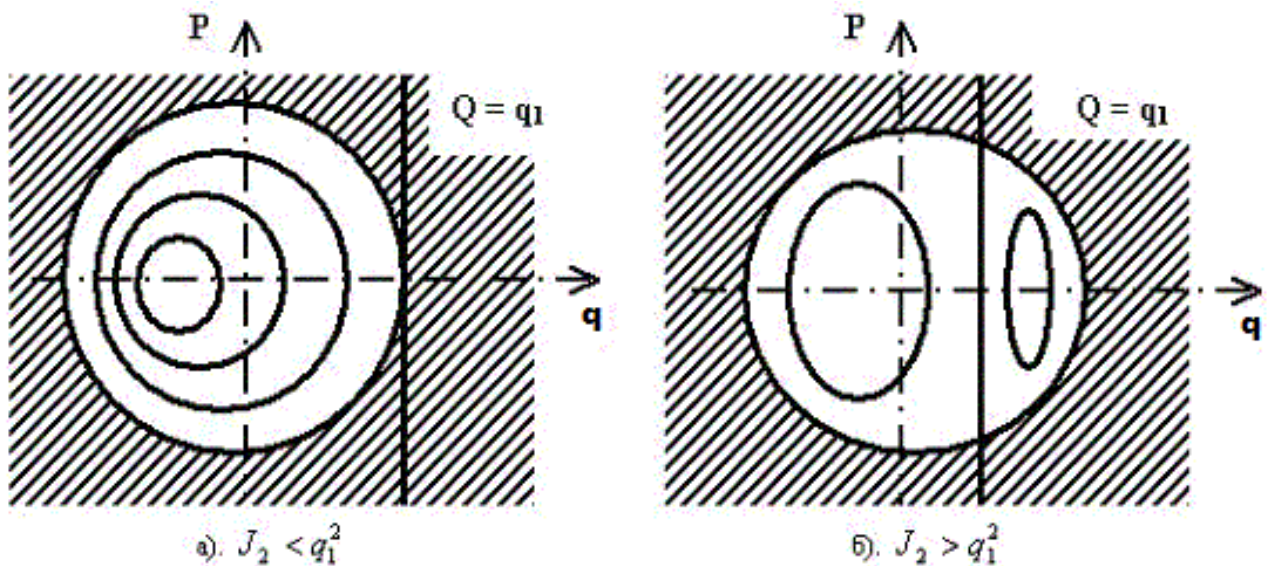


Рис.11.2.1 Фазовый портрет разностного резонанса: (а) $R = \sqrt{I_2} \leq q_1$, (б)

$R = \sqrt{I_2} > q_1$. Заштрихована область физически невозможного движения.

Пусть вначале вертикальная амплитуда мала, тогда радиус сепаратрисного круга определяется начальной амплитудой горизонтального движения $I_2 \approx 2J_{x0}$.

Если $\sqrt{2J_{x0}} < |q_1|$, то для малой начальной амплитуды J_{z0} горизонтальная фазовая траектория $I_1(\phi_1) = J_x(\phi_1) \approx J_{x0}$ в процессе движения близка к окружности. Но тогда и вертикальная амплитуда $J_z(\phi_1) = I_2 - 2J_x(\phi_1)$ остается малой во время всего периода.

Иное дело в случае $\sqrt{2J_{x0}} > |q_1|$. Если, при малой начальной амплитуде J_{z0} , горизонтальная фазовая точка движется по кривой AB (рис.11.2.2), то и $J_x(\phi_1)$, и, соответственно, $J_z(\phi_1)$, меняется слабо. Если же движение проходит вдоль прямой BA , то горизонтальная амплитуда резко уменьшается, а вертикальная – увеличивается; возникают биения колебаний. Чем ближе частота колебаний к резонансному значению $\delta \rightarrow 0$, тем ближе прямая $q = q_1$ к диаметру сепаратрисной окружности. Соответственно, тем больше уменьшается $J_x(\phi_1)$ и растет $J_z(\phi_1)$ при движении изображающей точки вдоль $q = q_1$, следовательно, тем сильнее биения колебаний.

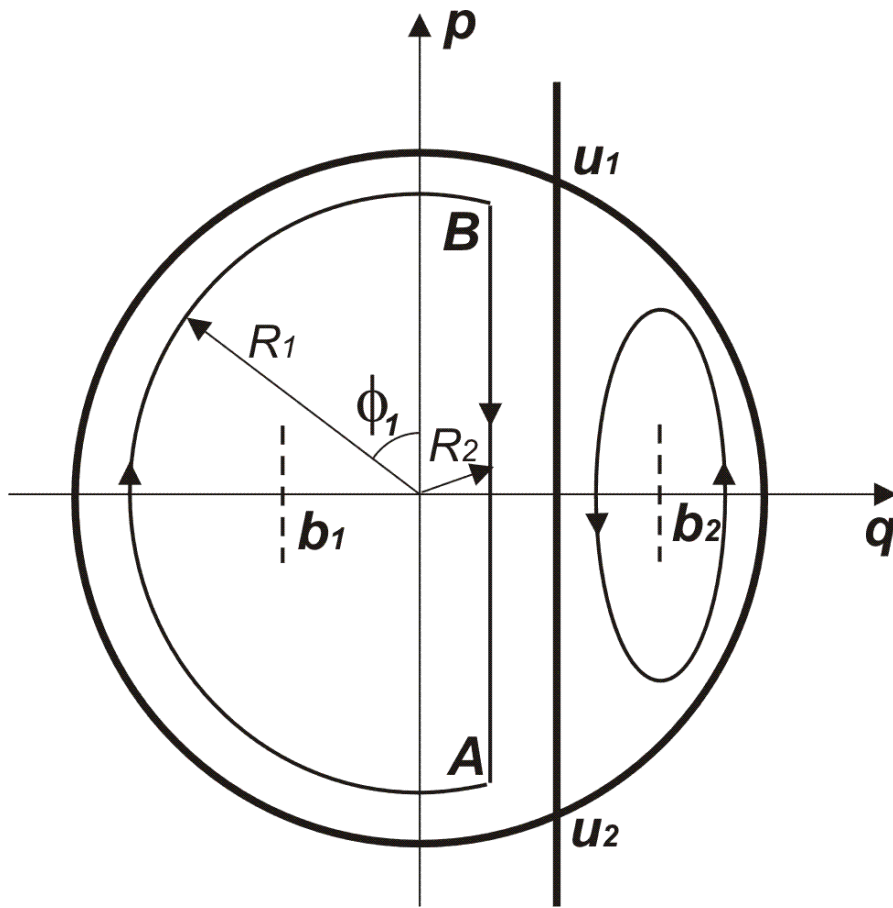


Рис.11.2.2 К фазовому движению вблизи разностного резонанса (схематично):

$u_{1,2}$ – неустойчивые точки, $b_{1,2}$ – устойчивые точки. $R_1 \approx \sqrt{2J_{x1}}$ соответствует

большой горизонтальной амплитуде, а $R_2 \approx \sqrt{2J_{x2}}$ – малой (биения).

Фазовые кривые, полученные с помощью компьютерного моделирования в окрестности разностного резонанса, показаны на рис.11.2.3.

Амплитуда горизонтальных и вертикальных колебаний вблизи разностного резонанса, полученная на некотором фиксированном азимуте, приведена на рис.11.2.4. Отчетливо видны биения амплитуд, происходящие в противофазе.

Широкие промежутки между «всплесками» вертикальной амплитуды объясняются следующим образом. Чем меньше начальная вертикальная амплитуда

J_{z0} , тем ближе фазовая кривая подходит к неустойчивым точкам $u_{1,2}$, показанным на рис.11.2.2, и тем дольше она остается в окрестности этих точек. Вертикальная амплитуда при этом остается малой. Затем траектория покидает окрестность неустойчивой точки и движется вдоль прямой $q = q_1$. Амплитуда вертикального движения начинает расти (а горизонтального – уменьшаться), достигая максимума при пересечении оси q .

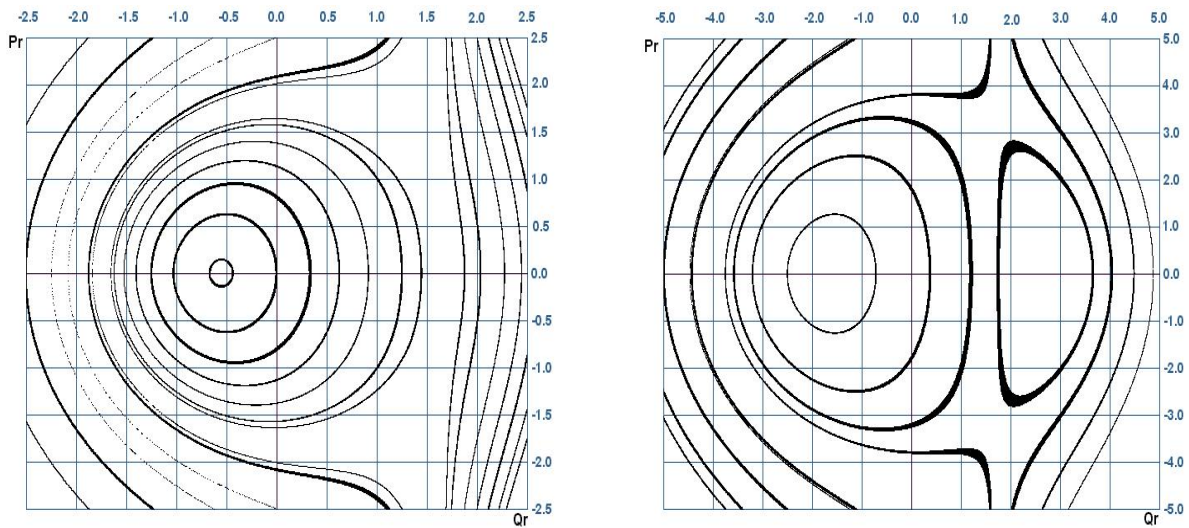


Рис.11.2.3 Фазовые кривые разностного резонанса.

$$I_2 < q_1^2 \text{ – слева, } I_2 > q_1^2 \text{ – справа.}$$

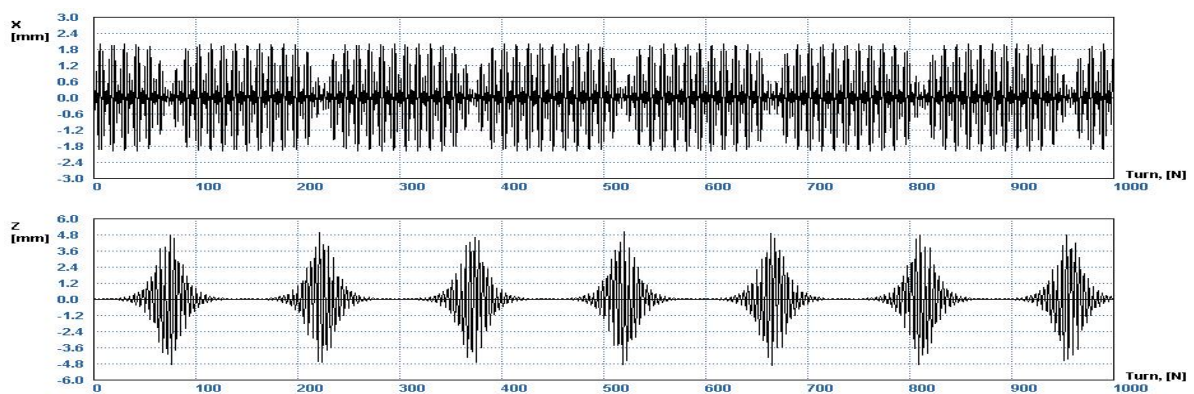


Рис.11.2.4 Биение амплитуды колебаний из-за разностного резонанса.

Положение особых точек может быть найдено исходя из обычного условия

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0.$$

Для случая $I_2 < q_1^2$ это – единственная устойчивая точка с координатами

$$p_{sa} = 0 \quad \text{и} \quad q_{sa} = \frac{1}{3} \left(\sqrt{3I_2 + q_1^2} - q_1 \right), \quad (11.2.11)$$

ее положение хорошо видно на левом рис.11.2.3.

Для случая $I_2 > q_1^2$ имеется две устойчивые точки внутри отсекаемых секторов

$$p_{sb_{1,2}} = 0 \quad \text{и} \quad q_{sb_{1,2}} = \frac{1}{3} \left(q_1 \pm \sqrt{3I_2 + q_1^2} \right), \quad (11.2.12)$$

и две неустойчивые точки там, где прямая пересекает окружность

$$p_{u_{1,2}} = \pm \sqrt{I_2 - q_1^2} \quad \text{и} \quad q_{u_{1,2}} = q_1. \quad (11.2.13)$$

Оценим частоту биений амплитуды бетатронных колебаний точно на резонансе ($\delta = 0$). Это легко сделать, линеаризовав гамильтониан (11.2.7) в окрестности устойчивой точки (11.2.12): $q = q_{sb} + \Delta q$ и $p = p_{sb} + \Delta p$. При этом получается следующее уравнение

$$\Delta \ddot{q} + 4q_{sb}^2 \Delta q = 0. \quad (11.2.14)$$

Подставив в (11.2.14) значение координаты устойчивой точки (11.2.12) при $\delta = 0$, и, следовательно, при $q_1 = 0$, получим

$$\omega_{sb} = 2I_2 / \sqrt{3}. \quad (11.2.15)$$

Интересно, что частота малых биений амплитуды точно на резонансе не зависит от величины гармоник возмущения, а зависит только от начальных условий.

12.3 Суммовый резонанс $\nu_x + 2\nu_z = n$

Для перехода в резонансную вращающуюся систему координат используем производящую функцию (11.1.3) с небольшой модификацией, а именно, поменяем знак перед последним слагаемым:

$$F(\varphi_x, I_1, \varphi_z, I_2, \theta) = (\varphi_x + 2\varphi_z - n\theta)I_1 - \varphi_z I_2. \quad (11.3.1)$$

Это даст положительный знак интеграла движения I_2 при $2J_x > J_z$, но свойств изучаемой системы, естественно, не изменит.

Резонансный гамильтониан имеет вид

$$H = -\nu_z I_2 + \delta \cdot I_1 + 2A_{+n} \cdot (2I_1 - I_2)(2I_1)^{1/2} \cos \phi_1, \quad (11.3.2)$$

где A_{+n} – соответствующая азимутальная гармоника; (11.3.2) с точностью до знаков перед константами совпадает с гамильтонианом разностного резонанса (11.2.5), и это позволяет воспользоваться результатами предыдущего раздела.

В декартовых координатах (11.3.2) примет вид (константа $-\nu_z I_2$ отброшена)

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \delta \cdot (q^2 + p^2) + 2A_{+n} (q^2 + p^2 - I_2) q. \quad (11.3.3)$$

Но теперь интеграл движения

$$I_2 = 2I_1 - J_z = 2J_x - J_z = \text{const} \quad (11.3.4)$$

не препятствует бесконечному росту амплитуды колебаний вблизи резонанса, а лишь требует, чтобы обе амплитуды росли одновременно.

В рассматриваемом случае I_2 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, и оба варианта должны быть исследованы.

Для $I_2 > 0$, что имеет место при $2J_x > J_z$, сепаратрису резонанса можно факторизовать суперпозицией окружности радиуса $R = \sqrt{I_2}$ и прямой с уравнением $q = q_1 = -\delta/(4A_{+n})$:

$$(p^2 + q^2 - I_2)(q - q_1) = 0. \quad (11.3.5)$$

Однако условие $J_z > 0$ задает физически возможную область не внутри, а снаружи сепаратрисной окружности.

Особые точки весьма напоминают те, которые были получены для разностного резонанса: устойчивые (обозначения как на рис.11.2.2):

$$p_{sb_{1,2}} = 0 \quad \text{и} \quad q_{sb_{1,2}} = \frac{1}{3} \left(-q_1 \pm \sqrt{3I_2 + q_1^2} \right), \quad (11.3.6)$$

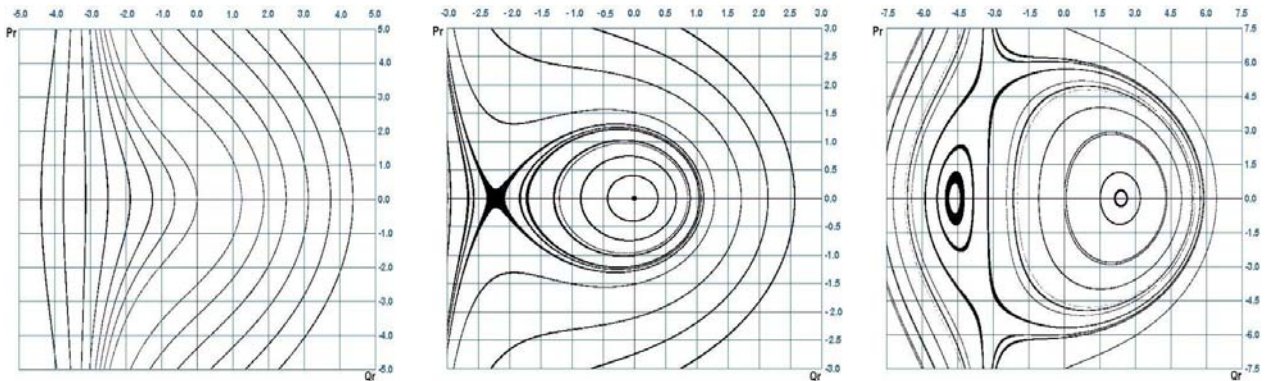
и неустойчивые (пересечение прямой и окружности):

$$p_{u_{1,2}} = \pm \sqrt{I_2 - q_1^2} \quad \text{и} \quad q_{u_{1,2}} = q_1. \quad (11.3.7)$$

Из условий, $1 + 3I_2 / q_1^2 > 0$ и $J_z = 2J_x - I_2 > 0$ следует, что (рис.11.3.1)

- при $I_2 < -q_1^2 / 3$ движение неустойчиво,
- при $-q_1^2 / 3 < I_2 < q_1^2$ движение возможно и является устойчивым,

- при $I_2 > q_1^2$ движение внутри сепаратрисной окружности физически невозможно, а снаружи – неустойчиво.



$$I_2 < -q_1^2 / 3$$

$$-q_1^2 / 3 < I_2 < q_1^2$$

$$I_2 > q_1^2$$

Рис.11.3.1 Фазовые траектории суммового резонанса.

Рис.11.3.2 показывает амплитуду колебаний на некотором азимуте как функцию номера оборота. Зависимость была получена в области устойчивого движения, поскольку неустойчивость развивается очень быстро и не может быть отражена на графике.

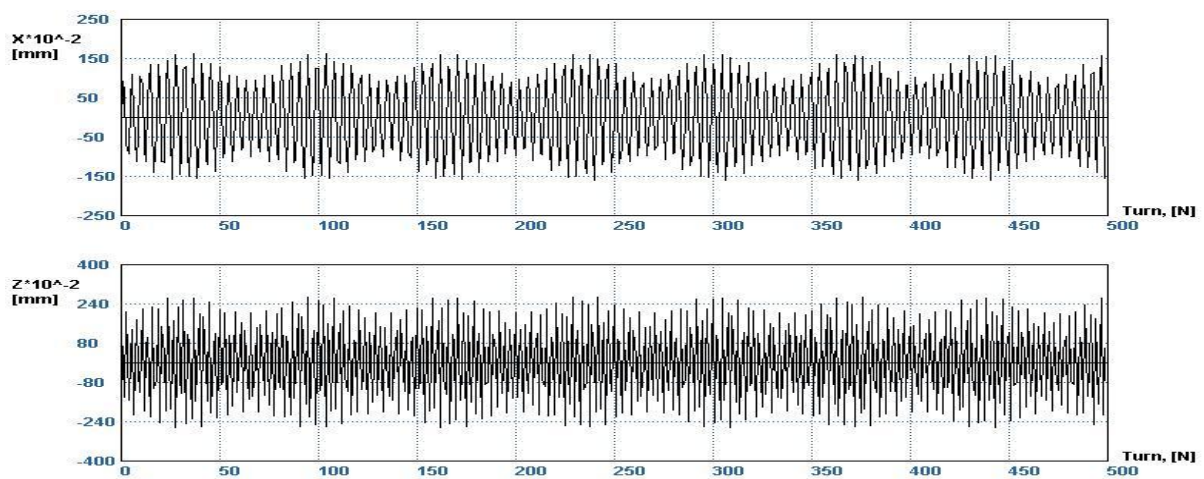


Рис.11.3.2. Зависимость амплитуды колебаний от номера оборота для суммового резонанса.

Однако и в этом случае видно, что горизонтальная и вертикальная амплитуды растут или уменьшаются одновременно.

Введение нелинейного сдвига частоты и в этом случае приводит к стабилизации резонанса. Прямая $q = q_1$ превращается в окружность и формирует еще одну область устойчивого движения.

Рекомендуемая литература

1. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
2. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
3. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004.

Глава 12. Зависящее от времени возмущение

12.1 Медленное и быстрое изменение параметров

До сих пор мы изучали возмущение динамической системы, не зависящее явным образом от времени. Между тем такая зависимость является весьма распространенной вообще, и для циклических ускорителей в частности.

Для ускорителей практически важным случаем является зависимость от времени частоты бетатронных колебаний. Это имеет место при подъеме энергии в синхротроне, когда в различных магнитных элементах поле меняется недостаточно синхронно, или из-за слабых пульсаций питающего магниты тока, или из-за синхротронных колебаний при неточно скомпенсированном хроматизме.

Рассмотрим гамильтониан, зависящий от параметра $\lambda(t)$

$$H = H(q, p, \lambda, t). \quad (12.1.1)$$

Интеграл действия для этого гамильтониана зависит от того же набора переменных:

$$J = J(q, p, \lambda, t). \quad (12.1.2)$$

Полная производная действия по времени имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\partial J}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial J}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \\ &= \frac{\partial J}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial J}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \end{aligned} \quad (12.1.3)$$

При постоянном параметре λ интеграл действия сохраняется, и, следовательно, первые три слагаемые в (12.1.3) исчезают, оставляя

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (12.1.4)$$

В общем, $\partial J / \partial \lambda = F(J, \lambda, \varphi)$ является функцией исходного действия, параметра и значения сопряженной угловой переменной. Однако если λ меняется со временем адиабатически, то J изменится на заметную величину за большое число колебаний системы и $\partial J / \partial \lambda$ может быть заменено средним значением $\langle F(J, \lambda, \varphi) \rangle_{\varphi}$.

Таким образом, конечное значение действия зависит только от его начального значения, но не от угловой переменной. Следовательно, все частицы, лежавшие на замкнутой фазовой кривой, будут, после адиабатического изменения параметра, также лежать на замкнутой фазовой траектории.

Кроме того, теорема Лиувилля утверждает, что, ввиду адиабатической инвариантности переменной действия, медленная деформация фазовых траекторий сохраняет охватываемую ими площадь фазового пространства.

Другим предельным случаем является скачкообразное изменение параметров системы за время, много меньшее периода движения по фазовой траектории. При этом фазовая диаграмма принимает вид, соответствующий новому значению параметра, а изображающая точка продолжает движение по той фазовой траектории, на которой она оказалась после скачка.

12.2 Адиабатическое изменение частоты бетатронных колебаний

При адиабатическом изменении бетатронной частоты может наблюдаться такое явление, как захват (затягивание) частиц в резонанс.

Пусть в момент времени T_1 имеется резонансный островок (рис.12.2.1), и снаружи, и внутри которого движутся частицы.

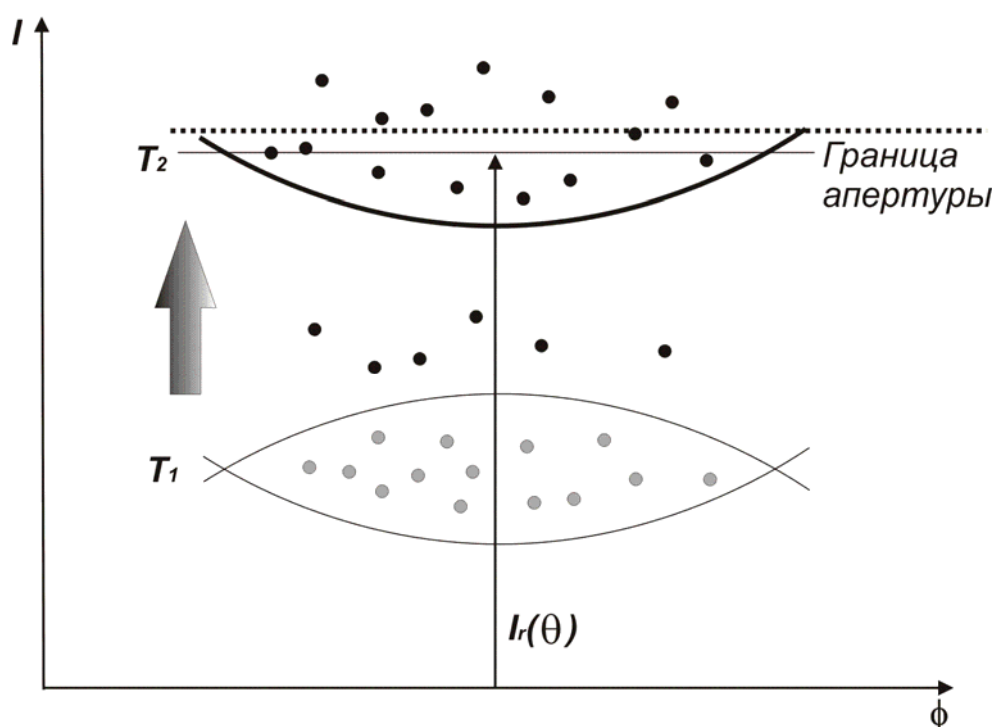


Рис.12.2.1 Медленное изменение бетатронной частоты. Островок резонанса выносит частицы за пределы апертуры.

Если частота бетатронных колебаний изменяется таким образом, что рабочая точка удаляется от резонанса, островок, согласно результатам Главы 8.2 (смотри, также, рис.8.4.1), перемещается в пространстве амплитуд колебаний наружу. В силу адиабатической теоремы частицы внутри островка продолжают дви-

гаться по изменившимся, но по-прежнему замкнутым, траекториям, продвигаясь, вместе с островком, в сторону больших амплитуд, пока не погибнут на границе апертуры (момент времени T_2 на рис.12.2.1).

Рассмотрим условия, необходимые для затягивания частиц в резонанс. Резонансный гамильтониан (9.1.6) запишем в виде

$$H = \delta(\theta) \cdot I + \alpha_0 \cdot I^2 + A_n \cdot I^{n/2} \cos m\varphi, \quad (12.2.1)$$

где резонансная отстройка δ является функцией времени θ .

Скорость изменения амплитуды частицы определяется уравнением Гамильтона

$$I' = \frac{dI}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = mA_n \cdot I^{n/2} \sin m\varphi, \quad (12.2.2)$$

и является максимальной при $\sin m\varphi = 1$:

$$I'_{\max} = mA_n I^{n/2}. \quad (12.2.3)$$

Для установления условия адиабатичности получившееся выражение нужно сравнить со скоростью движения островка из-за изменения частоты бетатронных колебаний. Для этого вспомним, что резонансное значение действия имеет вид (8.3.3)

$$I_r(\theta) = \frac{\delta(\theta)}{2\alpha_0}, \quad (12.2.4)$$

а скорость его изменения равна

$$\frac{dI_r}{d\theta} = \frac{1}{2\alpha_0} \frac{d\delta}{d\theta}. \quad (12.2.5)$$

Чтобы изменение параметра можно было назвать адиабатическим, оно должно быть медленным по сравнению со скоростью изменения амплитуды:

$$I'_r < I'_{\max} , \quad (12.2.6)$$

или

$$mA_n I^{n/2} > \frac{\nu'}{2\alpha_0} . \quad (12.2.7)$$

Учитывая соотношение между амплитудой частицы и действием: $A^2 \sim I$ (для простоты $\beta = 1$) можно сказать, что адиабатическим изменение частоты бетатронных колебаний будет для частиц с амплитудами выше порога, определяемого

$$A_a > \left(\frac{\nu'}{2m\alpha_0 A_n} \right)^{1/n} . \quad (12.2.8)$$

Другими словами, частицы с амплитудами, удовлетворяющими (12.2.8) будут захватываться резонансом, и уводиться из пучка наружу.

При пересечении резонанса в обратном направлении частицы будут приводиться движущимся островком от периферии пучка к его центру. Однако, использовать этот механизм для охлаждения пучков нельзя, так как плотность фазового объема систем без диссипации энергии постоянна, и частицы будут перераспределяться, сохраняя размер пучка.

Эффективность захвата частиц в резонанс D определяется как отношение числа захваченных частиц (т.е., частиц, удовлетворяющих условию (12.2.8)) к полному числу частиц в пучке. Как известно, для нормального закона распре-

ления плотности частиц, их амплитуды бетатронных колебаний подчиняется распределению Рэлея

$$p(a)da = 2a \cdot e^{-a^2} da, \quad (12.2.9)$$

где $a = A / \sigma\sqrt{2}$, а σ – среднеквадратичный размер пучка.

Тогда с учетом (12.2.8) коэффициент захвата запишется как

$$D = \int_{A_a / \sigma\sqrt{2}}^{\infty} p(a)da \bigg/ \int_0^{\infty} p(a)da. \quad (12.2.10)$$

Подставляя сюда (12.2.9) и учитывая, что знаменатель равен единице в силу нормировки, получим оценку эффективности затягивания частиц в резонанс при медленном изменении частоты бетатронных колебаний:

$$D \sim \exp\left[-\frac{A_a}{\sigma\sqrt{2}}\right]. \quad (12.2.11)$$

Эта оценка приближительна. Более точная оценка учитывает площадь островка в момент начала захвата частиц, что приводит к появлению в (12.2.11) коэффициента $\sim \sqrt{\delta(0)/\alpha_0}$.

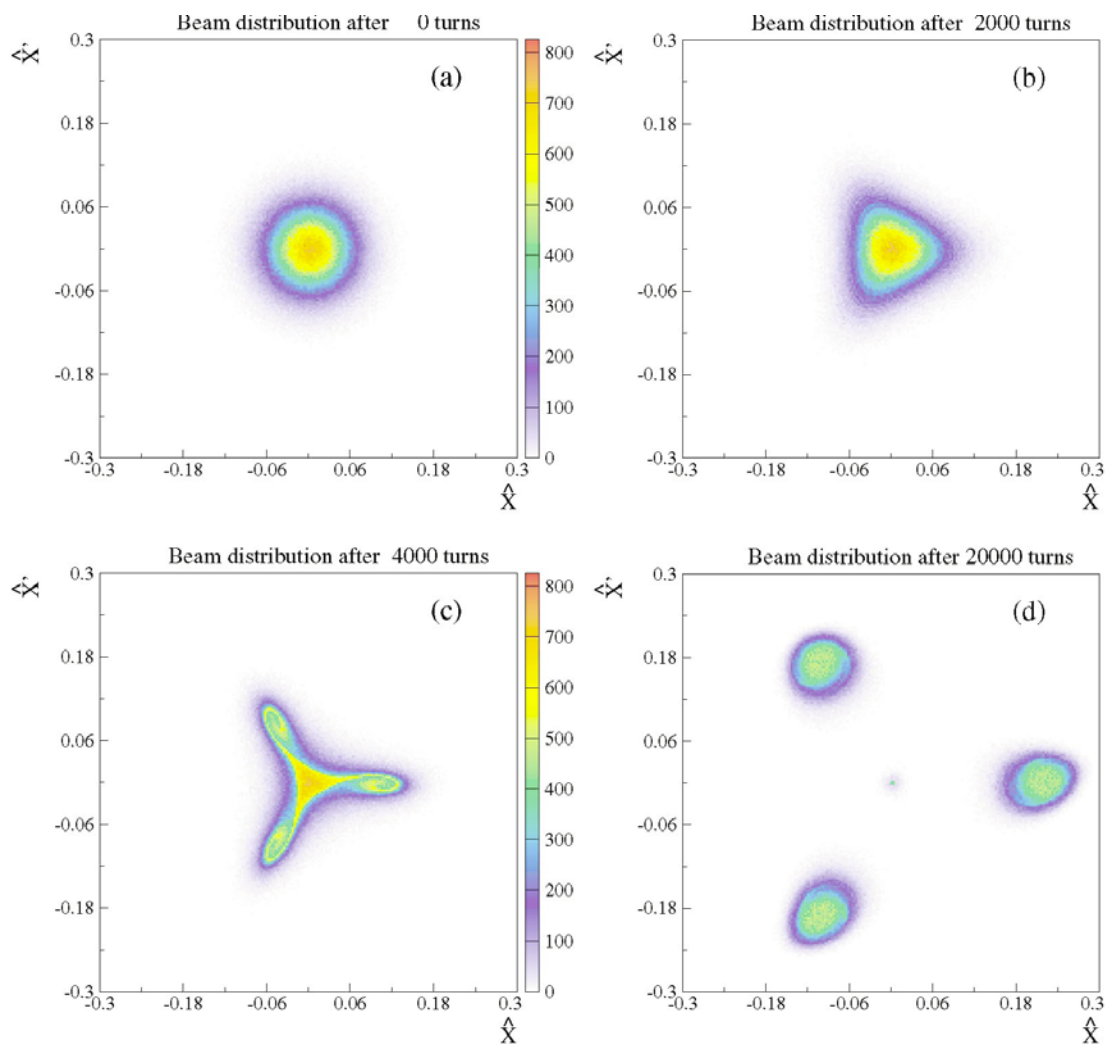


Рис.12.2.2 Вывод пучка из синхротрона с помощью адиабатического захвата частиц в сепаратрисы резонанса третьего порядка.

Примером использования теории, описанной выше, является адиабатический вывод пучка на резонансе [4]. Частицы захватываются в сепаратрисы резонанса (рис.12.2.2), а затем частота бетатронных колебаний медленно смещается в направлении от резонанса. При этом сепаратрисы вместе с захваченными частицами удаляются в поперечном направлении от равновесной орбиты, пока на некотором азимуте не попадают в поле магнита-септума.

12.3 Быстрое прохождение резонанса

Теперь рассмотрим другой предельный случай, когда частота бетатронных колебаний меняется очень быстро (скачкообразно) по сравнению с характерной скоростью движения частиц по фазовой траектории.

Вначале проинтегрируем уравнение (12.2.2):

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I^{n/2}} = mA_n \int_0^\theta \sin m\varphi(\theta) d\theta. \quad (12.3.1)$$

Разумно предположить, что при очень быстром изменении частоты изменение фазовой траектории ΔI мало: $I = I_0 + \Delta I$ и $\Delta I \ll I_0$. Тогда решение (12.3.1) можно записать в виде

$$\Delta I / I_0 \approx \exp \left(mA_n \int_0^\theta \sin m\varphi(\theta) d\theta \right) - 1 \quad \text{при} \quad n = 2, \quad (12.3.2)$$

$$\Delta I / I_0 \approx I_0^{n/2-1} \left(mA_n \int_0^\theta \sin m\varphi(\theta) d\theta \right) \quad \text{при} \quad n > 2. \quad (12.3.3)$$

Интеграл в скобках может быть взят численно, однако оценить его можно, пользуясь следующими простыми соображениями.

Фазовая переменная осциллирует везде, кроме окрестности неустойчивых особых точек $\varphi = \varphi_u$, где $d\varphi / d\theta = 0$. Следовательно, именно эти области внесут основной вклад в интеграл. Запишем изменение фазовой переменной в малой окрестности неустойчивой точки в виде ряда Тейлора

$$\varphi(\theta) \approx \varphi_u + \frac{1}{2} \varphi''|_{\varphi_u} (\theta - \theta_u)^2. \quad (12.3.4)$$

Уравнение Гамильтона для угловой переменной имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \delta(\theta) + 2\alpha_0 I + \frac{n}{2} A_n I^{n/2-1} \cos m\varphi, \quad (12.3.5)$$

и, в предположении быстрого изменения бетатронной частоты, можно записать

$$\varphi''|_{\varphi_u} \approx \delta'. \quad (12.3.6)$$

Тогда искомый интеграл примет вид

$$\int_0^\theta \sin m\varphi(\theta) d\theta \approx \int_0^\theta \sin m\left(\varphi_u + \frac{1}{2}\delta'(\theta - \theta_u)^2\right) d\theta \approx \sqrt{\frac{2\pi}{m|\delta'|}} \sin m\left(\varphi_u \pm \frac{\pi}{4}\right). \quad (12.3.7)$$

Последняя оценка делается с учетом свойств интеграла Френеля, а знак берется в зависимости от знака δ' . Принимая в (12.3.7) синус равным единице из (12.3.2) и (12.3.3) окончательно получим:

$$\Delta I / I_0 \approx \exp\left(A_n \sqrt{\frac{2\pi m}{|\delta'|}}\right) - 1 \sim A_n \sqrt{\frac{2\pi m}{|\delta'|}} \quad \text{при } n = 2, \quad (12.3.8)$$

$$\Delta I / I_0 \approx A_n I_0^{n/2-1} \sqrt{\frac{2\pi m}{|\delta'|}} \quad \text{при } n > 2. \quad (12.3.9)$$

Несмотря на сделанные при выводе упрощения, полученные выражения правильно отражают тот факт, что при быстром изменении частоты колебаний их амплитуда меняется тем меньше, чем быстрее совершается переход через резонанс. Физически это объясняется тем, что возмущение может изменить энергию колебаний на конечную величину за конечное время, в течение которого система находится в резонансе.

Заметим, что, поскольку амплитуда увеличивается при пересечении резонанса в любую сторону, периодический процесс (например синхротронные

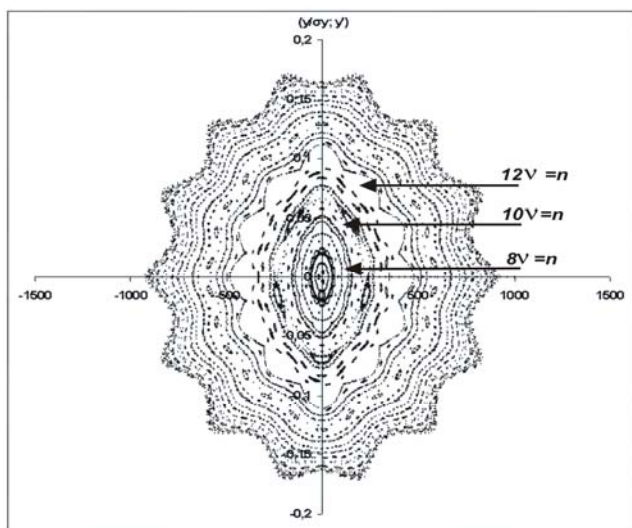
колебания при ненулевом хроматизме) может существенно увеличить размер пучка из-за многократного пересечения резонанса.

Рекомендуемая литература

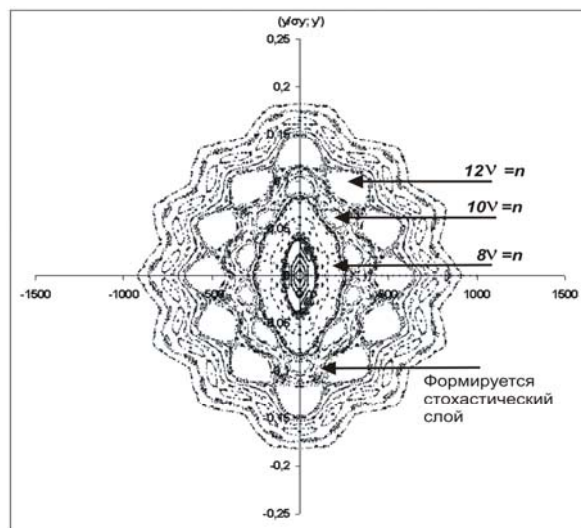
1. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
2. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969 г.
3. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, Теория циклических ускорителей.- Физматгиз, М., 1962.
4. [R. Capi](#) and [M. Giovannozzi](#). Multiturn extraction and injection by means of adiabatic capture in stable islands of phase space, <http://link.aps.org/abstract/PRSTAB/v8/e124401>.

Глава 13. Переход к стохастическому движению

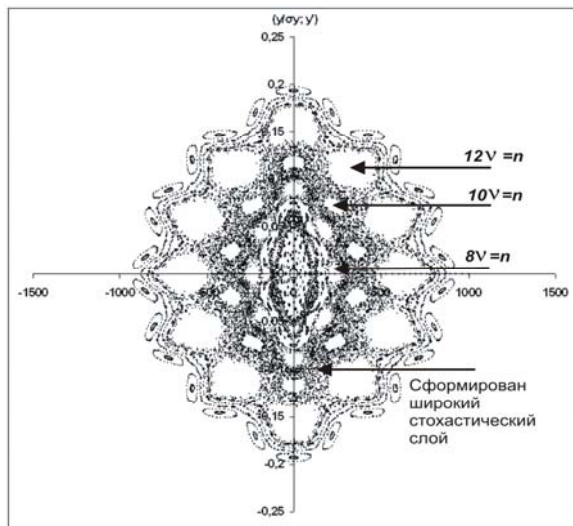
Численное исследование нелинейных систем при различных величинах возмущения и начальных условиях показывает, что по типу траекторий фазовое пространство может быть разделено на две области.



(а)



(б)



(в)

Рис.13.1 Фазовые траектории с учетом встречи пучков в накопителе при возрастающей силе возмущения (одномерное движение).

В качестве примера рассмотрим одномерные эффекты встречи двух пучков в накопителе. На рис.13.1 показаны соответствующие фазовые траектории при возрастающей силе возмущения. Для небольшой силы (рис.13.1 а) видны регулярные траектории (резонансные и нерезонансные), которые имеют вид замкнутых гладких кривых. Для большого возмущения (рис.13.1.в) инвариантные регулярные кривые практически отсутствуют, а резонансы погружены в широкий стохастический слой, траектории в котором имеют вид точек, заполняющих фазовую плоскость совершенно хаотически. В промежуточном случае (рис.13.1 б) регулярные кривые еще просматриваются, видно возросшее количество нелинейных резонансов и стохастический слой, формирующийся на стыке резонансов $10\nu = n$ и $12\nu = n$.

Подробное исследование хаотических траекторий показывает, что они действительно проявляют все свойства характерные для случайных систем, в частности, спектр такого движения оказывается сплошным. В этом случае, хотя и нельзя теоретически «проследить» эволюцию отдельной траектории, возможно относительно простое описание некоторых средних характеристик движения в терминах статистической механики (как, например, для молекул газа). При этом важно отметить, что оба типа траекторий (регулярных и случайных) соответствуют одной и той же системе, описываемой одними и теми же уравнениями, и реализуются в зависимости от начальных условий. Фазовые области, отвечающие различным типам движения, оказываются причудливо перемешанными на одной фазовой плоскости так, что среди устойчивых инвариантных кривых могут существовать

стохастические слои, а в области полностью случайного движения могут сохраняться устойчивые «островки» регулярного движения.

Одним из важных свойств стохастических траекторий является их локальная неустойчивость, т.е. близкие в начальный момент траектории быстро (экспоненциально) расходятся во времени. Последнее означает, что движение частиц в циклическом ускорителе, попавших в эту область фазового пространства может быть (но не всегда) неустойчивым, приводя к потере частиц, ограничению динамической апертуры и уменьшению времени жизни пучка.

Случайное движение было открыто при численном исследовании двумерного нелинейного потенциала Хеннона-Хейлеса $H_1 = x^3 / 3 - xz^2$, напоминающего секступольный потенциал. Существование такого движения пока не предсказывается никакой теорией.

В настоящее время имеются все основания считать, что причиной стохастичности является очень сложный характер движения вблизи сепаратрисы любого нелинейного резонанса, которая разделяет два принципиально различных типа регулярного движения: колебание и вращение. Доказано, что при сколь угодно малом возмущении изолированного резонанса (которое всегда имеется в реальных системах) вблизи сепаратрисы образуется стохастический слой. Если возмущение мало, толщина слоя также мала, и он с обеих сторон по действию ограничен регулярными траекториями, так что частица, попавшая в этот слой, совершает случайное, но ограниченное по амплитуде движение. Такая стохастичность называется слабой, или локальной и, в принципе, не ведет к гибели частицы. Однако по

мере роста возмущения стохастические слои отдельных резонансов уширяются и сливаются, приводя к неограниченной области сильной или глобальной стохастичности. Частицы, попавшие в эту область, рано или поздно оказываются за пределами устойчивой апертуры и выбывают из пучка.

Для предсказания перехода к области глобальной стохастичности разработано несколько теоретических критериев. Все они имеют различные достоинства, но, к сожалению, общий недостаток: ни один из них не предсказывает переход к стохастичности достаточно точно. Ниже мы рассмотрим один из критериев (исторически – первый), предложенный Б.В.Чириковым – критерий перекрытия резонансов. Этот критерий прост, нагляден и может быть получен с использованием уже имеющихся понятий.

В простой форме критерий перекрытия постулирует, что сильная стохастичность наступает, когда разрушается последняя инвариантная фазовая траектория между соседними резонансами, иными словами, когда сепаратрисы (а следовательно, стохастические слои) этих резонансов касаются (рис.13.2). Последнее хорошо видно из рис.13.1, где стохастический слой возникает и развивается между резонансами $10\nu = n$ и $12\nu = n$. Для соосной встречи пучков из-за симметрии разрешены только четные резонансы, поэтому резонансы порядка 10 и 12 являются ближайшими.

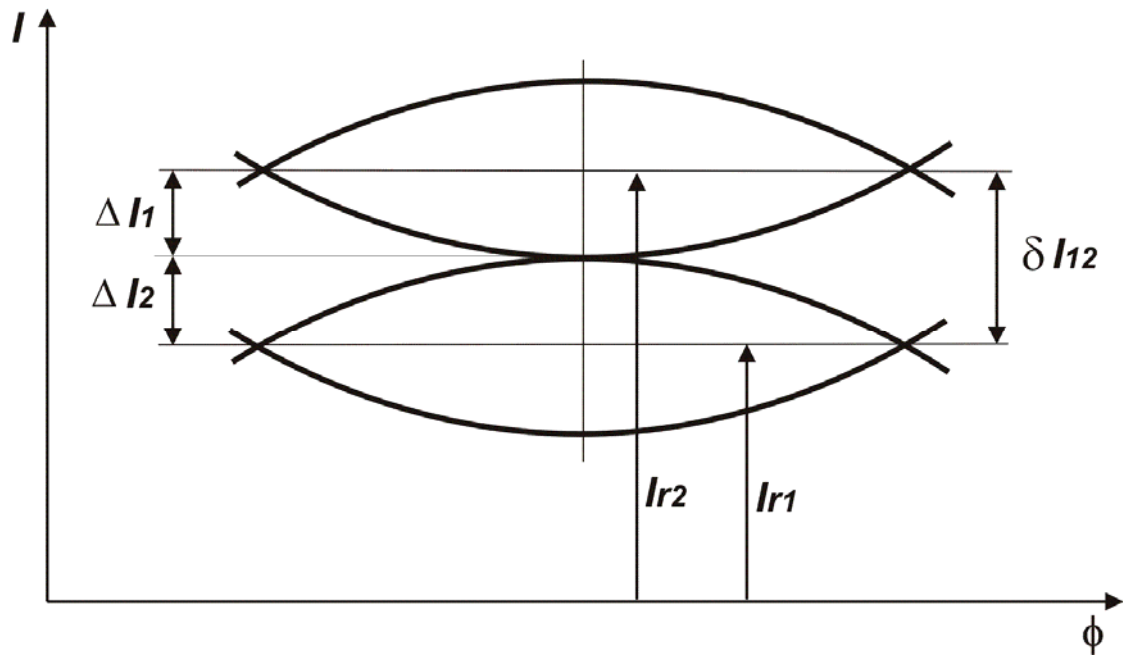


Рис.13.2 Критерий перекрытия.

Строго говоря, критерий перекрытия не является ни необходимым, ни достаточным. С одной стороны, последняя инвариантная кривая может быть разрушена значительно раньше касания сепаратрис двух резонансов за счет взаимодействия других резонансов между ними. С другой стороны, искажение фазового пространства может привести к тому, что реально сепаратрисы рассматриваемых резонансов вообще не будут касаться, несмотря на то, что это предсказывает критерий перекрытия. Численное моделирование показывает, что такой критерий является чересчур жестким, однако и в простейшем виде он дает грубую оценку границы стохастичности и может быть использован в самых различных задачах.

Рассмотрим два одномерных соседних резонанса

$$m_1 \nu = n_1, \quad m_2 \nu = n_2. \quad (13.1)$$

Соседних означает, что расстояние (по частоте) между этими резонансами будет минимальным:

$$\delta\nu = \left| \frac{n_2}{m_2} - \frac{n_1}{m_1} \right| = \frac{|n_2 m_1 - m_2 n_1|}{m_2 m_1} = \frac{1}{m_2 m_1}. \quad (13.2)$$

Касание сепаратрис таких резонансов произойдет, если расстояние между их центрами будет меньше, чем сумма полуширин:

$$\delta I_{12} = I_{r1} - I_{r2} < \Delta I_1 + \Delta I_2. \quad (13.3)$$

Вычислим разницу между резонансными частотами, воспользовавшись результатами разделов 8.3 и 8.4:

$$\begin{aligned} \delta\nu &= \nu(I_{r2}) - \nu(I_{r1}) = \alpha'(I_{r2}) - \alpha'(I_{r1}) = \alpha'(I_{r1} + \delta I_{12}) - \alpha'(I_{r1}) \\ &\approx \alpha'(I_{r1}) + \delta I_{12} \cdot \alpha''(I_{r1}) - \alpha'(I_{r1}) = \delta I_{12} \cdot \alpha''(I_{r1}). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Здесь мы воспользовались разложением в ряд α' при условии $\delta I_{12} \ll I_{r1}$. Теперь, используя вместе (13.2) и (13.4) для расстояния (по переменной действия) между центрами двух соседних резонансов можно записать

$$\delta I_{12} \cong \frac{1}{m_1 m_2 \alpha''}. \quad (13.5)$$

Ширина резонанса в направлении действия вычисляется согласно (8.4.4), так что сумма полуширин двух резонансов (если для простоты предположить равенство гармоник, их вызывающих, и малое изменение нелинейности на расстоянии, разделяющем резонансы $\alpha'' \approx \alpha_0 = \text{const}$), равна

$$\Delta I_1 + \Delta I_2 \approx 4 \sqrt{\frac{f(I_r)}{\alpha''(I_r)}}, \quad (13.6)$$

а критерий перекрытия (13.3) примет вид

$$\sqrt{\alpha''(I_r) f(I_r)} < \frac{1}{4m_1 m_2}. \quad (13.7)$$

Теперь, вспомнив выражение для частоты малых фазовых колебаний Ω (8.5.7), можно окончательно записать критерий перекрытия резонансов как

$$m\Omega < \frac{1}{4}. \quad (13.8)$$

Другими словами, для резонанса с номером m , для которого выполняется условие (13.8), область вокруг является с большой вероятностью стохастической. Для уточнения получившегося критерия может быть учтена ширина стохастического слоя, а также резонансы, существующие между двумя рассматриваемыми.

Из выражения (13.6) следует, что при большой нелинейности α'' расстояние между соседними резонансами уменьшается, с другой стороны, из (13.7) видно, что при маленькой нелинейности растет ширина сепаратрисы резонансов по переменной действия. Другими словами, чтобы избежать стохастичности (и иметь возможность рассматривать резонансы как изолированные) нелинейность должна быть ни большой, ни малой (как говорят – умеренной).

Рекомендуемая литература

1. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО РАН 278, Новосибирск, 1969.
2. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
3. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969.
4. Б.В.Чириков. Нелинейный резонанс. НГУ, Новосибирск, 1977.

Глава 14. Резонансы высоких порядков приближения и теория Ли

14.1 Резонансы высоких порядков приближения

Гамильтониан, описывающий горизонтальное движение для секступольного возмущения, имеет вид (9.2.2):

$$H_1 = \frac{1}{6\sqrt{2}} J^{3/2} \beta^{3/2}(s) m(s) (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi), \quad (14.1.1)$$

ясно демонстрирует наличие в системе резонансов $3\nu = n$ и $\nu = n$. Однако, если мы исследуем движение частицы в таком потенциале численно, мы увидим на фазовой плоскости траектории резонансов более высоких порядков (рис.14.1.1).

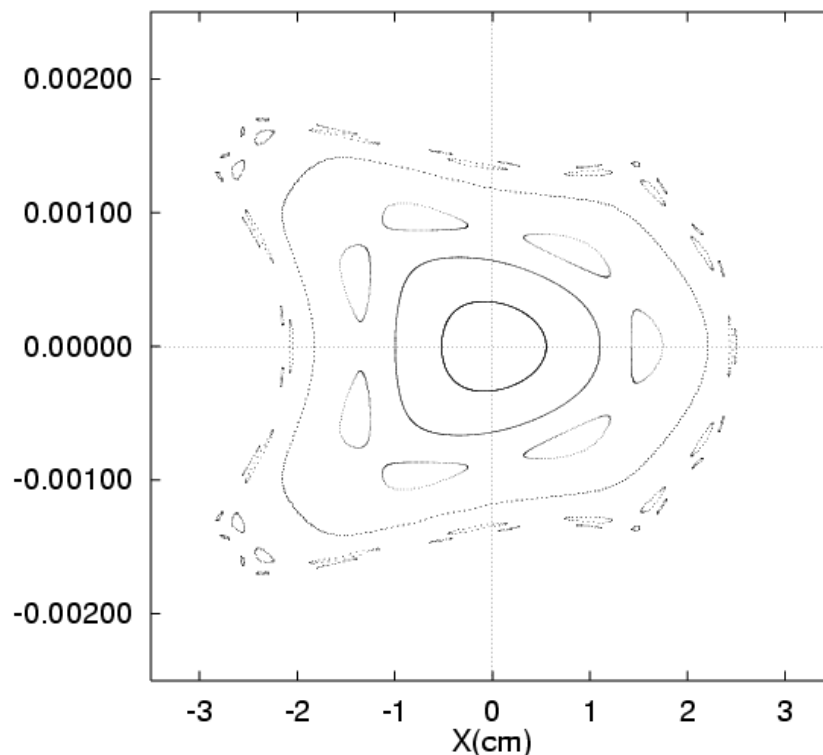


Рис.14.1.1 Резонансы секступольного возмущения. Хорошо виден резонанс $7\nu = n$, а также резонансы более высоких порядков на границе апертуры.

Спрашивается, откуда берутся эти резонансы, не присутствующие непосредственно в гамильтониане (14.1.1)?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, нам нужно научиться получать решения нелинейной задачи более высоких порядков.

В принципе, это можно сделать с помощью уже использовавшейся нами канонической теории с производящими функциями смешанного набора переменных. Однако, как уже отмечалось, распутывание переменных на каждом шаге создает серьезные трудности в применении классических методов для разложения высоких порядков. Количество алгебраических выкладок становится удручающе велико, а физические закономерности оказываются глубоко скрытыми.

Значительным шагом в развитии гамильтоновых методов возмущения было создание канонической теории преобразований Ли, при использовании которой не возникают функции смешанного набора переменных, а все члены рядов решения получаются в результате последовательного применения одной операции – скобок Пуассона.

14.2 Общая теория возмущений Ли

Рассмотрим гамильтониан $H(q, p)$ и уравнения Гамильтона, описывающие движение системы

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (14.2.1)$$

Используя скобки Пуассона

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (14.2.2)$$

где суммирование производится по всему набору канонических переменных, уравнения (14.2.1) можно легко переписать в другом виде:

$$\dot{p} = [p, H], \quad \dot{q} = [q, H]. \quad (14.2.3)$$

Решение уравнений Гамильтона позволяет по начальным условиям $q_0 = q(t_0)$ и $p_0 = p(t_0)$ найти значения переменных в любой другой момент времени $q_1 = q(t_1)$ и $p_1 = p(t_1)$.

Кроме того, если в момент времени t_0 задана некоторая функция канонических переменных, то знание решения уравнений Гамильтона позволяет найти ее значение в момент t_1 . Говорят, что решение (14.2.1) представляет собой каноническое преобразование от (q_0, p_0) к (q_1, p_1) .

Рассмотрим для начала автономный (случай явной зависимости от времени исследуем позже) гамильтониан $H(q, p, \varepsilon)$, который, кроме канонических переменных, зависит от некоторого параметра ε . Хотя формально введенный параметр может быть любым, мы будем говорить о параметре малости. Тогда задача теории возмущений – найти такое каноническое преобразование по ε , которое давало бы решение системы в высоких порядках малости. Сходство постановки задачи между преобразованием во времени (задаваемым гамильтонианом) и преобразованием по параметру позволяет его записать в виде

$$\frac{dp}{d\varepsilon} = [p, w], \quad \frac{dq}{d\varepsilon} = [q, w]. \quad (14.2.4)$$

Уравнения (14.2.4) составляют основу теории канонических преобразований Ли, а функция w , играющая в (14.2.4) роль «гамильтониана» называется производящей функцией Ли.

Как и в случае классических методов, сценарий поиска преобразований Ли включает в себя вывод и решение уравнения на производящую функцию w , использование этой функции для канонического перехода к новым переменным и гамильтониану, решение уравнений движения в новых переменных и обратное преобразование к исходным координатам.

Существует несколько вариантов построения преобразований Ли. Мы будем пользоваться операторным формализмом и рядами Дебри, позволяющими получить n -тый член разложения решения в виде полинома по степеням ε .

Запишем вектор обобщенных импульсов и координат $\vec{X} = (q_i, p_i)$, так что (14.2.4) примет вид

$$\frac{d\vec{X}}{d\varepsilon} = [\vec{X}, w(\vec{X}, \varepsilon)]. \quad (14.2.5)$$

Решение этого уравнения при любом ε и начальном условии $\vec{X}_0$:

$$\vec{X} = \vec{X}(\vec{X}_0, \varepsilon) \quad (14.2.6)$$

представляет собой каноническое преобразование $\vec{X}_0 \rightarrow \vec{X}$.

Введем отвечающий преобразованию (14.2.6) эволюционный оператор $\hat{T}$, который переводит любую функцию g в преобразованной точке $\vec{X}(\vec{X}_0, \varepsilon)$ в соответствующую точку f в начальной точке, т.е. равенство

$$f = \hat{T}g \quad (14.2.7)$$

означает

$$f(\vec{X}_0) = g(\vec{X}(\vec{X}_0, \varepsilon)). \quad (14.2.8)$$

В частности, если $g(\vec{X}) = \vec{X}$, то

$$\vec{X} = \hat{T}\vec{X}_0. \quad (14.2.9)$$

Для явного определения преобразования $\hat{T}$ введем оператор Ли

$$\hat{L} = [w, \quad]. \quad (14.2.10)$$

Подставляя (14.2.9) и (14.2.10) в (14.2.5)

$$\frac{d(\hat{T}\vec{X}_0)}{d\varepsilon} = [\hat{T}\vec{X}_0, w] = -[w, \hat{T}\vec{X}_0] = -\hat{L}(\hat{T}\vec{X}_0)$$

получим операторное уравнение

$$\frac{d\hat{T}}{d\varepsilon} = -\hat{L}\hat{T}, \quad (14.2.11)$$

которое допускает формальное решение

$$\hat{T} = \exp\left(-\int \hat{L}(\varepsilon)d\varepsilon\right). \quad (14.2.12)$$

В отсутствие явной зависимости от времени, для любого канонического преобразования, в том числе и для порождаемого функцией w , новый гамильтониан $\bar{H}$ связан со старым гамильтонианом H соотношением

$$\bar{H}(\vec{X}(\vec{X}_0, \varepsilon)) = H(\vec{X}_0), \quad (14.2.13)$$

т.е. новый гамильтониан в новой точке равен старому гамильтониану в старой точке. В силу (14.2.7) и (14.2.8)

$$\bar{H} = \hat{T}^{-1}H, \quad (14.2.14)$$

где $\hat{T}\hat{T}^{-1} = 1$.

Для автономных систем построение преобразования закончено: новый гамильтониан связан каноническим образом со старым с помощью производящей функции w , посредством операторов $\hat{T}$ и $\hat{L}$.

Для неавтономных систем все величины и операторы зависят явным образом от времени, и равенство (14.2.14) не выполняется. Правильное соотношение

$$\bar{H} = \hat{T}^{-1} H + \hat{T}^{-1} \int_0^\varepsilon \hat{T}(\varepsilon') \frac{\partial w(\varepsilon')}{\partial t} d\varepsilon'. \quad (14.2.15)$$

Для получения явных рекуррентных уравнений, позволяющих найти вид всех необходимых функций (рядов Дебри) разложим $\hat{T}$, w , $\hat{L}$, H и $\bar{H}$ по степеням параметра малости ε :

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_{n+1}, \quad \hat{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{L}_{n+1}, \quad (14.2.16)$$

$$\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \hat{T}_n, \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H_n, \quad \bar{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{H}_n.$$

Подставляя эти выражения в (14.2.11) и (14.2.15), после ряда выкладок можно получить искомые уравнения

$$\hat{T}_n = -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{T}_m \hat{L}_{n-m}, \quad \hat{T}_n^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{L}_{n-m} \hat{T}_m^{-1},$$

$$\hat{D}_0 w_n = n(\bar{H}_n - H_n) - \sum_{m=1}^{n-1} (\hat{L}_{n-m} \bar{H}_m + m \hat{T}_{n-m}^{-1} H_m), \quad (14.2.17)$$

где оператор $\hat{D}_0 = \partial / \partial \theta + [\quad, H_0]$ является полной производной по времени вдоль невозмущенной траектории. Учитывая вид H_0 , описывающего, для простоты, одномерное бетатронное движение, $\hat{D}_0$ выглядит как

$$\hat{D}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (14.2.18)$$

Неоднородное уравнение Лиувилля (14.2.17) для нахождения w_n содержит произвольную величину (новый гамильтониан), которая выбирается таким образом, чтобы исключить секулярные члены из производящей функции w_n .

Приведем первые два слагаемых разложения $\hat{T}$ и соответствующие уравнения для нахождения w_n :

$$\begin{aligned} \hat{T}_1 &= -\hat{L}_1, \\ \hat{T}_2 &= -\frac{1}{2}\hat{L}_2 + \frac{1}{2}\hat{L}_1^2, \end{aligned} \quad (14.2.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 w_1 &= \bar{H}_1 - H_1, \\ \hat{D}_0 w_2 &= 2(\bar{H}_2 - H_2) - \hat{L}_1 \bar{H}_1 - \hat{L}_1 H_1. \end{aligned} \quad (14.2.20)$$

Выражения для новых канонических переменных $(\bar{J}, \bar{\varphi})$ находятся с помощью эволюционного оператора $\hat{T}$

$$\bar{J} = \hat{T}J, \quad \bar{\varphi} = \hat{T}\varphi, \quad (14.2.21)$$

Эти выражения, фактически, являются уравнениями для нахождения искаженных фазовых траекторий.

Вдали от резонансов к секулярности в выражении для w_n могут приводить слагаемые, чье среднее значение по периодическим переменным вдоль фазовой траектории не равно нулю. Поэтому на каждом шаге по ε нужно принимать

$n\bar{H}_n = \langle rhs_n \rangle$, где $\langle \rangle$ означает усреднение по φ и θ , а rhs_n – правая часть (14.2.17). Тогда уравнение для поиска производящей функции Ли запишется как

$$\hat{D}_0 w_n = -\{rhs_n\}, \quad (14.2.22)$$

где фигурные скобки обозначают переменную часть.

В частности, для первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) w_1 = -\{H_1\}, \quad (14.2.23)$$

это уравнение совпадает с (7.1.16) для поиска классической производящей функции. Однако для более высоких порядков метод Ли позволил найти явные рекуррентные соотношения (14.2.7), в которых используются величины, найденные в предыдущих порядках, не требующие распутывания переменных.

14.3 Секступольное возмущение

В качестве примера применения метода Ли рассмотрим одномерное секступольное возмущение.

Как мы уже видели (Глава 4.2), в случае азимутальной симметрии это возмущение приводит к зависимости частоты от амплитуды только во втором порядке малости. Найдем такую зависимость для произвольного продольного распределения магнитного поля, построим возмущенные фазовые траектории, а попутно выясним источник резонансов высших порядков в гамильтониане (14.1.1).

Раскладывая (14.1.1) в ряд по азимутальной переменной $\theta = s/R$, где R – средний радиус ускорителя, получим

$$H_1 = (2J)^{3/2} \sum_n [3A_{1n} \cos(\phi - n\theta) + A_{3n} \cos(3\phi - n\theta)]. \quad (14.3.1)$$

Поскольку средняя по периодическим переменным часть этого гамильтониана равна нулю, первое уравнение (14.2.20) запишется как

$$\hat{D}_0 w_1 = -H_1, \quad (14.3.2)$$

с оператором $\hat{D}_0$, определенным в (14.2.8). Решение (14.3.2) имеет вид

$$w_1 = -(2J)^{3/2} \sum_n \left[\frac{3A_{1n}}{\nu - n} \sin(\phi - n\theta) + \frac{A_{3n}}{3\nu - n} \sin(3\phi - n\theta) \right]. \quad (14.3.3)$$

Найдя w_1 , мы можем определить оператор $\hat{L}_1 = [w_1, \quad]$, и, следовательно, перейти к порядку ε^2 , то есть, ко второму уравнению (14.2.2). Поскольку члена $\sim \varepsilon^2$ в (14.3.1) нет (он соответствует октупольному возмущению $\sim J^2$), то $H_2 = 0$, и (14.2.2) запишется как

$$\hat{D}_0 w_2 = 2H_2 - \hat{L}_1 H_1 = 2H_2 - [w_1, H_1]. \quad (14.3.4)$$

Выполнение процедуры скобок Пуассона

$$[w_1, H_1] = \frac{\partial w_1}{\partial \phi} \frac{\partial H_1}{\partial J} - \frac{\partial w_1}{\partial J} \frac{\partial H_1}{\partial \phi} \quad (14.3.5)$$

приводит к сумме произведений косинусов вида $\sim \cos(m\phi - n\theta) \cos(k\phi - n\theta)$, где $m, k = 1, 3$ (и аналогично – синусов). В результате появляется нулевая гармоника (постоянная составляющая) и гармоники суммы (четвертая) и разности (вторая) исходных фаз:

$$[w_1, H_1] = -36J^2 \sum_n \left[\frac{3A_{1n}^2}{\nu - n} + \frac{A_{3n}^2}{3\nu - n} \right] \quad (14.3.6)$$

$$- 36J^2 \sum_n [2B_{2n} \cos(2\varphi - n\theta) + B_{4n} \cos(4\varphi - n\theta)], \quad (14.3.7)$$

$$\text{где } B_{2n} = A_{1n}A_{3n} \left(\frac{1}{3\nu - n} - \frac{1}{\nu - n} \right) \text{ и } B_{4n} = A_{1n}A_{3n} \left(\frac{1}{3\nu - n} + \frac{1}{\nu - n} \right).$$

Чтобы избавиться от секулярности при нахождении w_2 , нужно $2\bar{H}_2$ в (14.3.4) приравнять среднему значению $[w_1, H_1]$ (то есть, (14.3.6)) с обратным знаком, и отсюда найти значение нового гамильтониана во втором порядке малости. Может показаться странным, что новый гамильтониан зависит от старой переменной действия, но, на самом деле, преобразование делается по формальной переменной J (было бы правильно вообще заменить ее другим символом), которой после завершения преобразования нужно, согласно (14.2.6), присвоить обозначение $\bar{J}$. Поэтому новый гамильтониан имеет вид

$$\bar{H}_2 = -18\bar{J}^2 \sum_n \left[\frac{3A_{1n}^2}{\nu - n} + \frac{A_{3n}^2}{3\nu - n} \right]. \quad (14.3.8)$$

Гамильтониан является интегралом движения, поскольку не зависит от времени явно. А т.к. он не зависит и от фазовой переменной, то сопряженный ей канонический импульс – действие $\bar{J}$ тоже интеграл движения, определяемый начальными условиями.

Соответственно, появляется нелинейная поправка к частоте согласно

$$\Delta\nu = dH_2 / d\bar{J} :$$

$$\Delta \nu = \alpha \cdot J \quad \text{и} \quad \alpha = -36 \cdot \sum_n \left[\frac{3A_{1n}^2}{\nu - n} + \frac{A_{3n}^2}{3\nu - n} \right]. \quad (14.3.9)$$

Сделаем несколько замечаний по полученным результатам. Как мы видели, во все решения (будь то производящая функция или нелинейный сдвиг частоты) входят не просто азимутальные гармоники возмущения, а гармоники с соответствующим знаменателем. Понятно, что определяющим вклад в движение будет от гармоники с номером, соответствующим ближайшему резонансу $m = n \nu$ (рис.14.3.1).

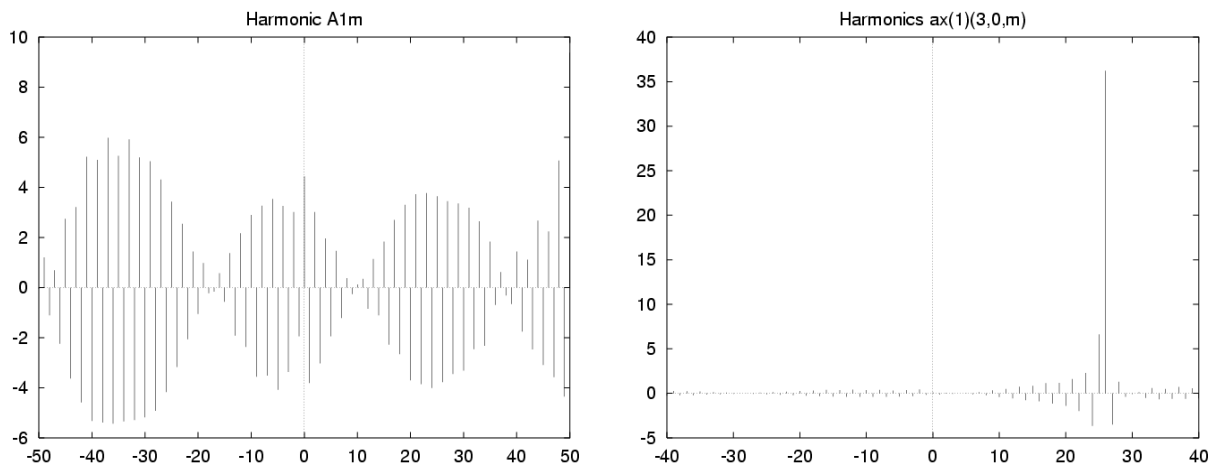


Рис.14.3.1 Спектр гармоник A_{1n} без учета (слева) и с учетом резонансного знаменателя.

Это открывает возможность приближенного исследования нелинейного движения с учетом всего нескольких гармоник самых сильных резонансов.

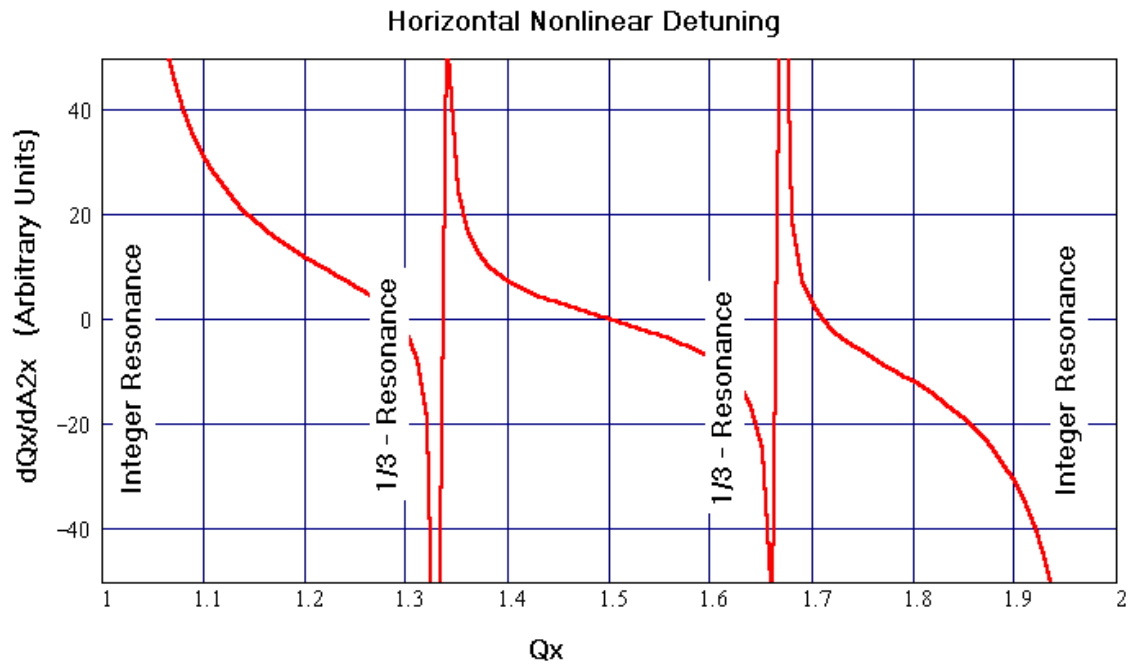


Рис.14.3.2 Горизонтальный нелинейный сдвиг частоты как функция невозмущенной частоты бетатронных колебаний.

Зависимость частоты от амплитуды также содержит малые знаменатели, и это значит, что вблизи резонансов $\nu = n$ и $3\nu = n$ частота бетатронных колебаний для заданной амплитуды стремится к бесконечности (рис.14.3.2). Чтобы обеспечить устойчивость движения, разрешенная амплитуда в окрестности резонансов должна стремиться к нулю. Что согласуется с оценкой размера динамической апертуры (9.2.8), полученной ранее.

Переменная часть $[w_1, H_1]$ (14.3.7) содержит новые гармоники, являющиеся результатом совместного действия исходных, которые дадут резонансы $2\nu = n$ и $4\nu = n$. Очевидно, что на следующем шаге появятся резонансы, комбинирующие все предыдущие гармоники и т.д. В таблице 14.3.1 приведена иерархия резонан-

сов (в т.ч. вертикальных и связи), возбуждаемых секступольным возмущением для трех первых порядков приближения.

Таблица 14.3.1 Иерархия секступольных резонансов.

Порядок приближения	x	z	Связь
1	$\nu_x = n$ $3\nu_x = n$		$\nu_x \pm 2\nu_z = n$
2	$2\nu_x = n$ $4\nu_x = n$	$\pm 2\nu_z = n$ $\pm 4\nu_z = n$	$2\nu_x \pm 2\nu_z = n$
3	$\nu_x = n$ $3\nu_x = n$ $5\nu_x = n$		$\nu_x \pm 2\nu_z = n$ $\nu_x \pm 4\nu_z = n$ $3\nu_x \pm 2\nu_z = n$

Резонансы, возбуждаемые в более высоких порядках, могут быть получены из таблицы 14.3.1 по индукции, так, видно, что показанный на рис.14.1.1 резонанс $7\nu = n$ появится только в пятом порядке малости решения.

Уравнения (14.2.21) и (14.2.19) позволяют найти форму фазовых траекторий, искаженных секступольным возмущением:

$$\bar{J} = \hat{f}J = (\hat{f}_0 + \hat{f}_1)J = (1 - \hat{L}_1)J = J - [w_1, J]. \quad (14.3.10)$$

Вычисление скобок Пуассона для (14.3.3) дает (для простоты $\theta = 0$):

$$\bar{J} = J + 3\sqrt{8}J^{3/2} \left[\cos \varphi \sum_n \frac{A_{1n}}{\nu_x - n} + \cos 3\varphi \sum_n \frac{A_{3n}}{3\nu_x - n} \right] \quad (14.3.11)$$

где константа $\bar{J}$ находится из начальных условий, например при $\varphi_0 = 0$ и $J_0 = J(0)$ (что соответствует $p_0 = 0$ и $x_0 = x(0)$). Численное решение (14.3.11) дает фазовые траектории системы $J(\varphi)$ (рис.14.3.3).

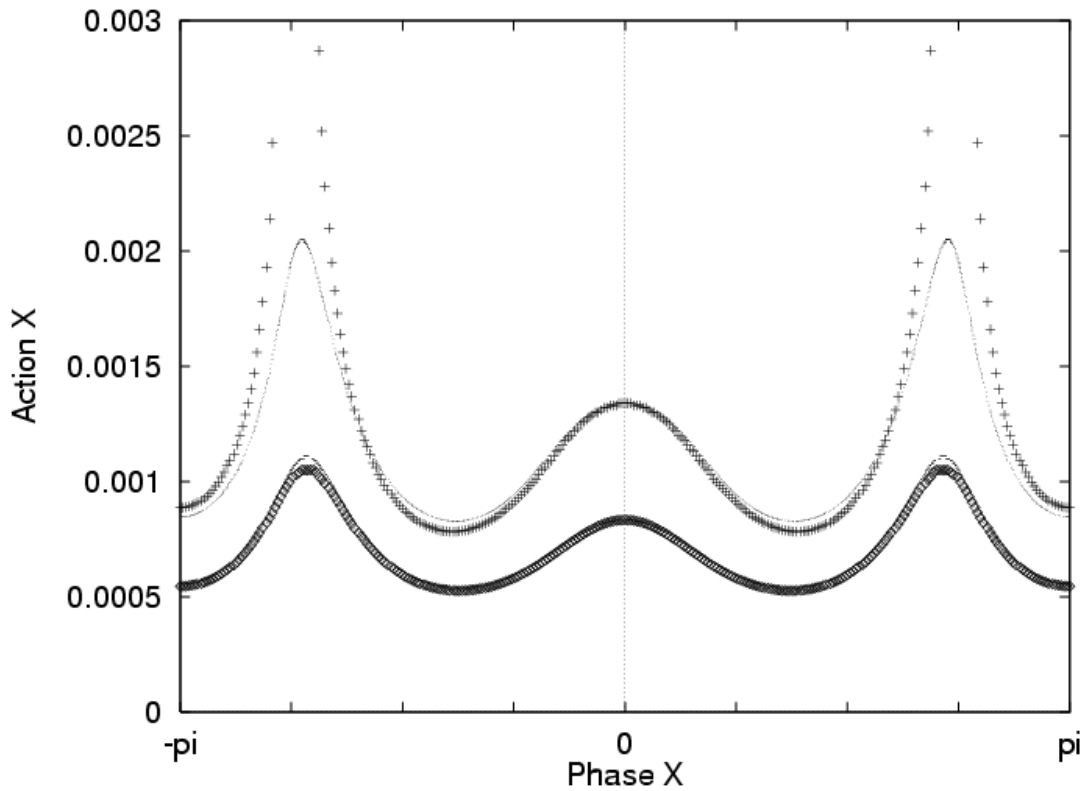


Рис.14.3.3 Фазовые траектории, найденные с помощью (14.3.11). Хорошо видны и первая, и третья гармоники.

Исчезновение действительного решения (14.3.11) для некоторых начальных условий задает размер динамической апертуры. При этом соответствующая фазовая траектория разрывается.

Рекомендуемая литература

1. А.Лихтенберг и М.Либерман, Регулярная и стохастическая динамика. «Мир», М., 1984.
2. В.В.Сажаев, Динамическая апертюра ускорителей с высоким хроматизмом: теория и эксперимент, Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1997.
3. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертюру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004.
4. Г.Е.О.Джакалья. Методы теории возмущений для нелинейных систем. «Наука», М., 1979.

Глава 15. Синхробетатронные резонансы

Пока при рассмотрении нелинейных и резонансных явлений мы ограничивались поперечным движением. До некоторой степени это справедливо, поскольку, как мы знаем, в современных сильнофокусирующих ускорителях бетатронные частоты в сотни и тысячи раз больше, чем синхротронная. Следовательно, связь между продольной и поперечными колебательными модами мала. Тем не менее она существует и может приводить к ряду нежелательных последствий для движения пучка.

Существует много источников синхробетатронной связи колебаний: некомпенсированный должным образом хроматизм модулирует бетатронные частоты синхротронной, ненулевая дисперсия в ускоряющем резонаторе приводят к изменению поперечной координаты в зависимости от набранной частицей энергии ($\Delta x = \eta_x \cdot \Delta E / E_0$). Синхробетатронные резонансы могут вызываться наклоном орбиты в резонаторе, эффектами встречи, наличием вертикальной дисперсионной функции в секступольных линзах, продольной вариацией поперечного магнитного поля, полями пространственного заряда и т.д.

Мы рассмотрим эффекты, связанные с синхробетатронными резонансами на примере модуляции бетатронной частоты синхротронными колебаниями при ненулевом хроматизме. Это не самый актуальный пример, поскольку хроматизм можно компенсировать до нужного значения секступольными линзами, но он

прост для исследования, а полученные результаты могут быть применены к другим источникам синхробетатронной связи.

Начнем с гамильтониана (8.1.3), описывающего движение вблизи одномерного (для простоты) бетатронного резонанса

$$H = \nu_x \cdot J_x + \alpha(J_x) + f(J_x) \cos(m\varphi_x - n\theta), \quad (15.1)$$

где фазовая переменная, согласно (7.3.14), меняется как $\nu_x \cdot \theta$. Наличие ненулевого хроматизма

$$\xi_x = \frac{\partial \nu_x}{\partial \delta},$$

где $\delta = (p - p_0)/p_0$, и синхротронных колебаний энергии $\delta = \delta_{\max} \cdot \cos \nu_s \theta$, приводит к тому, что мгновенная бетатронная частота также становится функцией азимутальной переменной, так что

$$\varphi_x = \int \nu_x(\theta) d\theta = \nu_{x0} \theta + \frac{\xi_x \delta_{\max}}{\nu_s} \sin \nu_s \theta. \quad (15.2)$$

Подставляя (15.2) в (15.1) получим

$$H = \nu_x \cdot J_x + \alpha(J_x) + f(J_x) \cos[(m\nu_{x0} - n)\theta + mb \cdot \sin \nu_s \theta], \quad (15.3)$$

где введено обозначение $b = \xi_x \delta_{\max} / \nu_s$. После ряда тригонометрических выкладок, учитывая, что

$$\cos(mb \cdot \sin \nu_s \theta) = J_0(mb) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(mb) \cdot \cos 2k \nu_s \theta,$$

$$\sin(mb \cdot \sin \nu_s \theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(mb) \cdot \sin(2k+1) \nu_s \theta,$$

где J_k — функции Бесселя, (15.3) может быть записан как

$$H = \nu_x \cdot J_x + \alpha(J_x) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(J_x) \cdot J_k(mb) \cdot \cos(m\varphi_x + k\varphi_s - n\theta). \quad (15.4)$$

где мы перешли к исходному обозначению $\varphi_x = \nu_x \cdot \theta$ и $\varphi_s = \nu_s \cdot \theta$. Гамильтониан (15.4) показывает, что модуляция бетатронной частоты синхротронными колебаниями приводит к тому, что одиночный бетатронный резонанс превращается в мультиплет резонансов (рис.15.1)

$$m\nu_x \pm k\nu_s = n. \quad (15.5)$$

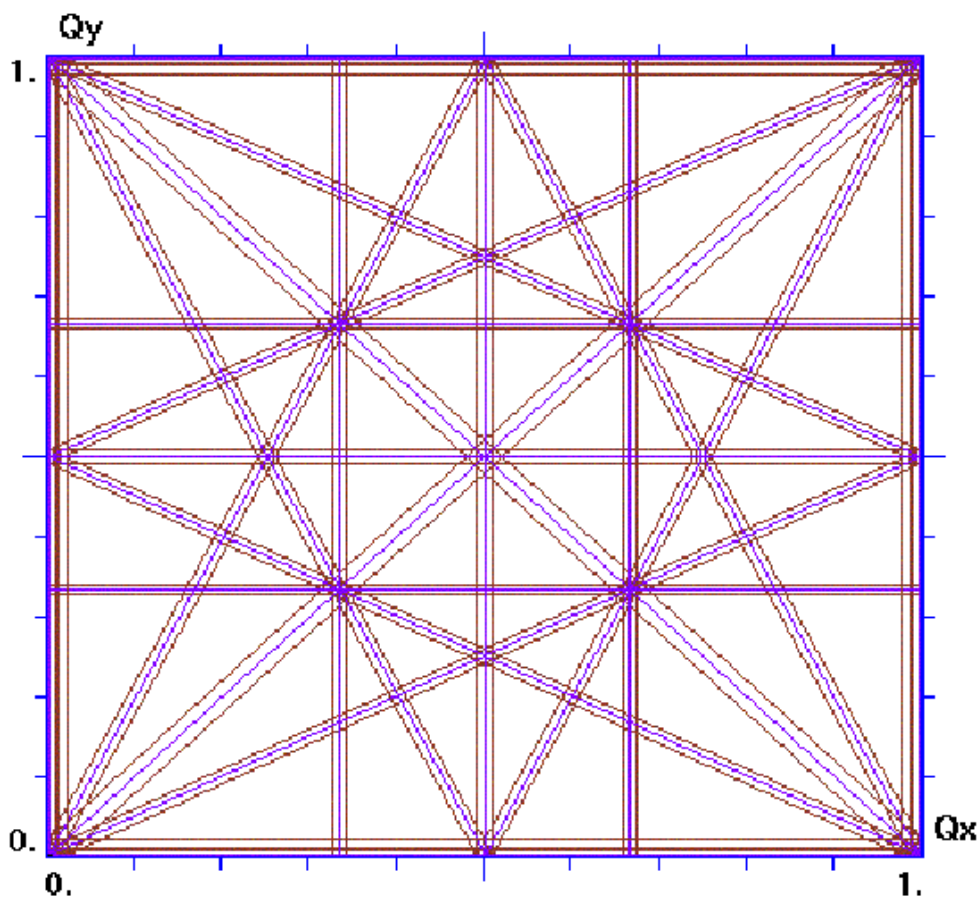


Рис.15.1 Линии бетатронных резонансов до третьего порядка включительно (как на рис.8.1.1) вместе с синхробетатронными сателлитами ($\pm \nu_s = 0.02$).

Сила k -го синхробетатронного резонанса определяется значением функции Бесселя $J_k(m\xi_x\delta_{\max}/\nu_s)$, а, так как функции Бесселя резко спадают при $k > m\xi_x\delta_{\max}/\nu_s$, это значение определяет и ширину всего мультиплета. Физически ширина мультиплета соответствует глубине модуляции бетатронной частоты.

С помощью канонического преобразования

$$F(\varphi_x, I, \varphi_s, \theta) = (m_x \varphi_x \pm k \varphi_s - n \theta) \cdot I \quad (15.6)$$

гамильтониан конкретного синхробетатронного резонанса (15.5) может быть записан уже в знакомом виде

$$H = \delta \cdot I + \alpha(I) + f(I) \cdot J_k(mb) \cdot \cos \phi, \quad (15.7)$$

где $\delta = m_x \nu_x - n$, а $\phi = \partial F / \partial I$. Последний гамильтониан может быть исследован так же, как гамильтониан одномерного резонанса ранее, т.е., можно найти особые точки резонанса, ширину его сепаратрисы, частоту фазовых колебаний и т.д. Однако наличие синхротронных сателлитов (15.4) у бетатронного резонанса создает свою специфику.

В качестве примера рассмотрим резонанс $4\nu_x = n$, для которого $m_x = 4$ и $k = 0$ (рис.15.2 (схематично) или рис.9.4.2).

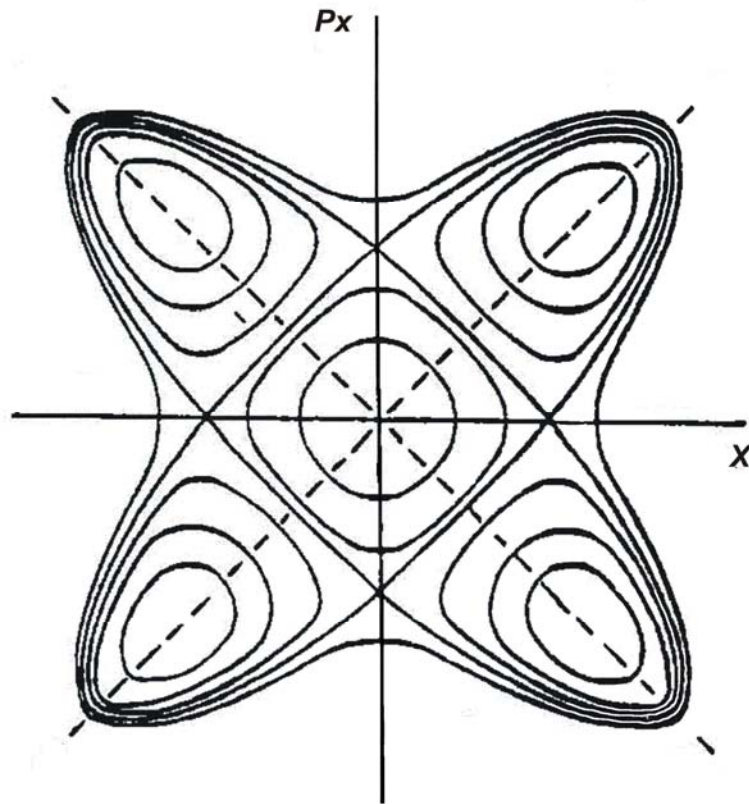
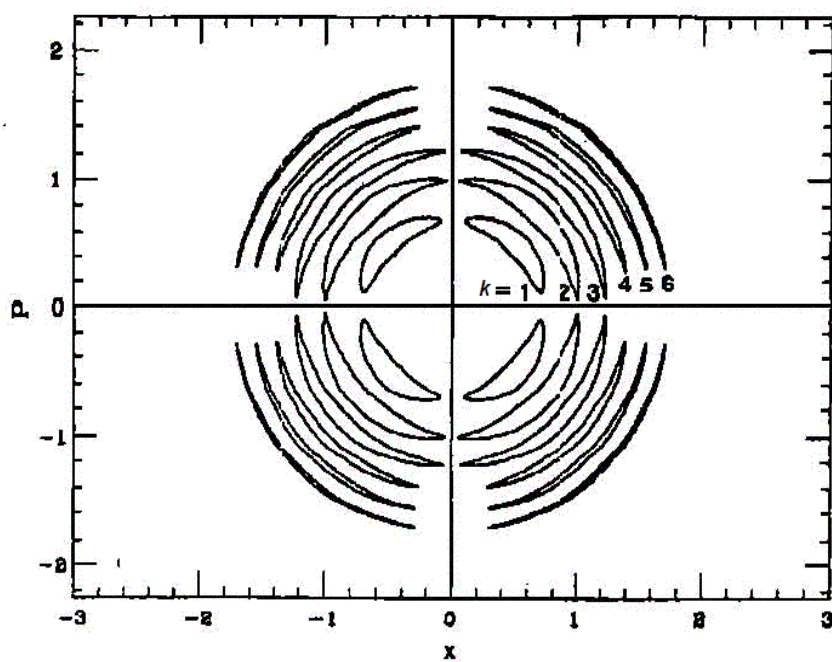
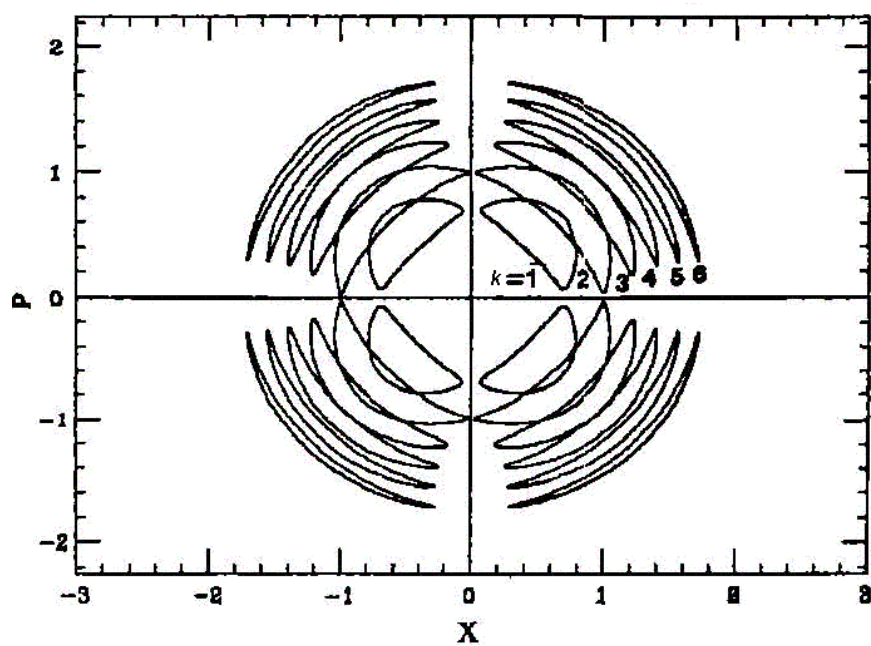


Рис.15.2 Фазовые траектории резонанса $4\nu_x = n$ ($k = 0$).

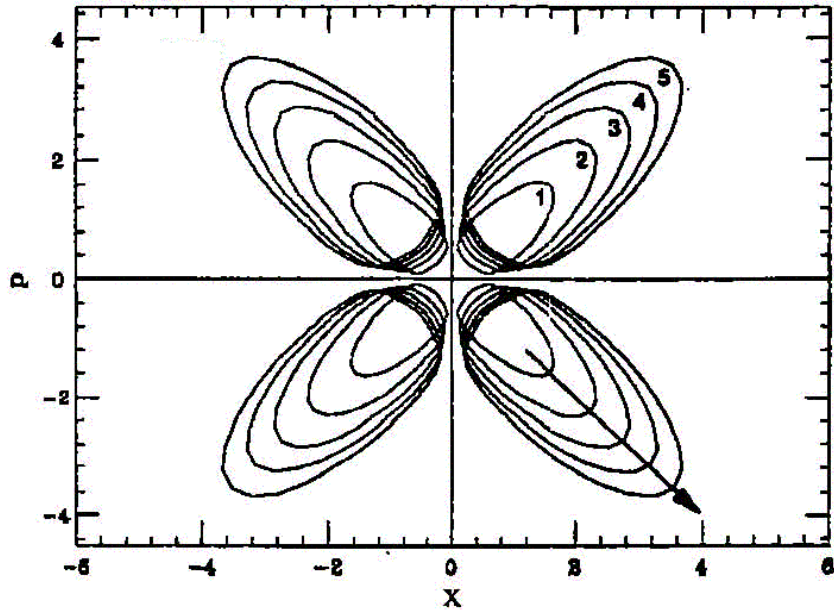
В зависимости от величины связи $m\xi_x \delta_{\max} / \nu_s$ могут реализоваться различные конфигурации фазовых кривых синхробетатронных резонансов, которые схематично показаны на рис.15.3. Для малой связи сепаратрисы синхробетатронных сателлитов не перекрываются (рис.15.3 а). При увеличении силы резонанса островки с меньшими значениями k начинают перекрываться, образуя стохастический слой (рис.15.3 б). При дальнейшем увеличении возмущения островки существенно перекрываются (рис.15.3 в), приводя к неустойчивости движения в окрестности рассматриваемого резонанса.



(а) Шесть синхробетатронных спутников ($k = 1 - 6$) резонанса четвертого порядка. Синхробетатронная связь мала.



(б) Шесть синхробетатронных спутников ($k = 1 - 6$). Синхробетатронная связь растет.



(в) Пять синхробетатронных спутников ($k = 1 - 5$) полностью перекрылись.

Рис.15.3 Перекрытие синхробетатронных резонансов.

Для вычисления критерия перекрытия воспользуемся выражением для ширины резонанса по переменной действия (8.4.5)

$$\Delta I = 2\sqrt{2f(I_r) \cdot J_k(mb)/\alpha_0}, \quad (15.8)$$

которая может быть переписана в виде ширины резонансной полосы по частоте, используя зависимость частоты колебаний от амплитуды $\alpha(I) = \alpha_0 \cdot I^2$, так что

$$\Delta \nu = (d\alpha(I)/dI)_{\Delta I} = 2\alpha_0 \Delta I = 4\sqrt{2f(I_r) \cdot \alpha_0 \cdot J_k(mb)}. \quad (15.9)$$

Для перекрытия резонансов ширина по частоте должна превышать расстояние по частоте между двумя соседними резонансами, которое, в случае синхробетатронных спутников равно $\delta \nu = \nu_s / k$. Следовательно, условие перекрытия синхробетатронных резонансов примет вид

$$4\sqrt{2f(I_r) \cdot \alpha_0 \cdot J_k(mb)} > \nu_s / k. \quad (15.10)$$

Более строгий подход к изучению связанного синхробетатронного движения состоит в написании обобщенного гамильтониана

$$H = H_T(x, x', z, z') + H_L\left(\frac{R}{h}\phi, \frac{\Delta p}{p_0}\right),$$

где первое слагаемое отвечает за поперечное (бетатронное) движение, а второе – за продольное (синхротронное). Канонически сопряженные переменные продольного движения

$$\left(\frac{R}{h}\phi, -\frac{\Delta p}{p_0}\right),$$

где R – средний радиус ускорителя, h – кратность частоты ускоряющего напряжения, ϕ – фаза ускоряющего напряжения для частицы с отклонением по импульсу $\Delta p / p_0$, могут быть преобразованы к переменным «действие-фаза»

$$I_s = \frac{R}{2\pi h} \oint \frac{\Delta p}{p_0} d\phi \quad \text{и} \quad \varphi_s = \phi,$$

после чего к рассматриваемому гамильтониану могут быть применены методы теории возмущений, описанные выше. Упрощает рассмотрение тот факт, что энергия продольного движения существенно больше, чем энергия поперечного движения, так что

$$I_s / I_{x,z} \sim 10^2 \div 10^3.$$

Это означает, что при исследовании связанных колебаний поперечное действие будет возмущаться существенно сильнее, чем продольное, и можно считать, по крайней мере, в первом порядке, $I_s \approx \text{const}$.

Рекомендуемая литература

1. Пестриков Д. В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие НГУ, Новосибирск, 2002.
2. Н.А.Винокуров и др. Синхробетатронные резонансы при нулевом хроматизме. Препринт ИЯФ 77-80 (1977).

Глава 16. Эффекты встречи

В установках со встречными пучками (коллайдерах) частицы одного сгустка испытывают воздействие электромагнитного поля другого, налетающего сгустка. Сила, действующая на частицы, нелинейная и приводит к возникновению уже рассмотренных явлений: зависимости частоты от амплитуды, резонансов и т.д. Нелинейные эффекты встречи пучков являются важным аспектом динамики частиц в ускорителе, поскольку именно они ограничивают светимость (основной параметр, показывающий эффективность работы) установок со встречными пучками.

Ниже мы рассмотрим некогерентные эффекты встречи, и будем учитывать влияние налетающего сгустка на пробную частицу, но пренебрегать ответным действием частицы (частиц) на встречный пучок. Такое приближение называется «сильно-слабым». Пучки считаем релятивистскими.

16.1 Сила пространственного заряда

Частица, пролетающая через встречный сгусток, подвергается воздействию его электромагнитного поля. Рассмотрим круглый в сечении пучок с гауссовым распределением частиц по радиусу (рис.16.1.1). Вдоль пучка распределение частиц однородно.

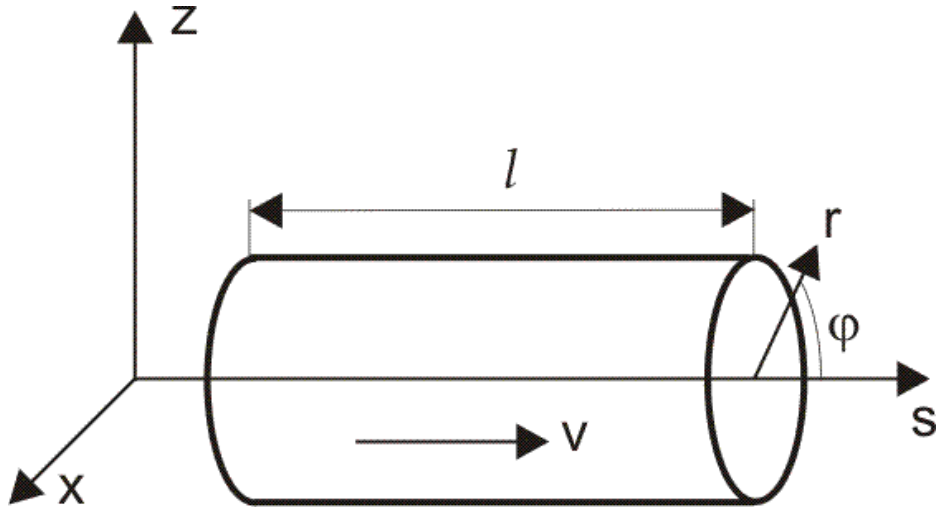


Рис.16.1.1 Взаимодействие круглого пучка и пробной частицы.

В лабораторной системе координат электромагнитное поле такого пучка может быть получено следующим образом. Ввиду цилиндрической симметрии задачи ненулевыми будут только компоненты E_r и B_φ . Тогда закон Гаусса дает

$$2\pi \cdot r \cdot \varepsilon_0 E_r = \int_0^r 2\pi r' \cdot \rho_0 \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right) dr',$$

откуда

$$E_r = \frac{\rho_0 \sigma^2}{\varepsilon_0 r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \quad (16.1.1)$$

В свою очередь, согласно закону Ампера

$$2\pi \cdot r \cdot H_\varphi = \int_0^r 2\pi r' \cdot \rho_0 \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma^2}\right) \cdot v dr',$$

или

$$B_\varphi = \frac{\rho_0 \sigma^2 v}{\varepsilon_0 c^2 r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right], \quad (16.1.2)$$

где было использовано $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, σ – среднеквадратичный размер радиального распределения частиц, v – скорость пучка, а пиковая плотность

$$\rho_0 = \frac{Ne}{2\pi\sigma^2 l} \quad (16.1.3)$$

вычисляется исходя из длины сгустка l и числа частиц в пучке N .

Для $\gamma \gg 1$ $v \approx c$, и силы, действующие на частицу, со стороны радиального электрического и тангенциального магнитного поля оказываются равными по направлению и величине:

$$\Delta \vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 2e \cdot \vec{E} = \frac{2e\rho_0\sigma^2}{\varepsilon_0 r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right] \cdot \vec{r}. \quad (16.1.4)$$

Для малых r разложение (16.1.4) в ряд дает

$$\Delta \vec{F} = \frac{e\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot \vec{r}$$

или, в декартовых координатах ($y = x, z$)

$$\Delta F_y = \frac{e\rho_0}{\varepsilon_0} \cdot y. \quad (16.1.5)$$

16.2 Параметр пространственного заряда ξ

Как правило, длина встречного сгустка мала, и можно воспользоваться приближением тонкой линзы, согласно которому отклонение траектории частицы связано с силой фокусировки ΔK и длиной линзы l выражением

$$\Delta y' = (\Delta K \cdot l) \cdot y,$$

или

$$\Delta K \cdot l = \frac{\Delta y'}{y} = \frac{\Delta p_y}{p_0 y} = \frac{\Delta F_y \cdot \Delta t}{m c \cdot y} = \frac{\Delta F_y}{\gamma m_0 c \cdot y} \cdot \frac{l}{2c}, \quad (16.2.1)$$

где Δt – время пролета частицей налетающего сгустка (учтено, что и частица, и сгусток движутся со скоростью света). Подставляя (16.1.5) и (16.1.3) в (16.2.1) можно получить

$$\Delta K \cdot l = \pm \frac{N \cdot r_e}{\gamma \sigma^2}, \quad (16.2.2)$$

где классический радиус электрона равен

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}.$$

Заметим, что пробная частица фокусируется ($\Delta K \cdot l < 0$) если знак ее заряда противоположен знаку частиц встречного сгустка, и в дальнейшем будем рассматривать именно этот случай.

Как известно, ошибка фокусировки ($\Delta K \cdot l$) приводит к сдвигу бетатронной частоты

$$\Delta \nu = -\frac{1}{4\pi} (\Delta K \cdot l) \beta, \quad (16.2.3)$$

где β берется в месте размещения ошибки (в нашем случае – в месте встречи).

В линейном приближении (для малых амплитуд бетатронных колебаний) встречный пучок представляет для налетающей частицы фокусирующую линзу с силой (16.2.2), размещенную в месте встречи, и сдвигающую частоту бетатронных колебаний на

$$\Delta \nu = \xi = \frac{N \cdot r_e \beta}{4\pi \sigma^2 \gamma} = \frac{r_e}{4\pi} \cdot \frac{N}{\epsilon \gamma}, \quad (16.2.4)$$

где ε – эмиттанс пучка. Сдвиг частоты (16.2.4) характеризует эффективную силу взаимодействия пучков, обозначается, как ξ , и называется «параметр пространственного заряда». Очевидно, что чем больше ξ , тем больше возмущено движение частицы полем встречного сгустка. В свою очередь, ξ растет при увеличении числа частиц N в пучке и уменьшении его эмиттанса.

Рассмотренное выше приближение верно, если $\xi \ll 1$, и бетатронная частота выбрана вдали от полуцелого резонанса. Только в этом случае можно пренебречь влиянием дополнительной фокусирующей линзы – встречного пучка – на структурные функции ускорителя. Для учета этого влияния рассмотрим матрицу оборота с начальным (и конечным) азимутом в месте встречи (предположим, для простоты, что магнитная структура четная относительно места встречи, и, следовательно, $\beta' = 0$):

$$\begin{pmatrix} \cos(\mu_0 + \Delta\mu) & \beta \sin(\mu_0 + \Delta\mu) \\ -\frac{1}{\beta} \sin(\mu_0 + \Delta\mu) & \cos(\mu_0 + \Delta\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\Delta K \cdot l}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\frac{1}{\beta_0} \sin \mu_0 & \cos \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\Delta K \cdot l}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

где индексом «0» обозначены невозмущенные величины, $\mu = 2\pi\nu$ – набег бетатронной фазы, а линза $(\Delta K \cdot l)$, представляющая встречный пучок разделена на две линзы половинной силы для сохранения симметрии.

Перемножение матриц дает

$$\cos(\mu_0 + \Delta\mu) = \cos \mu_0 + \frac{\Delta K \cdot l}{2} \beta_0 \sin \mu_0 = \cos \mu_0 - 2\pi \cdot \xi \sin \mu_0, \quad (16.2.5)$$

где было использовано (16.2.2). Выражение (16.2.5) позволяет получить связь между параметром пространственного заряда ξ и сдвигом бетатронной частоты из-за влияния встречного пучка

$$\xi = \frac{\sin(2\pi\Delta\nu)}{2\pi} [1 + \tan(\pi\Delta\nu) \cdot \cot(2\pi\nu_0)] \approx \Delta\nu + \pi\Delta\nu^2 \cot(2\pi\nu_0). \quad (16.2.6)$$

Формула (16.2.6) совпадает с (16.2.4), если $\Delta\nu \ll 1$, и ν_0 выбрана вдали от значения $n/2$.

Выражение (16.2.5) позволяет получить условие устойчивости бетатронных колебаний, возмущенных встречным пучком. Поскольку $|\cos(\mu_0 + \Delta\mu)| \leq 1$ то

$$\xi \leq \xi_{\max} = \cot(\pi\nu_0) / 2\pi. \quad (0 \leq \{\nu_0\} \leq 0.5) \quad (16.2.6)$$

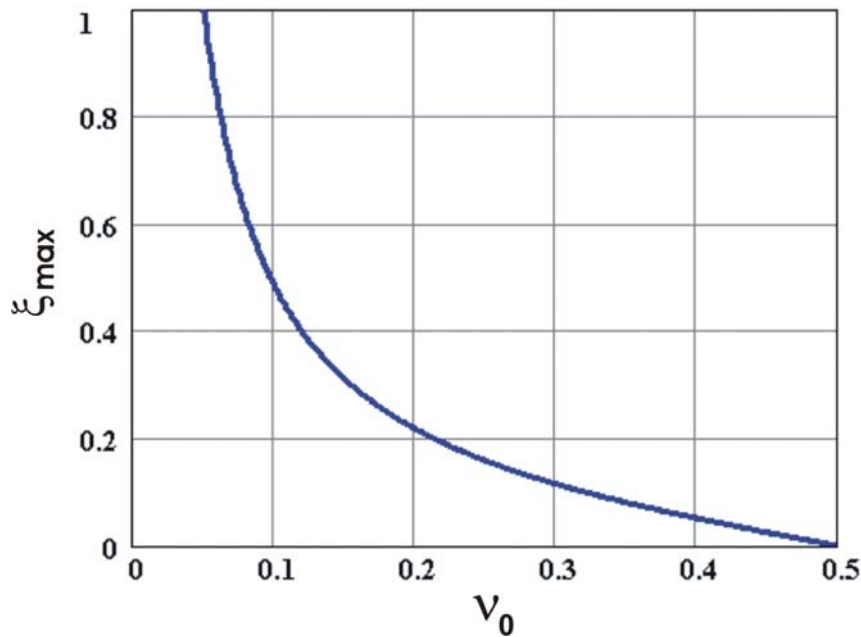


Рис.16.2.1 Устойчивость бетатронных колебаний встречных пучков.

График функции (16.2.6) приведен на рис.16.2.1. Видно, что порог устойчивости повышается для значений невозмущенной частоты выше $\nu_0 = n/2$. Именно

в этой области (дробная часть $\{\nu_0\} \sim 0.5 \div 0.6$) обычно и выбирают рабочую точку коллайдеров.

Приведем без вывода некоторые величины, характеризующие возмущение пучков не круглого, а эллиптического сечения со среднеквадратичными размерами σ_x и σ_z :

$$\Delta x' = -\frac{2N \cdot r_e}{\gamma \sigma_x (\sigma_x + \sigma_z)} \cdot x \quad \text{и} \quad \Delta z' = -\frac{2N \cdot r_e}{\gamma \sigma_z (\sigma_x + \sigma_z)} \cdot z,$$

$$\xi_x = \frac{N \cdot r_e \beta_x^*}{2\pi \gamma \sigma_x (\sigma_x + \sigma_z)} \quad \text{и} \quad \xi_z = \frac{N \cdot r_e \beta_z^*}{2\pi \gamma \sigma_z (\sigma_x + \sigma_z)}.$$

16.3 Светимость

При встрече двух пучков скорость событий (например, рождения новых частиц) равна

$$\dot{n} = f \frac{N^+ N^-}{S} \sigma_T, \quad (16.3.1)$$

где f – частота соударений пучков, $N^\pm$ – число частиц в сгустках, S – эффективная площадь взаимодействия и σ_T – полное сечение рассматриваемого процесса.

Если записать (16.3.1) в виде

$$\dot{n} = L \cdot \sigma_T \quad (16.3.2)$$

то мы получим параметр L , который не зависит от динамики исследуемой реакции, и обусловлен только характеристиками установки. Этот параметр называется

«светимость» и показывает эффективность работы коллайдера. Чем больше светимость, тем большее число полезных событий можно набрать в единицу времени.

Для круглых пучков одинаковой интенсивности ($N^+ = N^- = N$) с нормальным распределением поперечной плотности частиц ($S = 4\pi\sigma^2$) светимость можно записать как

$$L = f \cdot \frac{N^2}{4\pi\sigma^2} = f \cdot N \frac{\xi \cdot \gamma}{r_e \beta} = \frac{I}{e} \cdot \frac{\xi \cdot \gamma}{r_e \beta}, \quad (16.3.2)$$

где мы воспользовались определением (16.2.4), а $I = f \cdot N$ – ток пучка. Чтобы поднять светимость при заданных энергии и токе пучка, нужно уменьшать бетатронную функцию в месте встречи и увеличивать параметр пространственного заряда, что, в свою очередь, ведет к росту возмущения движения частиц.

Для пучков эллиптического сечения с горизонтальным и вертикальным размерами σ_x и σ_z светимость выражается как

$$L = f \cdot \frac{N\gamma}{2r_e} \frac{\xi_z}{\beta_z} \left(1 + \frac{\sigma_z}{\sigma_x} \right). \quad (16.3.3)$$

16.4 Нелинейные эффекты встречи

Из рис.16.2.1 видно, что вблизи (чуть выше) $\nu_0 = n/2$ можно добиться весьма больших значений ξ . На практике это никогда не удастся сделать, потому что нелинейные эффекты ограничивают параметр пространственного заряда величиной $\xi \sim 0.05 \div 0.1$.

По-прежнему будем рассматривать круглые пучки. Следуя (16.2.1), можно записать

$$\Delta y' = \frac{\Delta p_y}{p_0} = \frac{\Delta F_y \cdot \Delta t}{\gamma m_0 c} = \frac{\Delta F_y}{\gamma m_0 c} \frac{l}{2c}. \quad (16.4.1)$$

Подставив (16.1.4) (для определенности будем говорить о вертикальном движении), получим выражение для нелинейного «удара»

$$\Delta y' = -\frac{2N \cdot r_e}{\gamma} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right] \frac{z}{r^2}, \quad (16.4.2)$$

где $r^2 = x^2 + z^2$. Из графика функции (16.4.2), приведенного на рис.16.4.1, видно, что для частиц с малой амплитудой бетатронных колебаний ($\leq \sigma$) в месте встречи возмущение практически линейно (см. (16.1.5) – (16.2.4)), для частиц с амплитудами $\sim \sigma \div \sim 4\sigma$ движение сильно нелинейное, для частиц с большими амплитудами возмущение спадает к нулю.

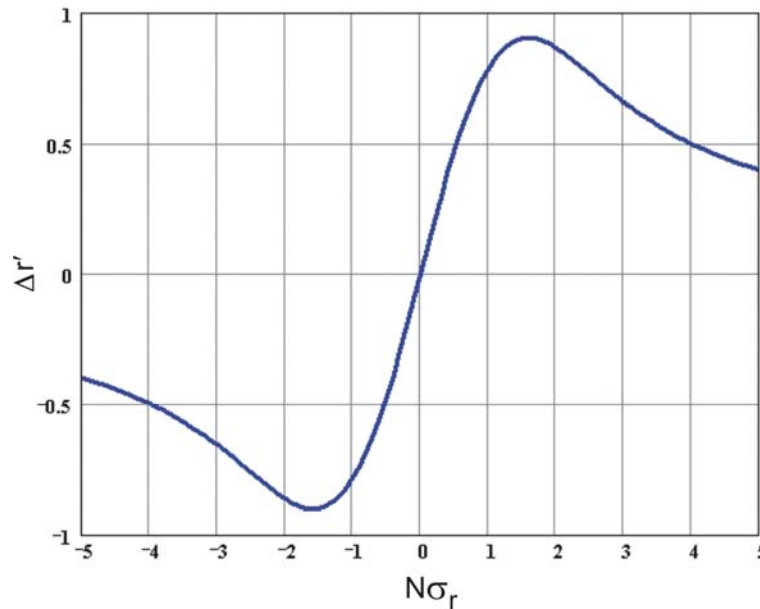


Рис.16.4.1 Сила нелинейного «удара» частицы полем встречного сгустка. По вертикали единицы условные, по горизонтали расстояние от центра пучка выражено в единицах σ .

Это поведение существенно отличается от того, которое мы рассматривали ранее для мультиполей внешнего магнитного поля, где возмущение с ростом амплитуды росло.

Следствием такого поведения нелинейной силы, в частности, является то, что данный тип возмущения не приводит к ограничению динамической апертуры (по крайней мере, для разумных параметров встречных пучков). Его действие, скорее, выражается в появлении внутри области устойчивости большого числа нелинейных резонансов, которые взаимодействуют друг с другом и вызывают рост амплитуды колебаний частиц, что приводит к уменьшению времени жизни (при этом апертура, динамическая или геометрическая, ограничена внешними причинами) и светимости. Последнее становится особенно понятным, если воспользоваться определением параметра пространственного заряда (16.2.4) и переписать (16.4.2) в виде

$$\Delta y' = -\frac{4\pi\xi_z}{\beta_z} \frac{2\sigma^2}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \right] \cdot z. \quad (16.4.3)$$

Из сравнения (16.4.3) с выражением (16.3.2) следует, что для увеличения светимости (при энергии, фиксированной условиями эксперимента, и токе, ограниченном коллективными эффектами) нужно увеличивать ξ_z и уменьшать β_z , а это неизбежно ведет к росту возмущения.

16.5 Сдвиг частоты и резонансы из-за эффектов встречи

Продолжим рассмотрение вертикального движения, положив, для простоты $x = 0$, и запишем соответствующий гамильтониан. Для этого заметим, что для

$$H = \frac{p^2}{2} + U(z)$$

уравнение Гамильтона дает

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U(z)}{\partial z}.$$

Сравнивая это выражение с (16.4.1) получим, что

$$U(z) = -\int \Delta F(z) dz,$$

или, воспользовавшись (16.4.3)

$$U(z) = \frac{4\pi\xi}{\beta} \int \frac{1 - \exp(-z^2 / 2\sigma^2)}{z^2 / 2\sigma^2} z dz. \quad (16.5.1)$$

Введя новую переменную $y = z^2 / 2\sigma^2$ (16.5.1) можно записать как

$$U(y) = \frac{4\pi\xi}{\beta} \sigma^2 \int \frac{1 - e^{-y}}{y} dy, \quad (16.5.2)$$

а в переменных «действие-угол», с учетом

$$y = \frac{2J\beta \cos \varphi}{2\sigma^2} = \frac{J}{\varepsilon} \cos \varphi = a \cdot \cos \varphi,$$

где a – действие, выраженное в единицах вертикального эмиттанса, (16.5.2) примет вид

$$U(J, \varphi) = \frac{4\pi\xi}{\beta} \sigma^2 \int \frac{1 - e^{-a \cos^2 \varphi}}{a} da. \quad (16.5.3)$$

Теперь мы можем записать гамильтониан движения частицы с учетом эффектов встречи

$$H = \nu \cdot J + U(J, \varphi) \cdot \delta_{2\pi}(\theta), \quad (16.5.4)$$

где

$$\delta_{2\pi}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos k\theta = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\theta \right) \quad (16.5.5)$$

показывает периодический характер воздействия встречного пучка.

Выражение под интегралом (16.5.3), с учетом $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi) / 2$ и

$$e^{-t \cos y} = I_0(t) + 2 \sum (-1)^n I_n(t) \cdot \cos ny,$$

где I_n – модифицированная функция Бесселя, может быть записано в виде

$$\frac{1}{a} \left(1 - e^{-a \cos^2 \varphi} \right) = \frac{1}{a} \left[1 - e^{-a/2} \left(I_0(a/2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(a/2) \cos 2n\varphi \right) \right]. \quad (16.5.6)$$

Нелинейная поправка к частоте колебаний из-за эффектов встречи вычисляется обычным образом:

$$\Delta \nu(J) = \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial J} \right\rangle_{\varphi, \theta} = \left\langle \frac{\partial U}{\partial J} \right\rangle_{\varphi, \theta},$$

где угловые скобки обозначают усреднение по периодическим переменным. Учитывая $J = \varepsilon \cdot a$, так что

$$\frac{\partial U}{\partial J} = \frac{\beta}{\sigma^2} \frac{\partial U}{\partial a}$$

и оставляя в выражении постоянные члены из (16.5.6) и (16.5.5), получим

$$\frac{\Delta \nu(J)}{\xi} = \frac{2}{a} \left(1 - e^{-a/2} I_0(a/2) \right). \quad (16.5.7)$$

Раскладывая правую часть (16.5.7) по степеням a при $a \rightarrow 0$ легко получить $\Delta\nu \approx \xi$, что совпадает с определением (16.2.4).

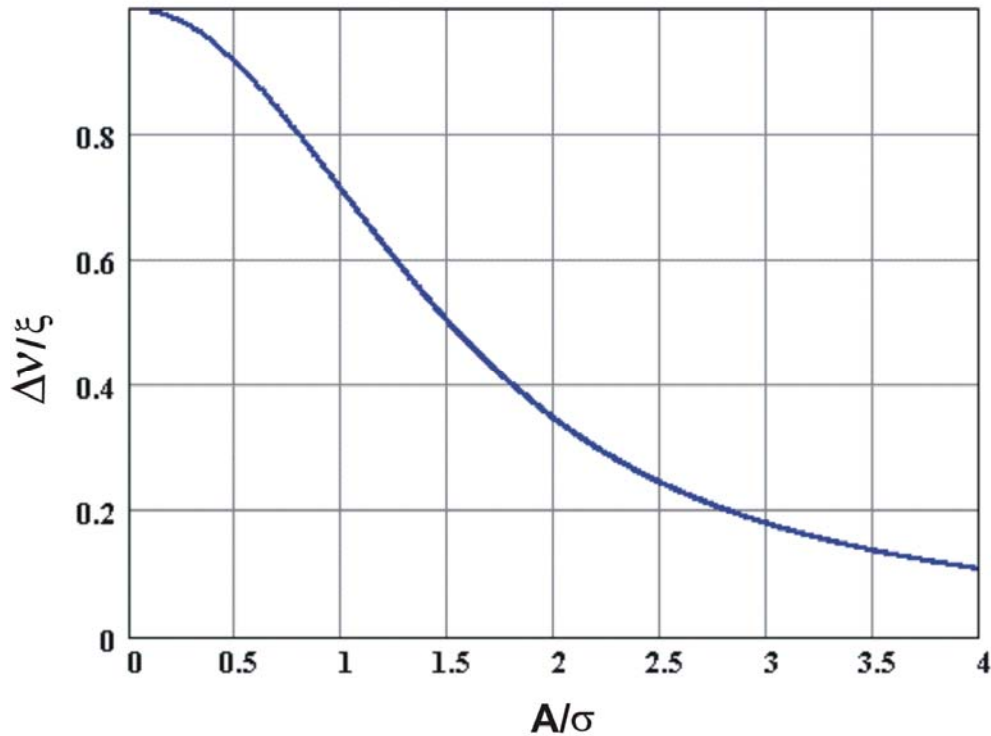


Рис.16.5.1 Зависимость частоты колебаний от амплитуды.

График функции (16.5.7) в зависимости от амплитуды колебаний, выраженной в единицах стандартного размера пучка $\sqrt{a} = \sqrt{\varepsilon\beta}/\sigma$, приведен на рис.16.5.1. Видно, что в отличие от мультиполей магнитного поля, для которых такая зависимость (в первом порядке) была функцией, монотонно возраставшей с увеличением амплитуды, в поле встречного пучка частота частицы с нулевым отклонением смещена от невозмущенной на $\Delta\nu \approx \xi$, а при амплитуде $A \rightarrow \infty$ частота $\nu \rightarrow \nu_0$.

Выражения (16.5.5) и (16.5.6), подставленные в гамильтониан (16.5.4), позволяют выделить резонансную гармонику и применить результаты резонансной теории возмущения. Поскольку потенциал возмущения является четной функцией

ей, он возбуждает только резонансы номера $2n$, что хорошо видно из (16.5.6).

Пример фазовых траекторий для встречных пучков приведен на рис.16.5.2.

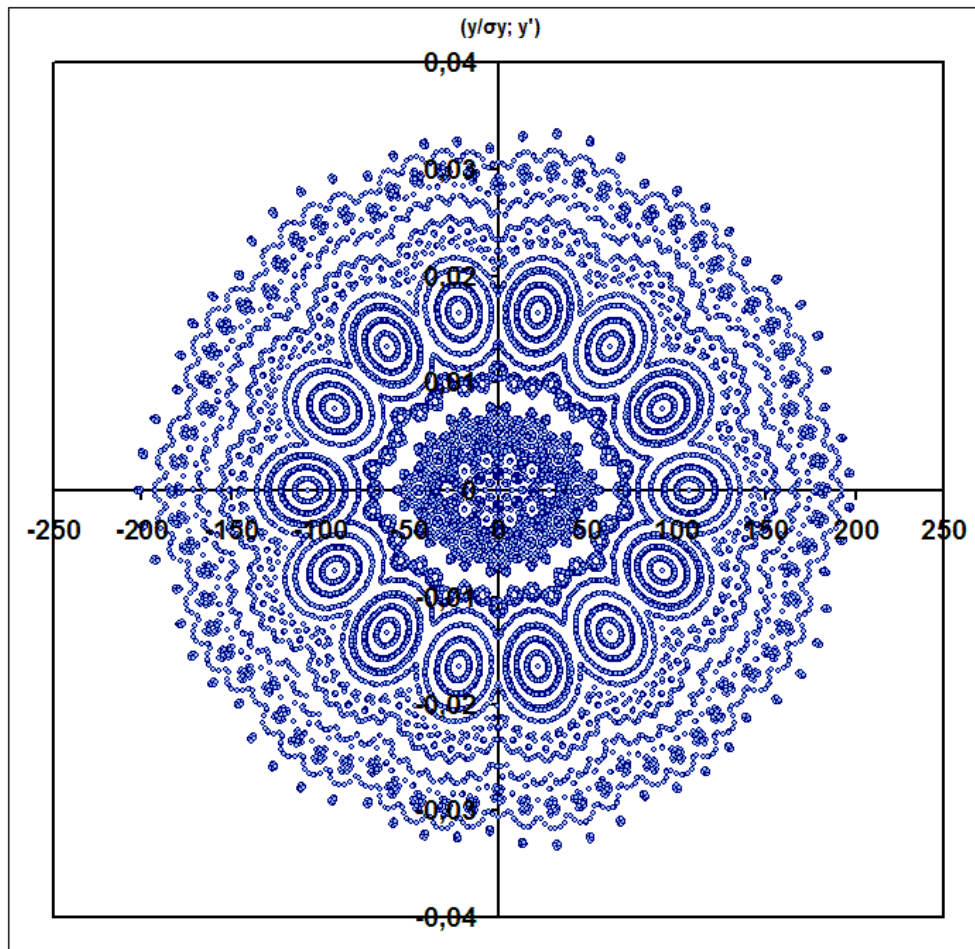


Рис.16.5.2 Резонансы, вызываемые эффектами встречи.

Вспомнив общую форму записи резонансного гамильтониана (9.1.3)

$$H \approx \nu \cdot J + \alpha(J) + f(J) \cos(2n\varphi - k\theta), \quad (16.5.8)$$

его составляющие для лобовой встречи круглых пучков можно записать как

$$\alpha(J) = 2\xi \cdot \int \frac{1 - e^{-a/2} I_0(a/2)}{a} da \quad \text{и} \quad f(J) = (-1)^n \cdot 4\xi \cdot \int \frac{e^{-a/2} I_n(a/2)}{a} da.$$

Сила резонанса $f(J)$, полученная численно для разных n , приведена на рис.16.5.3.

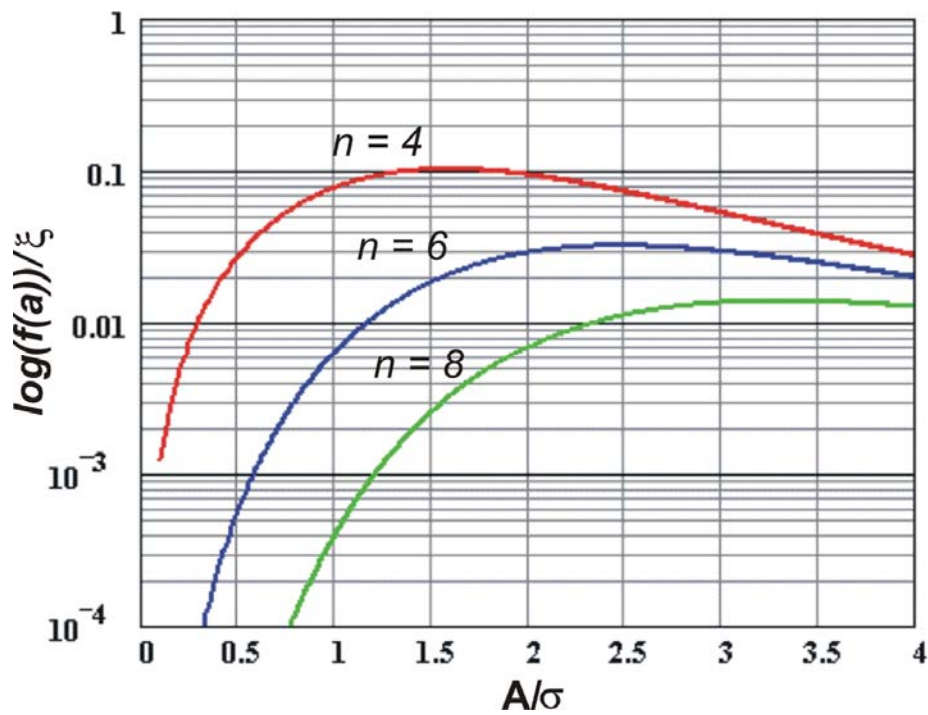


Рис.16.5.3 Сила нелинейного резонанса из-за эффектов встречи в зависимости от амплитуды бетатронных колебаний.

Вычисление параметров гамильтониана (16.5.8) позволяет исследовать резонансы, вызываемые эффектами встречи, например, определить с помощью критерия Чирикова такое значение ξ , при котором регулярное движение превращается в стохастическое. Однако это значение оказывается существенно выше получаемого на практике.

Учет второй поперечной координаты, который приводит к появлению резонансов связи, и синхротронного движения (синхробетатронные резонансы) уменьшает пороговое значение ξ , тем не менее, последнее все еще остается завышенным по сравнению с экспериментальными данными.

Добиться неплохого согласия с экспериментом можно только с помощью достаточно сложных моделирующих программ, которые учитывают все три сте-

пени свободы, затухание и квантовую «раскачку» колебаний из-за излучения, внешние нелинейности и т.д. Характерное время счета таких программ для получения равновесного распределения частиц на современных компьютерах – часы и даже дни.

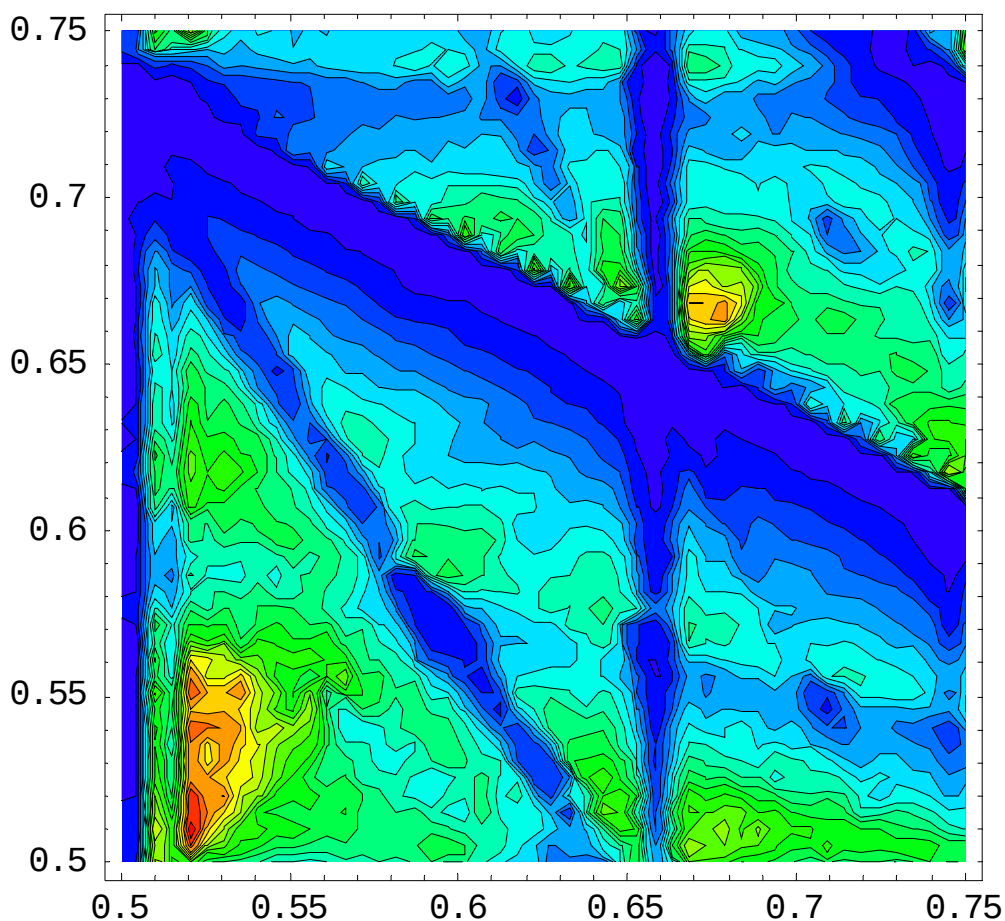


Рис.16.5.4 Светимость (показана цветом) в зависимости от нецелой части бета-тронной частоты (оси соответствуют направлению движения).

Пример работы программы LIFETRACK, разработанной в ИЯФ СО РАН, показан ниже. На рис.16.5.4 показано вычисление светимости в зависимости от рабочей точки. Видно, что светимость минимальна на резонансах, а максимальна вблизи полуцелого значения частоты, однако, приблизится к значению 0.5 мешает

синхробетатронный сателлит, который хорошо виден рядом с левой вертикальной осью.

На рис.16.5.5 приведено равновесное распределение амплитуд бетатронных колебаний для разных значений пространственного заряда. Видно, что для малых ξ компактный пучок расположен вблизи начала координат, и частицы практически не испытывают возмущения от встречного пучка. С ростом ξ амплитуды колебаний увеличиваются (преимущественно в вертикальном направлении, поскольку моделировалась встреча плоских пучков, для которых основное возмущение действует по вертикали), и частицы с большими отклонениями теряются на границе апертуры (динамической или геометрической). При этом изменение распределения плотности пучка приводит к падению светимости, а отклонение частиц на большие амплитуды – к уменьшению времени жизни пучка.

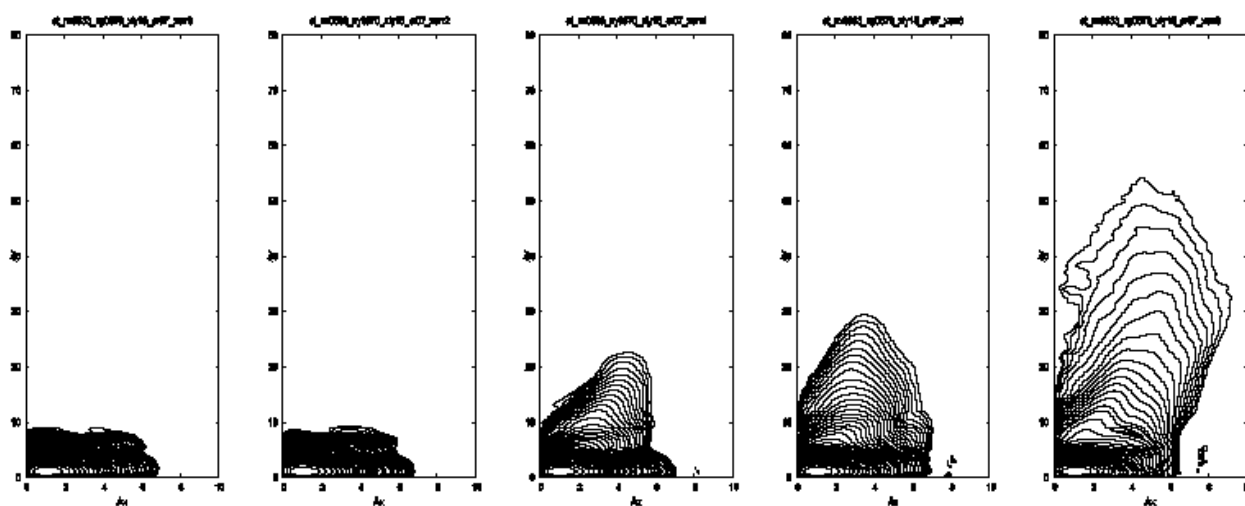


Рис.16.5.5 Распределение амплитуд бетатронных колебаний (в единицах σ) при увеличении ξ (слева направо). Соседние линии показывают амплитуды, отличающиеся в e раз.

Литература

1. Пестриков Д. В. Нелинейные эффекты в динамике циркулирующих пучков. Учебное пособие НГУ, Новосибирск, 2002 г.
2. Д.Н.Шатилов. Компьютерное моделирование эффектов встречи на больших амплитудах и определение времени жизни. Препринт ИЯФ 92-79, 1992.
3. А.Б.Темных. Эффекты электромагнитного взаимодействия встречных пучков в электрон-позитронном накопителе. Дисс. к.ф.-м.н., ИЯФ СО РАН, 1987.
4. С.И.Мишнев. Исследование электромагнитного взаимодействия встречных пучков. Дисс. к.ф.-м.н., ИЯФ СО РАН, 1975.

Глава 17. Нелинейности периодических магнитных систем

Интересной особенностью отличаются периодические магнитные структуры – «змейки» (английское название – wigglers) и ондуляторы: в формировании нелинейности магнитного поля таких устройств существенную роль играет продольная вариация поля. Змейки и ондуляторы достаточно широко применяются в циклических ускорителях для генерации синхротронного излучения со специальными свойствами, и могут оказывать значительное влияние на динамику пучка. Ниже мы рассмотрим так называемую плоскую (планарную) змейку, состоящую из набора дипольных магнитов знакопеременной полярности. Орбита пучка в такой змейке лежит в медианной плоскости.

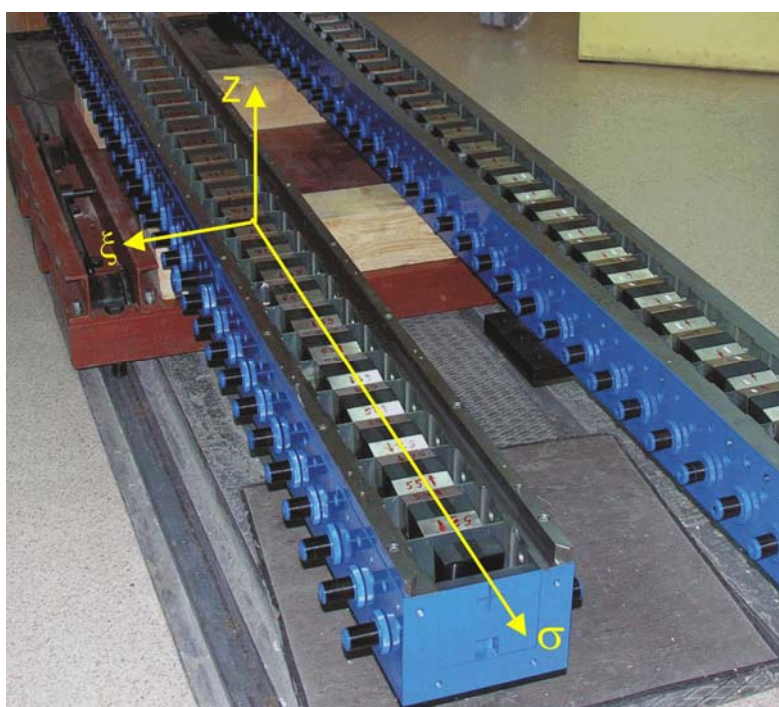


Рис.17.1 Верхняя и нижняя половины змейки на постоянных магнитах (максимальное поле $B_w = 1.5$ Т, период $\lambda_w = 20$ см), созданной в ИЯФ СО РАН для источника синхротронного излучения PETRA-III (Гамбург, Германия)

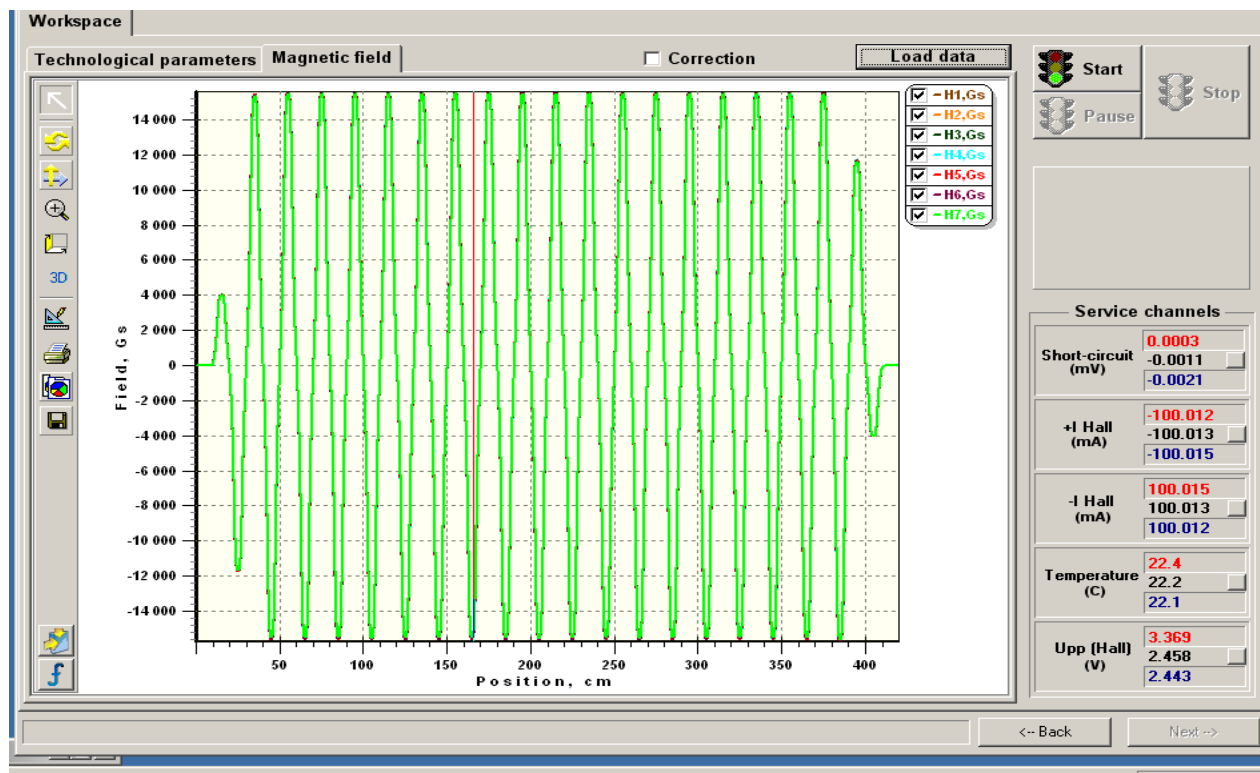


Рис.17.2 Продольная зависимость вертикальной компоненты поля змейки на оси

На рис.17.1 показаны две половины плоской змейки, в которой поле создается постоянными магнитами (используются также электромагниты с обычной или сверхпроводящей обмоткой возбуждения). Хорошо видна периодическая структура устройства. Продольная зависимость магнитного поля на оси такой змейки приведена на рис.17.2. Если межполюсной зазор магнитов мал по сравнению с периодом, то продольная зависимость поля змейки весьма близка к синусоидальной.

Из-за симметрии плоской периодической змейки ее магнитное поле удобно представлять в декартовой системе координат (ξ, z, σ) , показанной на рис.17.1, где σ совпадает с осью змейки. Общие выражения, описывающие магнитное поле плоской змейки, имеют вид

$$\begin{aligned}
B_z &= B_w \cosh k_\xi \xi \cosh k_z z \cos k\sigma, \\
B_\xi &= \frac{k_\xi}{k_z} B_w \sinh k_\xi \xi \sinh k_z z \cos k\sigma, \\
B_\sigma &= -\frac{k}{k_z} B_w \cosh k_\xi \xi \sinh k_z z \sin k\sigma,
\end{aligned} \tag{17.1}$$

где $k_\xi^2 + k_z^2 = k^2 = (2\pi / \lambda_w)^2$, а λ_w – период змейки. Параметр k_ξ описывает изменение поля вдоль поперечной координаты ξ . Используя разложение гиперболических функций в ряд по степеням аргумента

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots, \quad \sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \tag{17.2}$$

можно получить разложение поля, аналогичное (1.20) и (1.21).

Однако, поскольку бетатронные колебания совершаются относительно некоторой орбиты $\xi(\sigma)$, которая формируется полем змейки, и с которой можно соотнести сопровождающую систему (x, z, s) , как это показано на рис.17.3, нам необходимо по известным выражениям магнитного поля змейки в декартовой системе координат (17.1) найти уравнения движения (или гамильтониан) частицы в сопровождающей системе. Для этого:

1. по выражением магнитного поля (17.1) найдем составляющие векторного потенциала (A_ξ, A_z, A_σ) в декартовой системе координат;
2. найдем орбиту пучка $\xi_0(\sigma)$ в декартовой системе координат;
3. преобразуем компоненты векторного потенциала в сопровождающую систему координат (A_x, A_z, A_s) , связанную с найденной орбитой;

4. воспользовавшись результатами Главы 6, запишем гамильтониан частицы в сопровождающей системе координат.

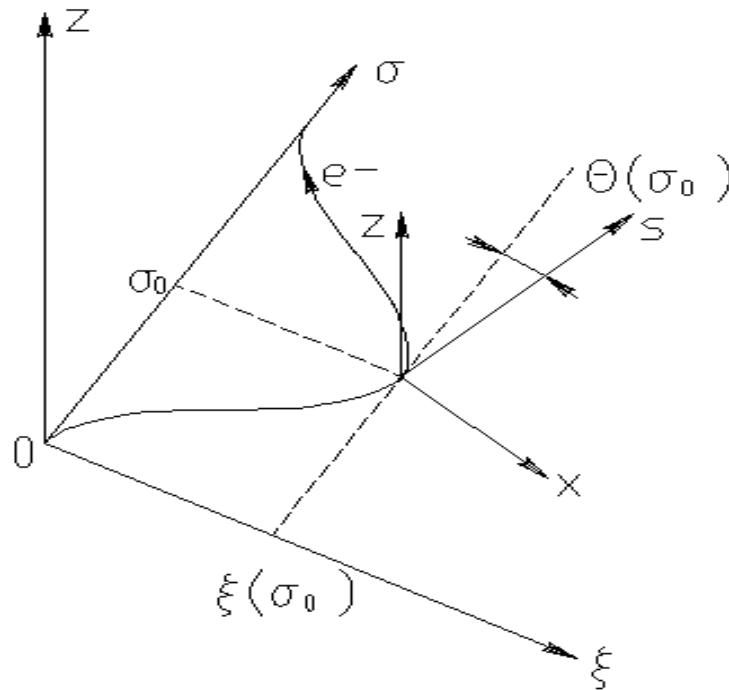


Рис.17.3 Система координат для плоской змейки

Выбрав калибровку $A_\sigma = 0$, легко получить

$$A_\xi = \frac{B_w}{k} \cosh k_\xi \xi \cosh k_z z \sin k\sigma, \quad (17.3)$$

$$A_z = -B_w \frac{k_\xi}{k_z k} \sinh k_\xi \xi \sinh k_z z \sin k\sigma.$$

Прямая проверка с помощью уравнения Максвелла $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ показывает, что эти выражения удовлетворяют (17.1).

Далее, чтобы упростить задачу и более ясно продемонстрировать влияние продольной зависимости в формирование нелинейности магнитного поля змейки, мы будем считать $k_\xi = 0$, что соответствует полю, однородному вдоль оси ξ (бес-

конечно широким полюсам змейки). При этом $k_z = k$, $\cosh k_\xi \xi = 1$, $\sinh k_\xi \xi = 0$, горизонтальная компонента поля $B_\xi = 0$, а оставшиеся равны

$$\begin{aligned} B_z &= B_w \cosh kz \cos k\sigma, \\ B_\sigma &= -B_w \sinh kz \sin k\sigma. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Векторный потенциал при этом имеет единственную ненулевую компоненту

$$A_\xi = \frac{B_w}{k} \cosh kz \sin k\sigma. \quad (17.5)$$

Траектория равновесной частицы (орбита) может быть найдена согласно модифицированному уравнению (1.15), где, для выбранной декартовой системы координат, кривизна $1/\rho = 0$

$$\frac{d^2 \xi_0}{d\sigma^2} = -\frac{B_z(\sigma, \xi = z = 0)}{B\rho} = -h_w \cos k\sigma, \quad (17.6)$$

где $h_w = B_w / B\rho$. Решение этого уравнения дает угол отклонения орбиты пучка в змейке относительно оси

$$\frac{d\xi_0}{d\sigma} = \operatorname{tg} \theta \approx \theta(\sigma) = -\frac{h_w}{k} \sin k\sigma = -\theta_m \sin k\sigma, \quad (17.7)$$

где максимальный угол отклонения частицы в змейке $\theta_m = \lambda_w / 2\pi\rho_w \ll 1$. Повторное интегрирование определяет траекторию равновесной частицы в змейке

$$\xi_0(\sigma) = \frac{h_w}{k^2} \cos k\sigma = \frac{\theta_m}{k} \cos k\sigma. \quad (17.8)$$

Переход из декартовой системы координат в криволинейную производится обычным для преобразования векторов образом, так что

$$A_x = A_\xi \cos \theta \approx A_\xi, \quad A_s = A_\xi \sin \theta \approx A_\xi \cdot \theta(\sigma), \quad (17.9)$$

и гамильтониан (6.1.8) запишется

$$\begin{aligned} H(x, z, s, p_x, p_z, p_s; t) &= c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2 + (p_x - eA_x)^2 + \left(\frac{p_s}{1 + hx} - eA_s \right)^2} \\ &\approx c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2 + (p_x - eA_\xi)^2 + \left(\frac{p_s}{1 + hx} - eA_\xi \theta \right)^2}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

Повторив рассуждения Главы 6, разложив квадратный корень в ряд до второй степени малого аргумента (см. (6.1.15), (6.1.16) и (6.2.1)) $\sqrt{1 - \alpha} = 1 - \alpha/2 - \alpha^2/8$, и отбросив слагаемые, не влияющие на уравнения движения, получим

$$\begin{aligned} H &= -\frac{e}{p_0} A_\xi \theta + \frac{1}{2} \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_\xi \right)^2 + \frac{p_z^2}{2} + \frac{1}{2} hx \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_\xi \right)^2 + hx \frac{p_z^2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_\xi \right)^4 + \frac{p_z^4}{8}. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Следующим шагом нужно раскрыть скобки в (17.11) и, учитывая, что длина волны бетатронных колебаний много больше, чем период змейки, усреднить получившиеся выражения по периоду. И, хотя реально необходимо усреднять вдоль орбиты пучка (по переменной s), с нужной нам точностью эту процедуру можно заменить на усреднение вдоль оси змейки (по переменной σ). Напомним, что

$$\frac{e}{p_0} A_\xi = \theta_m \cosh kz \sin k\sigma, \quad \theta = -\theta_m \sin k\sigma \quad \text{и} \quad h = B_w / B\rho \cdot \cos k\sigma = h_w \cos k\sigma,$$

и после усреднения ненулевыми окажутся слагаемые, содержащие

$$\overline{\cos^2 \alpha} = \overline{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\cos^4 \alpha} = \overline{\sin^4 \alpha} = \frac{3}{8}, \quad \overline{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{1}{8}.$$

Так что, в конечном итоге, получим гамильтониан, усредненный по периоду змейки, в виде

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{4}\theta_m^2 \cdot \cosh^2 kz = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{4}\theta_m^2 k^2 z^2 + \frac{1}{12}\theta_m^2 k^4 z^4, \quad (17.12)$$

где мы учли разложение (17.2) и отбросили малые члены $\sim p^4$.

Анализируя (17.12) можно понять, какое влияние оказывает планарная змейка с бесконечно широкими полюсами на динамику пучка. Во-первых, отметим, что слагаемое

$$\frac{1}{4}\theta_m^2 k^2 z^2 = \frac{1}{4}h_w^2 z^2$$

показывает, что змейка производит на пучок фокусирующее действие, но только в одной, вертикальной плоскости. Сравнение с (9.1.3) позволяет найти сдвиг вертикальной бетатронной частоты, к которому приводит змейка, как эффективная «одномерная» квадрупольная линза с фокусирующим коэффициентом ΔK_z :

$$\Delta \nu_z = \frac{1}{4\pi} \int_0^{L_w} \Delta K_z(s) \beta_z(s) ds = \frac{1}{8\pi} h_w^2 \cdot \bar{\beta}_z \cdot L_w,$$

где $\bar{\beta}_z$ среднее на длине змейки L_w значение вертикальной бетатронной функции.

Очевидно, что, кроме сдвига бетатронной частоты, дополнительная локальная фокусировка из-за змейки приводит к искажению вертикальной бетатронной функции и появлению параметрического резонанса $2\nu_z = n$, вызванного соответствующей гармоникой разложения возмущения в ряд Фурье. Все эти эффекты тем сильнее, чем меньше радиус поворота орбиты в змейке ($\sim h_w^2$), и чем больше вертикальная бетатронная функция в месте постановки змейки.

Нелинейная часть гамильтониана (17.12)

$$\varepsilon H_1 = \frac{1}{12} \theta_m^2 k^4 z^4 = \frac{1}{12} h_w^2 k^2 z^4 = \frac{1}{3} h_w^2 k^2 J_z^2 \beta_z^2 \cos^4 \varphi_z, \quad (17.13)$$

представляет собой одномерную (вертикальную) «псевдооктуполь» (смотри (7.3.1) и ниже). Усреднив полученное выражение по φ_z , и воспользовавшись выражениями, полученными в разделе 7.3, можно получить зависимости частоты от амплитуды в виде:

$$\Delta \nu_z = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial J_z} \int_0^{L_w} \langle H_1 \rangle_\varphi ds = \frac{1}{8\pi} h_w^2 k^2 \bar{\beta}_z^2 L_w J_z.$$

Получившийся эффект тем сильнее, чем меньше радиус кривизны поля змейки (больше поле), чем меньше период змейки ($k \sim 1/\lambda_w$) и чем больше значение вертикальной бетатронной функции в месте постановки змейки.

В заключение хотелось бы отметить, что рассмотренное приближение достаточно точно описывает реальную планарную змейку. Как правило, конструкция такого устройства обеспечивает хорошую однородность поля в поперечном направлении ($k_\xi \approx 0$), в то время как продольная вариация магнитного поля является неизбежной (период и амплитуда поля змейки определяются ее потребительскими свойствами) и преобладает как в линейных, так и в нелинейных эффектах, привносимых такой змейкой.

Глава 18. Моделирование нелинейной динамики в ускорителях

18.1 Программы моделирования

Математическое моделирование является одним из основных и, по-видимому, самым надежным и достоверным методом теоретического изучения нелинейной динамики частиц в циклическом ускорителе. Среди физиков-ускорительщиков существует мнение, что хорошо освоить предмет можно, только написав свою собственную программу моделирования. И хотя это скорее шутка, в ней есть доля правды. Поэтому в настоящее время имеется большое число различных компьютерных кодов, позволяющих по заданным начальным координатам частицы (или ансамбля частиц) получить массив координат, описывающий эволюцию системы во времени. Обработка массива дает возможность изучать топологию фазового пространства, область устойчивого движения частиц, зависимость частоты колебаний от амплитуды, изменение распределения пучка из-за стохастической диффузии, вызванной нелинейными резонансами, и т.д.

В идеальном случае моделирующая программа должна описывать движение пучка с учетом всех действующих сил и граничных условий. Реальное содержание программы зависит от поставленной задачи, возможностей и фантазии автора. Минимальный набор состоит из элементов линейной оптики и точечных (описываемых дельта-функцией) мультипольных магнитов, далее следуют более сложные типы описания нелинейного возмущения, которые нельзя представить точеч-

ными («тонкими») элементами, учет синхротронных колебаний, эффектов встречи, излучения и т.п.

Очевидно, что изучаемая модель отличается от реальной системы, содержит в себе определенные допущения и упрощения, и основной проблемой здесь является достижение компромисса между требуемой точностью описания движения частицы и временем счета программы. Такой компромисс достигается за счет вычленения основных возмущающих эффектов, определения свойств динамической системы, которые нужно исследовать, выбора алгоритмов счета и, в конечном итоге, программы моделирования в целом. Для электронов задача моделирования выглядит проще, чем для тяжелых частиц, поскольку сильное радиационное трение подавляет слабые нелинейные эффекты, и движение частиц для многих практических задач можно моделировать в течение одного-нескольких времен затухания. С другой стороны, реалистичное моделирование, например, эффектов встречи, когда нужно получить стационарное распределение частиц с учетом многих факторов, требует проследить движение десятков тысяч частиц в течение сотен тысяч оборотов и занимает часы и даже сутки процессорного времени современных компьютеров.

С точки зрения реализации, современные программы можно разделить на два класса: одни решают уравнения движения частицы для отдельных участков магнитной структуры, другие осуществляют преобразование начальных координат через оборот. Первый тип программ представляет собой обобщение известного способа представления магнитной структуры ускорителя в виде кусочно-постоянного приближения, что приводит к матричному формализму в случае ли-

нейных бетатронных колебаний. Второй тип основывается на развитом в последние годы методе построения канонических отображений в виде ряда по степеням координат частицы. Коэффициенты такого ряда отражают свойства всей магнитной структуры ускорителя целиком. Для получения таких однооборотных отображений используется техника преобразований Ли и другие методы.

Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Поэлементное моделирование просто в реализации, но требует больше процессорного времени. Пооборотные преобразования позволяют экономить время счета, однако получение самого преобразования является достаточно сложной задачей. При этом одна из основных сложностей заключается в требовании, которое предъявляется к любому методу моделирования, а именно, обеспечение симплектичности преобразования координат частицы во времени.

18.2 Симплектичность

Симплектичность отражает требование сохранения плотности фазовых траекторий при рассмотрении эволюции гамильтоновой системы под действием консервативных сил.

Введем $2n$ -мерный вектор обобщенных координат $X = \{q_1, p_1, \dots, q_n, p_n\}$ и матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ -1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18.2.1)$$

с помощью которой симплектичность преобразования M определяется как $M^T \cdot S \cdot M = S$.

С учетом (18.2.1) уравнения Гамильтона могут быть записаны в форме

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j S_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (18.2.2)$$

Рассмотрим якобиан, определяющий изменение обобщенных координат $X(t)$ при бесконечно малом приращении начальных условий X_0

$$J_{ik} = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_{0k}}. \quad (18.2.3)$$

Изменение якобиана во времени записывается как

$$\frac{dJ_{ik}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \sum_j S_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{0k}} \sum_j S_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_j}, \quad (18.2.4)$$

или

$$J = S \cdot H \cdot J \quad \text{где} \quad H_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}, \quad H^T = H, \quad (18.2.5)$$

Используя $S \cdot S = -1$ и $S^T = -S$, получим

$$\frac{d}{dt} (J^T \cdot S \cdot J) = J^T \cdot H^T \cdot S^T \cdot S \cdot J + J^T \cdot S \cdot S \cdot H \cdot J = J^T \cdot H^T \cdot J - J^T \cdot H \cdot J = 0,$$

или $J^T \cdot S \cdot J = \text{const}$, где константа, исходя из $J(t=0) = 1$ определяется как

$$J^T \cdot S \cdot J = S. \quad (18.2.6)$$

Выражение (18.2.6) утверждает, что преобразование обобщенных координат в рамках гамильтоновой динамики является симплектическим.

Полученный результат позволяет получить важное свойство для временной эволюции гамильтоновых систем. Если задана опорная фазовая траектория $X(t)$, то малое отклонение от нее записывается как

$$X + dX = X + J \cdot dX_0. \quad (18.2.7)$$

Теперь если рассмотреть два ортогональных вектора dX_1 и dX_2 , то элемент фазовой площади, определяемый этими векторами, равен

$$dw = dX_1^T \cdot S \cdot dX_2 = dX_{10}^T \cdot J^T \cdot S \cdot J \cdot dX_{20} = dX_{10}^T \cdot S \cdot dX_{20}. \quad (18.2.8)$$

А раз сохраняется сумма проекций ячейки фазового объема на любую двумерную фазовую поверхность (q_i, p_i) , то сохраняется и сам объем, что является выражением теоремы Лиувилля

$$\int dq_1 dp_1 \dots dq_n dp_n = \int \det(J) dq_{10} dp_{10} \dots dq_{n0} dp_{n0}, \quad \det(J) = 1. \quad (18.2.9)$$

Для математического моделирования теорема Лиувилля вносит существенное ограничение на возможность использования методов интегрирования уравнения движения: применяемые методы не должны нарушать симплектичности преобразования координат. Несимплектичность трекинга означает появление в результатах нефизических эффектов (типа затухания или раскачки колебаний), вносимых методом моделирования.

18.3 Интегрирование уравнений движения

Матричный формализм бетатронных колебаний позволяет представить участок структуры ускорителя между двумя нелинейными элементами с помощью одной матрицы. Уравнения движения частицы в нелинейном элементе приходится интегрировать численно. Существует большое число методов интегрирования нелинейных уравнений, однако, как правило, они несимплектичны, и приходится либо модифицировать старые методы, либо придумывать новые.

Простым, эффективным и часто используемым методом является представление протяженной (в продольном направлении) нелинейности набором точечных (дельта-функция) мультипольных элементов, разделенных матрицей пустого промежутка. Суть метода поясним на примере секступольной линзы силой $m(s)$ и длиной l , расположенной на азимуте s_0 . Гамильтониан такой линзы запишется как (6.2.3)

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{6}m(s)(x^3 - 3xz^2), \quad (18.3.1)$$

а уравнения Гамильтона

$$x' = p_x, \quad z' = p_z, \quad (18.3.2)$$

$$p'_x = -m(s)(x^2 - z^2)/2, \quad p'_z = m(s) \cdot xz.$$

Если принять $m(s) = m(s_0) \cdot l \cdot \delta(s - s_0)$, что справедливо, если длина волны бетатронных колебаний много больше длины линзы, то уравнения (18.3.2) могут быть проинтегрированы в пределах от $s_0 - \varepsilon$ до $s_0 + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$p_x = p_{x0} - \frac{1}{2}(x_0^2 - z_0^2)m(s_0)l \int_{\substack{s_0-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}}^{s_0+\varepsilon} \delta(s-s_0)ds = p_{x0} - \frac{1}{2}m(s_0)l(x_0^2 - z_0^2),$$

$$x = x_0 + p_{x0} \int_{\substack{s_0-\varepsilon \\ \varepsilon \rightarrow 0}}^{s_0+\varepsilon} ds = x_0,$$

и аналогично для вертикальной координаты. То есть, при пролете секступольной линзы, представленной в виде объекта с нулевой длиной (дельта-функция) и интегральной силой ml , поперечный импульс частицы скачком меняется, а координата остается неизменной:

$$\begin{aligned} x &= x_0, & z &= z_0, \\ (18.3.3) \end{aligned}$$

$$p_x = p_{x0} - \frac{1}{2}ml(x_0^2 - z_0^2), \quad p_z = p_{z0} + ml \cdot x_0 z_0.$$

Для проверки симплектичности метода запишем якобиан преобразования (18.2.3)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial p_{x0}} & \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial x}{\partial p_{z0}} \\ \frac{\partial p_x}{\partial x_0} & \frac{\partial p_x}{\partial p_{x0}} & \frac{\partial p_x}{\partial z_0} & \frac{\partial p_x}{\partial p_{z0}} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial p_{x0}} & \frac{\partial z}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial p_{z0}} \\ \frac{\partial p_z}{\partial x_0} & \frac{\partial p_z}{\partial p_{x0}} & \frac{\partial p_z}{\partial z_0} & \frac{\partial p_z}{\partial p_{z0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -ml \cdot x_0 & 1 & ml \cdot z_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ml \cdot z_0 & 0 & ml \cdot x_0 & 1 \end{pmatrix},$$

который, как легко убедиться, удовлетворяет условию симплектичности (18.2.6).

Понятно, что таким образом можно разбить на малые участки и проинтегрировать любой магнитный элемент.

Интегрирование автоматически получится симплектическим, если его выполнять с помощью канонического преобразования. А поскольку именно гамильтониан $H(\vec{q}, \vec{p})$ описывает временную эволюцию системы, то его разумно использовать для нахождения производящей функции преобразования. Если гамильтониан может быть записан в виде

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + V(\vec{q}), \quad (18.3.4)$$

и мы возьмем производящую функцию смешанных переменных

$$F(q, \bar{p}, \Delta t) = q \cdot \bar{p} + \Delta t H(q, \bar{p}),$$

то переход от координат (q_i, p_i) в момент времени t к координатам $(\bar{q}_i, \bar{p}_i)$ в момент времени $t + \Delta t$ осуществляется при помощи канонического преобразования

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \bar{p}_i + \Delta t \frac{\partial H(q, \bar{p})}{\partial q_i}, \quad (18.3.5)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_i} = q_i + \Delta t \frac{\partial H(q, \bar{p})}{\partial \bar{p}_i}.$$

Если получившиеся уравнения разрешимы в виде $\bar{q}_i(q_i, p_i)$ и $\bar{p}_i(q_i, p_i)$, значит, мы нашли каноническое (и, следовательно, симплектическое) преобразование начальных координат в конечные в явном виде, т.е., проинтегрировали уравнения движения на шаге Δt . Этот метод интегрирования называется методом Верле.

Возьмем гамильтониан (6.2.1)

$$H = -(1 + hx) \frac{e}{p_0} A_s - \left(1 + hx - \frac{1}{2} p_x^2 - \frac{1}{2} p_z^2 \right), \quad (18.3.6)$$

который перепишем в виде (18.3.1)

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} - \left(1 + hx\right) \left(1 + \frac{e}{p_0} A_s(x, z)\right) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} + V(x, z). \quad (18.3.7)$$

Применив (18.3.2) к (18.3.4), получим

$$\bar{p}_x = p_x - \Delta s \cdot V'_x(x, z), \quad \bar{p}_z = p_z - \Delta s \cdot V'_z(x, z), \quad (18.3.8)$$

$$\bar{x} = x + \Delta s \cdot (p_x - \Delta s \cdot V'_x(x, z)), \quad \bar{z} = z + \Delta s \cdot (p_z - \Delta s \cdot V'_z(x, z)),$$

где $V'_x = \partial V(x, z) / \partial x$ и аналогично для z . Поскольку в правой части (18.3.5) стоят функции исходных координат, мы нашли явное преобразование от исходных переменных к конечным через шаг Δs .

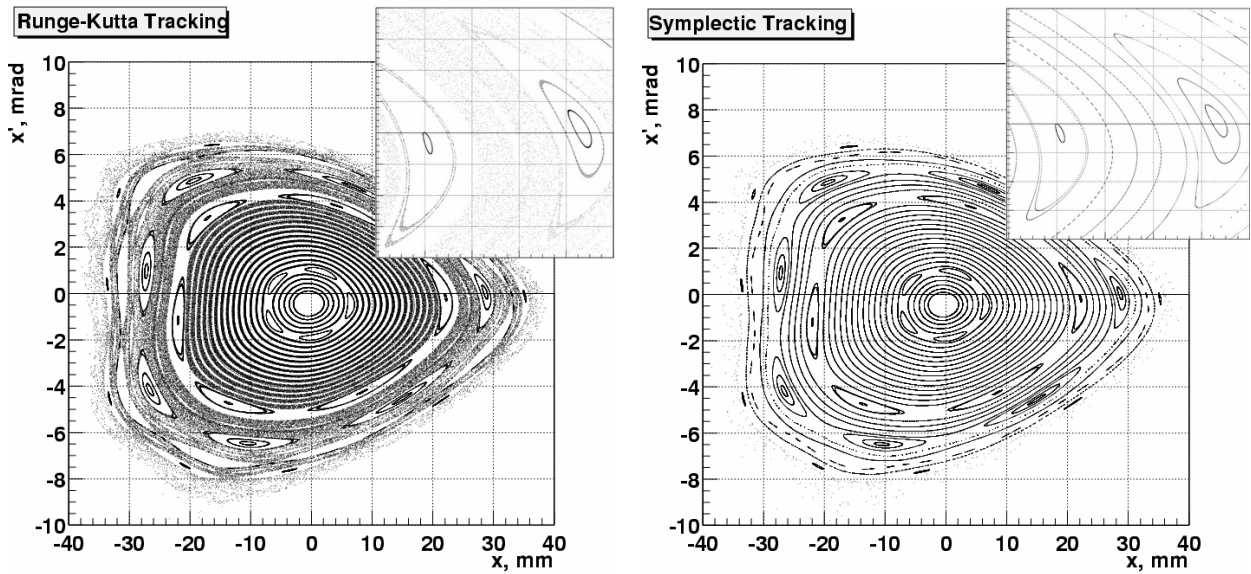


Рис.18.3.1 Фазовые траектории. Слева - интегрирование методом Рунге-Кутта, справа – каноническим интегратором.

Пример использования канонического интегратора в сравнении с алгоритмом Рунге-Кутта 4-го порядка (с одинаковым шагом интегрирования) показан на рис.18.3.1. Регулярные кривые, отчетливо видимые при интегрировании каноническим методом, превращаются для схемы Рунге-Кутта в размытые слои,

которые на больших амплитудах создают ложное впечатление наличия сильной стохастической компоненты. На самом же деле это проявление несимплектичности метода Рунге-Кутты.

18.4 Примеры моделирования нелинейных явлений в циклических ускорителях

Приведем примеры моделирования различных аспектов нелинейной динамики частиц, рассмотренных ранее теоретически.

Фазовые траектории для секступольного возмущения, вплоть до границы устойчивости, показаны на рис.18.4.1. На горизонтальной плоскости хорошо видны регулярные кривые и резонанс $5\nu_x = n$, который, как мы уже знаем, появляется в третьем порядке по параметру малости возмущения (табл. 14.3.1). Вертикальные фазовые кривые демонстрируют как будто бы стохастическое движение. На самом деле вертикальное движение вполне регулярное, проблемы возникают с возможностью отображением четырехмерного связанного движения двумя двумерными картинками.

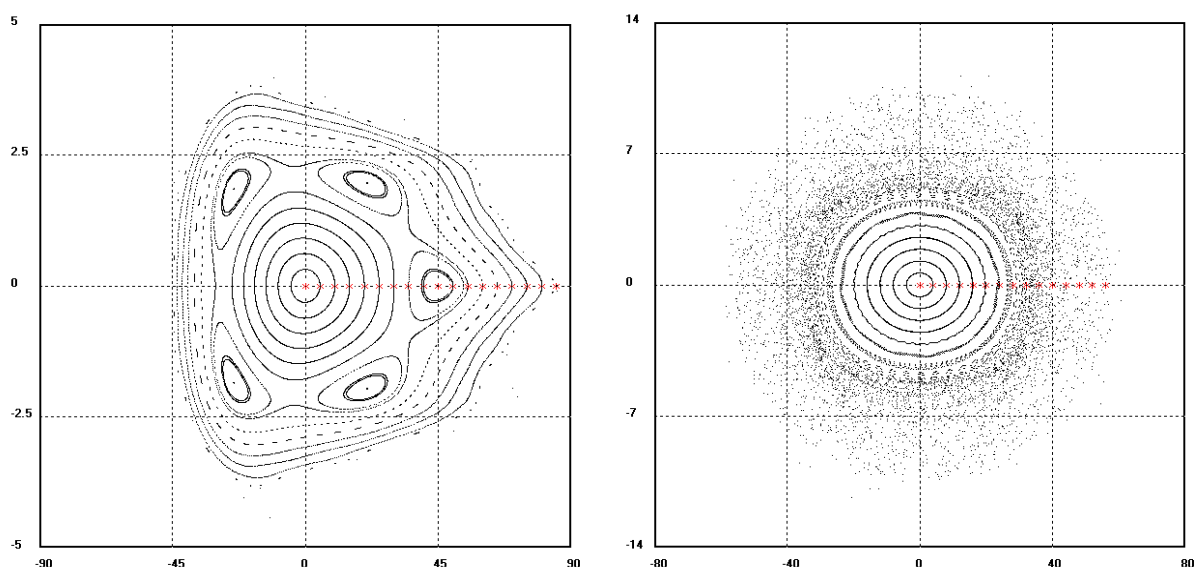


Рис.18.4.1 Горизонтальные (слева) и вертикальные (справа) фазовые траектории.

Для пояснения рассмотрим, как были получены траектории на рис.18.4.1.

Для обеих плоскостей начальные значения импульсов равны нулю: $p_z(0) = 0$ и $p_x(0) = 0$. Начальное значение соответствующей координаты возрастает с некоторым шагом (звездочки на горизонтальной оси), при этом вторая координата равна нулю.

Согласно (18.3.3), если мы рассматриваем горизонтальное движение и $z_0 = 0$, то для любого оборота n $z(n) = 0$. Для вертикального движения это не так: $z_0 \neq 0$ приводит для уравнения

$$p_x = p_{x0} - \frac{1}{2}ml(x_0^2 - z_0^2)$$

к появлению ненулевого горизонтального импульса, а следовательно, ненулевой горизонтальной координаты, и к двумерному связанному движению. Вертикальные колебания оказываются модулированными горизонтальными, что приводит к «замазанной», похожей на стохастическую, картине вертикального фазового движения.

Истинные вертикальные траектории можно получить, применяя правила сечения Пуанкаре (Глава 5.2), при этом более удобно пользоваться обозначениями действие-фаза. Для рассматриваемого четырехмерного случая фазовые траектории лежат на поверхностях $J_x(J_z, \varphi_x, \varphi_z)$ и $J_z(J_x, \varphi_x, \varphi_z)$, а их проекция на двумерную плоскость возможна при фиксации остальных переменных:

$J_z(\varphi_z) = J_z(\varphi_z, J_x = const, \varphi_x = const)$. Если этого не сделать, то плоская проекция трехмерной фазовой поверхности оказывается модулированной движением по другой переменной, что приводит к правому графику рис.18.4.1.

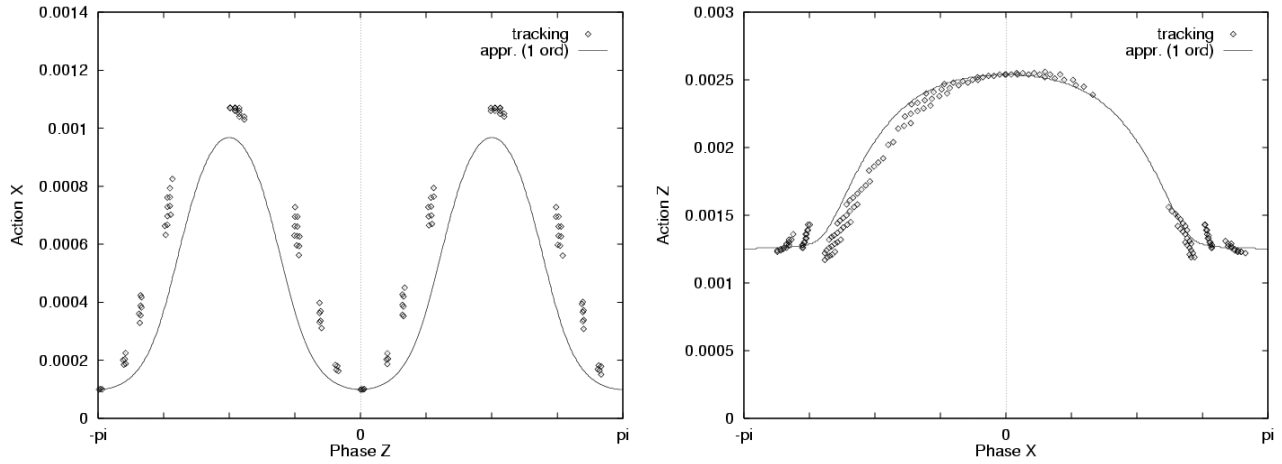


Рис.18.4.2 Сечение Пуанкаре фазовой поверхности. Моделирование (точки) и расчет (кривая) с помощью теории возмущения.

Более строгая картина сечения Пуанкаре, которая показана на рис.18.4.2, была получена путем отбора из массива значений $J_x(\varphi_x \approx const, \varphi_z)$ и $J_z(\varphi_x, \varphi_z \approx const)$. Знак приблизительного равенства означает, что фиксировался малый интервал $\Delta\varphi \sim 10^{-3}$, при попадании в который и отбирались значения остальных переменных. При точной фиксации φ , для конечных точности и времени счета, таких значений может не оказаться вовсе. Малый (но не нулевой) интервал $\Delta\varphi$ приводит к тому, что изображающих точек немного, но некоторая «размытость» (модуляция) фазовых траекторий все-таки наблюдается.

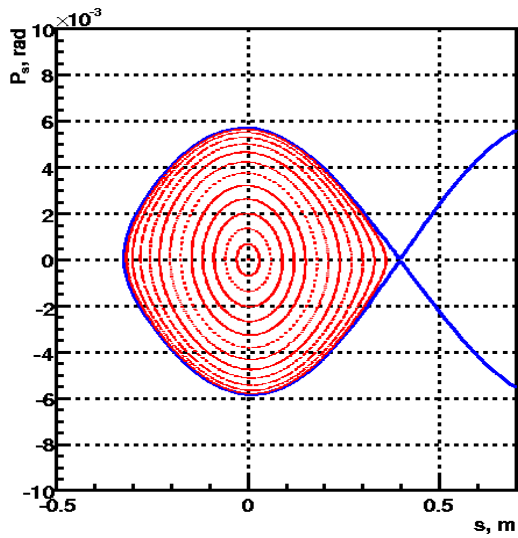
Движение пучка с учетом синхробетатронной связи является шестимерным с переменными

$$\left(x, p_x, z, p_z, \sigma(s) = s - c \cdot t(s), \delta = \frac{E - E_0}{E_0} \right).$$

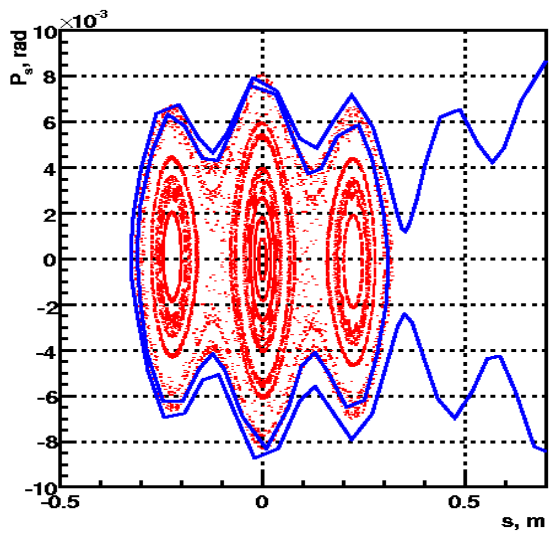
Продольная координата $\sigma(s)$ показывает смещение рассматриваемой частицы относительно равновесной вдоль орбиты и находится с помощью уравнения

$$\sigma' = d\sigma / ds = 1 - \left[(1 + h(s)x)^2 + x'^2 + y'^2 \right]^{1/2},$$

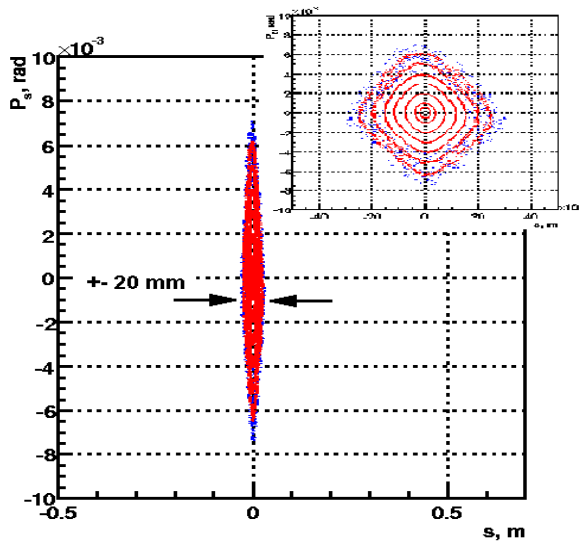
которое, для убыстрения счета, может быть заранее решено для различных магнитных элементов.



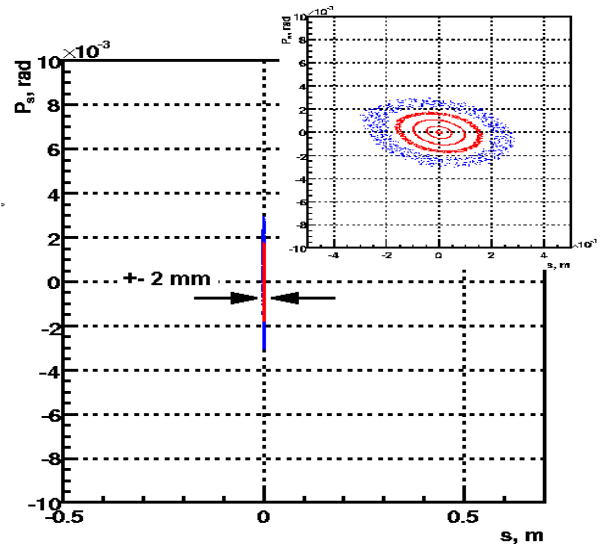
$U_{RF} = 0 \text{ MV}$



$U_{RF} = 1 \text{ MV}$



$U_{RF} = 5 \text{ MV}$



$U_{RF} = 10 \text{ MV}$

Рис.18.4.3 Продольная динамика пучка для разного напряжения на ускоряющем резонаторе $U_{RF} = 0 \div 10$ MV.

Результаты моделирования продольного движения показаны на рис.18.4.3. В рассматриваемом случае имеется два резонатора: основной, с частотой 430 МГц, и резонатор третьей гармоники с частотой 1300 МГц. Напряжение частоты 1300 МГц увеличивается от 0 до 10 МВ. При нулевом напряжении продольное движение определяется основным резонатором. При $U_{RF} = 1$ MV искажение потенциальной ямы приводит к тому, что пучок существует в трех соседних сепаратрисах. При дальнейшем увеличении напряжения третьей гармоники только она определяет синхротронное движение. Масштаб продольной координаты намеренно не меняется, и хорошо видно, как уменьшается размер сепаратрисы и длина пучка.

Зависимость частоты от амплитуды, которая в низшем порядке теории возмущений равна

$$\nu_x(a_x, a_z) = \nu_{x0} + C_{xx}a_x^2 + C_{xz}a_z^2, \quad \nu_z(a_x, a_z) = \nu_{z0} + C_{zx}a_x^2 + C_{zz}a_z^2, \quad (18.4.1)$$

показана на рис.18.4.4. На каждом из четырех графиков приведены коэффициенты фитирования результатов моделирования кривой

$$\nu(a) = p_0 + p_1 \cdot a^2 + p_2 \cdot a^4,$$

и, как несложно видеть, коэффициент p_2 , отнюдь не равен нулю.

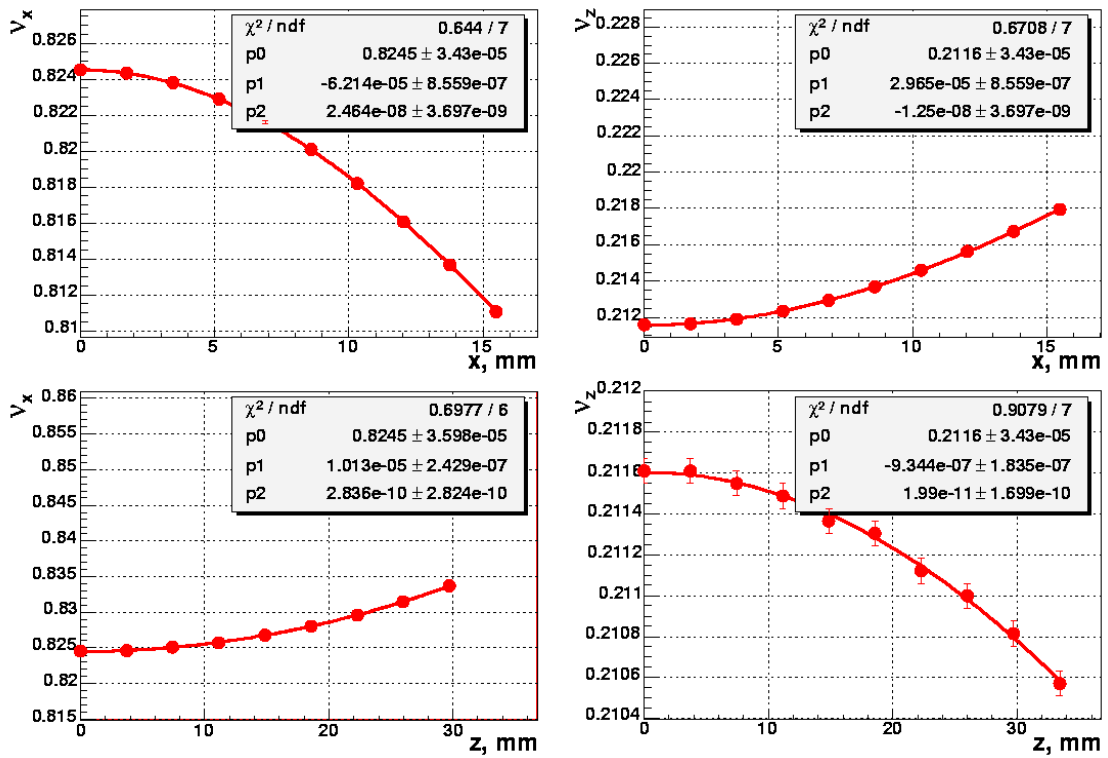


Рис.18.4.4 Зависимость частоты от амплитуды для секступольного возмущения.

Динамическая апертура при моделировании чаще всего определяется как набор таких начальных значений $z_{0i}(x_{0i})$, для которых движение устойчиво в течение заданного числа оборотов, которое зависит от условий моделирования. Для релятивистских электронов или позитронов из-за сильного радиационного затухания число оборотов невелико (несколько тысяч). Для тяжелых частиц, где нужно учитывать тонкие стохастические эффекты, оно может быть существенно больше. Как правило, $p_{x0i} = p_{z0i} = 0$. Импульс частицы может быть как равновесным ($\Delta p / p_0 = 0$), так и неравновесным ($\Delta p / p_0 \neq 0$).

Конечно, приведенное выше определение не идеально (правильнее было бы говорить о динамическом акцептансе, однако определить его непросто из-за сложной конфигурации нелинейного фазового пространства), но оно распространено и

позволяет быстро сравнивать различные программы, ускорители и типы возмущения. Пример такой апертury приведен на рис.18.4.6.

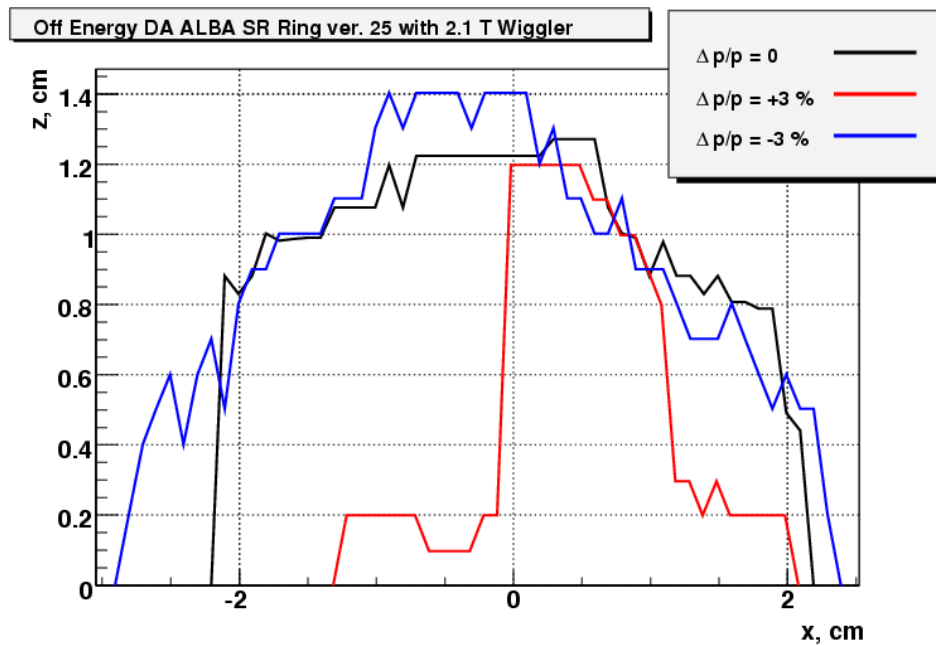


Рис.18.4.6 Двумерная динамическая апертюра для частицы с равновесной и отклоненной энергией.

Иногда представляется интересным и важным более подробно рассмотреть границу динамической апертюры. Это можно сделать с помощью т.н. диаграммы выживаемости частиц с высоким разрешением.

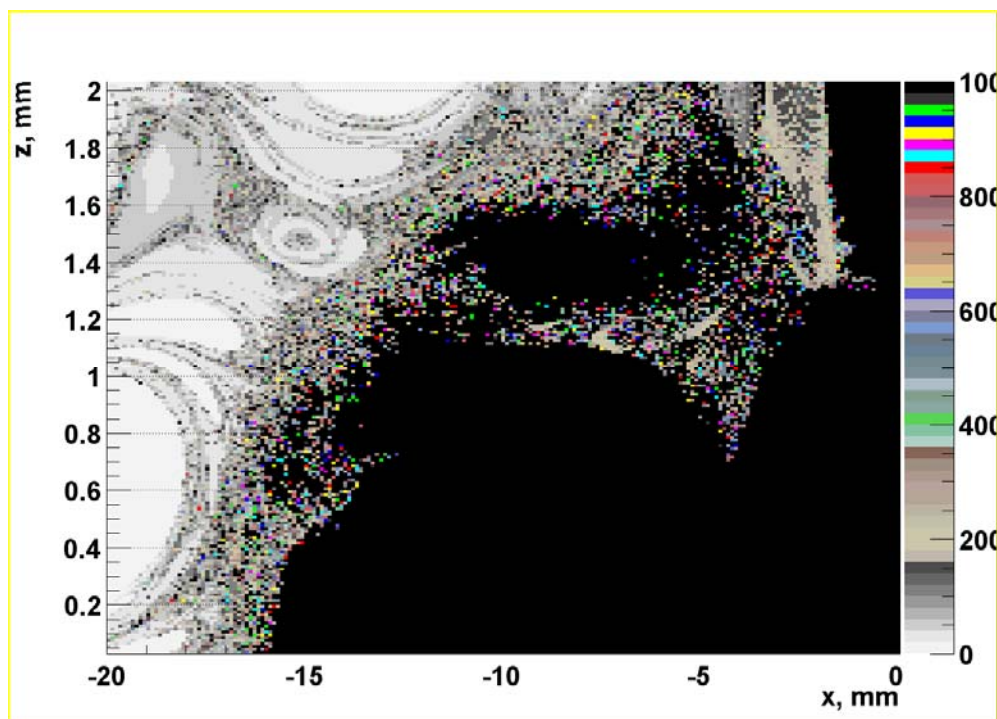


Рис.18.4.7 Граница динамической апертуры с высоким разрешением.

Пример такой диаграммы приведен на рис.18.4.7, где черный цвет обозначает частицы, пролетевшие 1000 оборотов (устойчивые), белый – 0 оборотов (неустойчивые), а остальные цвета – промежуточные случаи. Видно, что при высоком координатном разрешении граница области устойчивости (изображенная на рис.18.4.6 ломаной линией) имеет весьма сложную структуру, она окружена стохастическими слоями и регулярными образованиями – линиями резонансов высоких порядков.

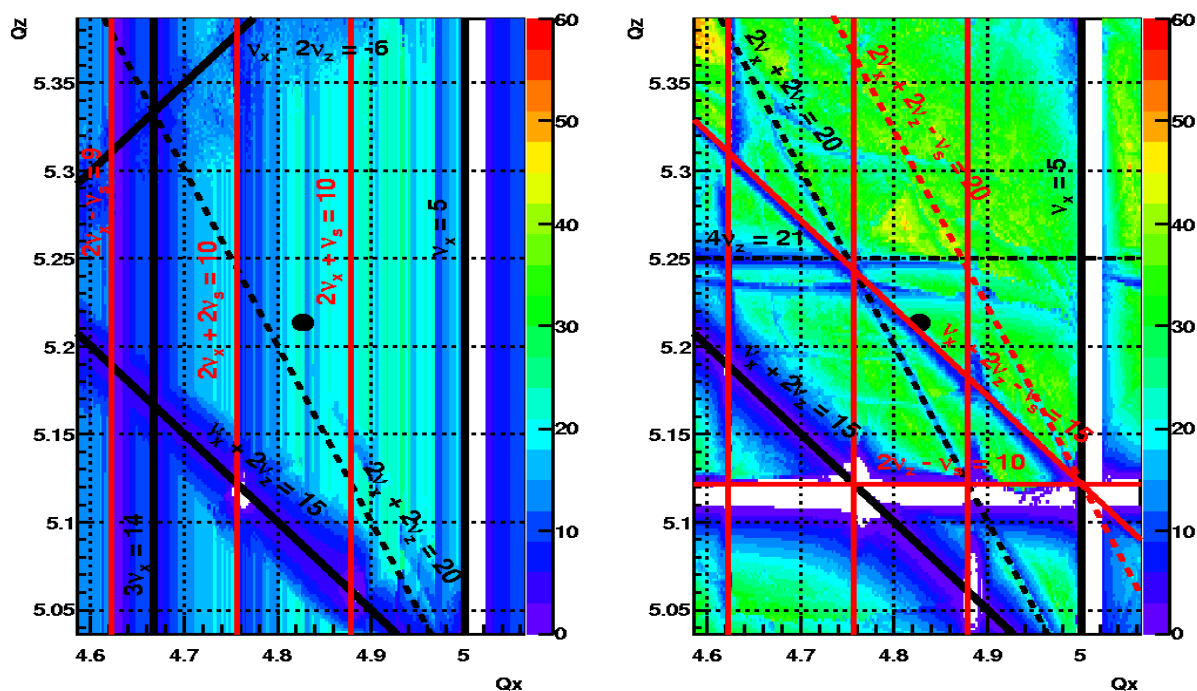


Рис.18.4.8 Горизонтальная (слева) и вертикальная (справа) динамическая апертура как функции бетатронных частот для частицы с $\Delta p / p_0 = 0.25\%$. Черные и красные линии обозначают бетатронные и синхробетатронные резонансы. Цвет показывает апертуру в миллиметрах.

Пример зависимости апертуры от бетатронных частот показан на рис.18.4.8 для нулевого и ненулевого отклонения по импульсу. Отчетливо видны секступольные резонансы первого порядка малости $\nu_x = 5$, $3\nu_x = 14$ и $\nu_x + 2\nu_z = 15$. Просматривается вертикальный резонанс второго порядка малости $4\nu_z = 21$. Видны синхробетатронные сателлиты $2\nu_z - \nu_s = 10$, $2\nu_x - \nu_s = 9$, $2\nu_x + 2\nu_s = 10$ и другие. Движение вблизи резонансов $\nu_x = 5$ и $2\nu_z - \nu_s = 10$ является неустойчивым и обозначается белым цветом.

Моделированием, как правило, решается вопрос об уменьшении динамической апертуры из-за неизбежных погрешностей поля магнитов и линз ускорителя. Величину погрешностей принято задавать в виде отношения поля ошибки $\Delta B_n(R)$ к полю основного мультиполя $B_k(R)$ на некотором расстоянии от оси пучка R : $b_n(R) = \Delta B_n(R) / B_k(R)$ (см. раздел 4.3).

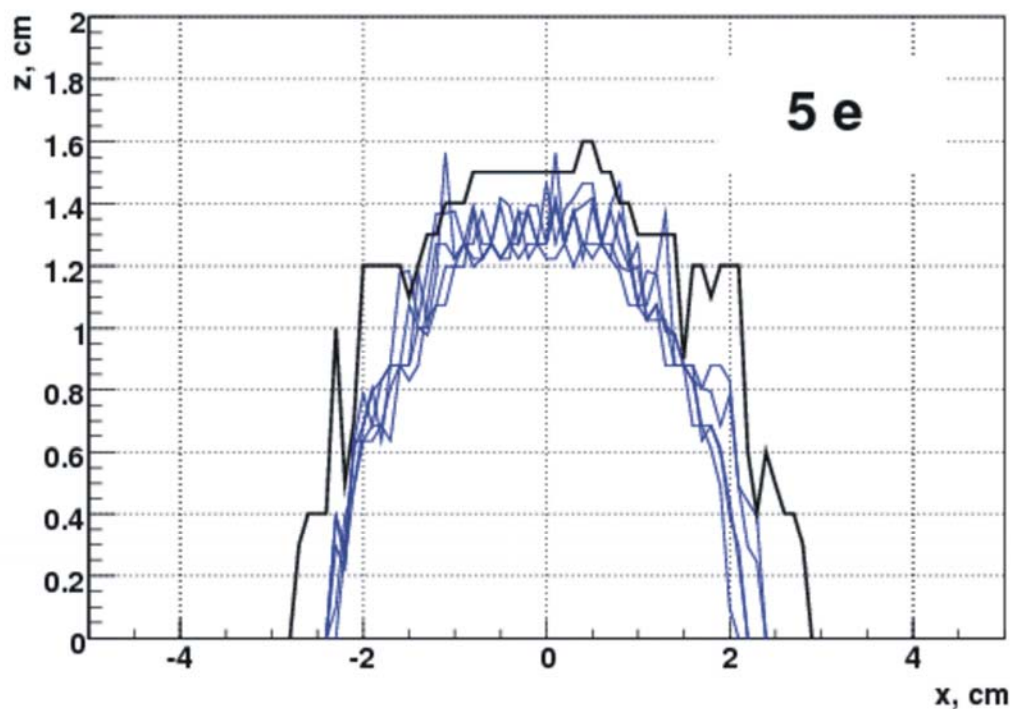


Рис.18.4.9 Уменьшение динамической апертуры из-за мультипольных ошибок в магнитах ускорителя. Идеальная апертура показана толстой черной линией.

Поскольку конкретная последовательность ошибок в магнитных элементах на стадии проектирования неизвестна, их влияние изучается статистическим образом. Погрешности распределяются в магнитах случайным образом по нормальному закону с ограничением на уровне $2 \div 3\sigma$, чтобы избежать неоправданно

больших значений, и производится серия вычислений апертуры. По величине уменьшения апертуры делается вывод о допустимости данного уровня ошибок.

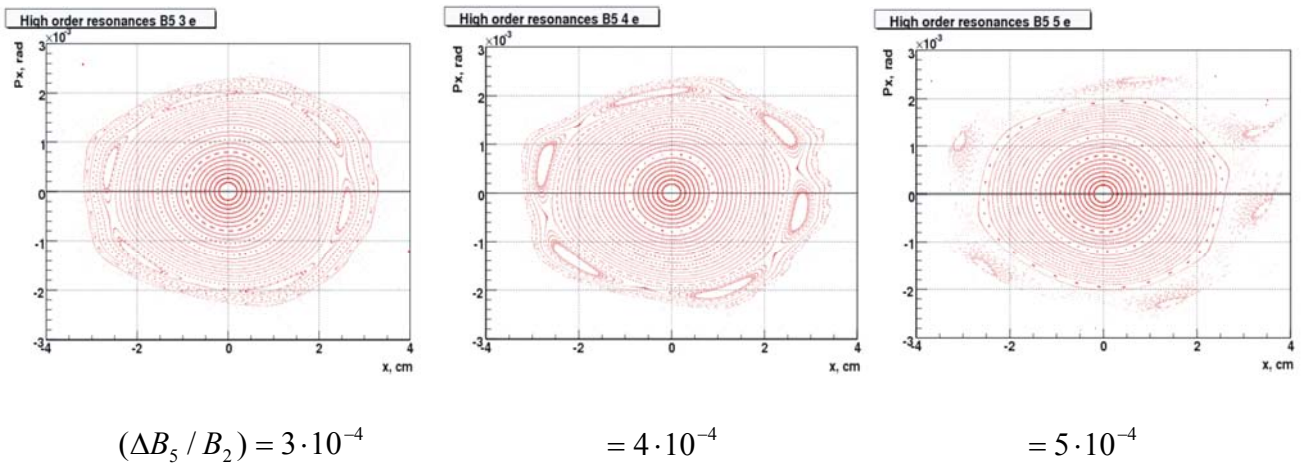


Рис.18.4.10 Декапольная ошибка вызывает появление резонанса 6-го порядка.

Пример моделирования апертуры для нескольких случайных распределений декапольной ошибки $b_5 = \sigma = 5 \cdot 10^{-4}$ в квадрупольных линзах ускорителя приведен на рис.18.4.9. Видно, что для рассматриваемого случая апертура уменьшается примерно на 20%. Изучение фазовых траекторий позволяет сделать вывод о механизме уменьшения апертуры из-за малых погрешностей поля. Как следует из рис.18.4.10, ошибки порождают резонансы высоких порядков, ширина которых, при увеличении величины ошибки, растет вплоть до перекрытия с соседними резонансами. При $\Delta B_5 / B_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ наблюдаемый резонанс 6-го порядка разрушается, и апертура уменьшается приблизительно на ширину сепаратрисы этого резонанса (в рассматриваемом примере с ~ 30 мм до ~ 25 мм).

Может возникнуть вопрос: почему декапольная ошибка ($\sim x^5$) вызывает появление резонанса шестого порядка? Подробный ответ на него был уже дан в Главе 14, тем не менее, кратко напомним, что в переменных «действие-фаза»

$$x^5 \sim \cos^5 \phi_x = \frac{1}{16} (\cos 5\phi_x + 5 \cos 3\phi_x + 10 \cos \phi_x),$$

и декапольная ошибка в первом порядке приближения возбуждает резонансы $5\nu_x = n$, $3\nu_x = n$ и $\nu_x = n$. Во втором порядке приближения появятся резонансы, являющиеся комбинацией гармоник решения первого порядка, в том числе $(5+1)\nu_x = 6\nu_x = n$.

Литература

1. В.В.Сажаев, Динамическая апертура ускорителей с высоким хроматизмом: теория и эксперимент, Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1997.
2. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004 г.

Глава 19. Экспериментальное исследование нелинейных явлений в ускорителях

19.1 Эксперименты по изучению нелинейной динамики

По-видимому, первые систематические эксперименты по изучению нелинейной динамики частиц в циклическом ускорителе были проведены в ИЯФ СО РАН на накопителе ВЭП-1 [1]. В этих экспериментах изучалось поведение пучка вблизи различных резонансов, как возбуждаемых внешним генератором, так и возникающих из-за нелинейного магнитного поля. Исследовались параметры изолированного резонанса, совместное действие резонансов и возникновение стохастических слоев, динамическая апертура и т.п.

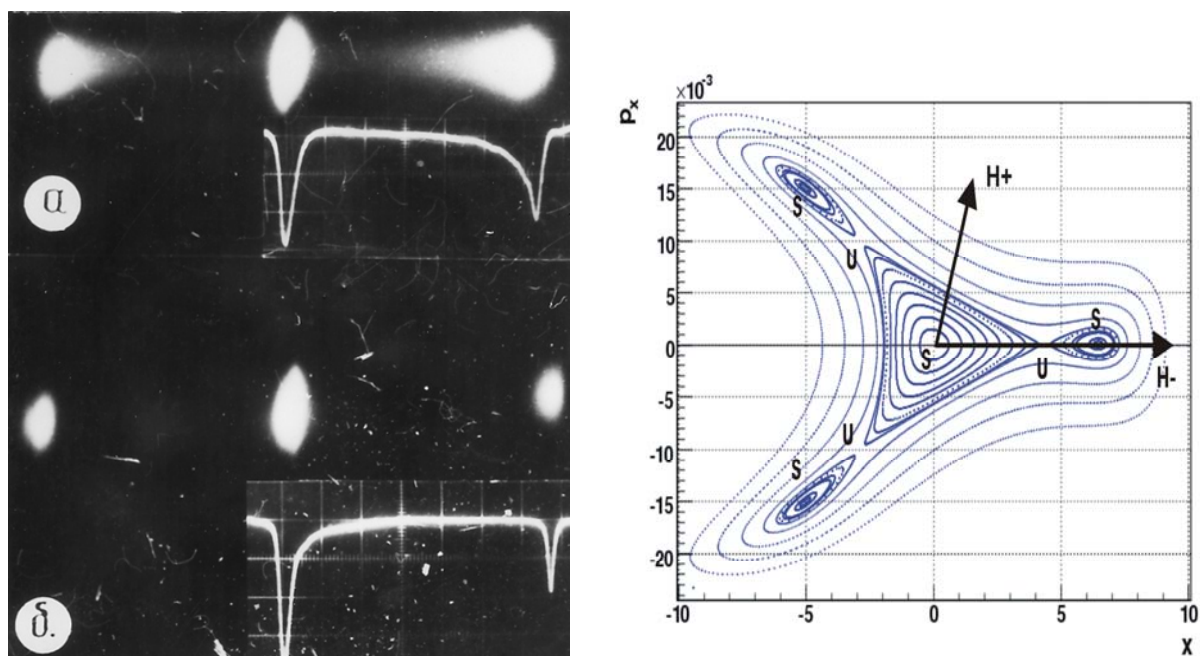


Рис.19.1.1 Слева – изображение электронного пучка в ВЭП-1 на двух резонансах ((a) и (б)). Пятно в центре – пучок в основной области устойчивости, пятна слева и справа – часть пучка во вторичных областях устойчивости. Осциллограммы по-

казывают распределение плотности пучка. Для примера на правом графике показаны фазовые траектории резонанса третьего порядка с основной и вторичными областями устойчивости.

Наблюдение велось оптическими методами (рис.19.1.1). Видимая часть спектра синхротронного излучения позволяет с помощью телекамеры получить изображение пучка и измерить его параметры. Распределение плотности частиц в поперечном и продольном направлениях изучалось с помощью специального прибора – диссектора.

Далее исследование нелинейной динамики проводилось на многих ускорителях и накопителях.

Наиболее типичная схема эксперимента включает быстрое возбуждение когерентных колебаний пучка специальными магнитами или электродами и регистрацию положения центра тяжести пучка в течение некоторого числа (несколько тысяч) оборотов с помощью датчиков положения. Данная методика весьма похожа на численное моделирование и позволяет изучать динамическую апертуру, зависимость частоты от амплитуды, фазовое движение, нелинейные резонансы и т.д.

Существуют и другие подходы к исследованию свойств пучка частиц в ускорителе, например, измерение поперечного распределения пучка под воздействием нелинейного возмущения сканирующей проволочкой [2] или изучение скорости потерь частиц из «хвостов» функции распределения с помощью регулируемого ограничителя поперечной апертуры (скрепера) [3].

Отдельно хотелось бы упомянуть о методике изучения области устойчивого движения по измерению времени жизни пучка. В работе, проведенной на источнике синхротронного излучения BESSY-I [4], время жизни частиц определялось как функция положения скрепера,двигаемого внутрь вакуумной камеры. Исследования, проведенные на установке со встречными пучками ВЭПП-2М, основывались на измерении тушековского времени жизни пучка в зависимости от амплитуды напряжения ВЧ резонатора [5, 6]. В обоих случаях динамическая апертура обосновывалась и определялась как величина такого ограничения, при которой происходит качественное изменение поведения зависимости времени жизни.

Не имея намерения делать обзор методов и результатов измерения нелинейных явлений в ускорителях всего мира, рассмотрим, в качестве примера, эксперименты, проводившиеся в ИЯФ СО РАН на накопителе электронов и позитронов ВЭПП-4М [7, 8].

Измерения велись, в основном, с помощью возбуждения когерентных колебаний пучка по вертикали и горизонтали и измерения положения его центра тяжести на каждом обороте с помощью датчика положения пучка [9]. Некоторые параметры ВЭПП-4М приведены в таблице 19.1.1.

Таблица 19.1.1 Параметры ВЭПП-4М на энергии проведения экспериментов.

Энергия, E	1.8 ГэВ
Периметр, C	366.074 м
Бетатронные частоты: ν_x/ν_z	8.56/7.60

Хроматизм, ξ_x / ξ_z	-12.86
Горизонтальный эмиттанс, ε_x	$2.1 \cdot 10^{-8}$ м·рад
Времена затухания, $\tau_z / \tau_x / \tau_s$	145/151/77 мс

В ВЭПП-4М имеется возможность вводить управляемым образом секступольную и октупольную нелинейности.

19.2 Измерение фазовых траекторий

Для измерения фазовых траекторий используются два пикапа, отстоящие по бетатронной фазе на величину, приблизительно равную четверти длины волны колебания. При этом показания координаты на втором пикапе интерпретируются как угол наклона траектории частицы на первом пикапе, позволяя восстановить фазовое движение в месте размещения первого пикапа.

Для пояснения сути метода рассмотрим горизонтальные бетатронные колебания

$$x(s) = a\beta_x^{1/2}(s) \cos \psi_x(s), \quad (19.2.1)$$

$$x'(s) = -a / \beta_x^{1/2}(s) [\alpha_x(s) \cos \psi_x(s) + \sin \psi_x(s)],$$

где $\alpha_x = -1/2\beta'_x(s)$, а $\beta_x(s)$ и $\psi_x(s)$ – амплитудная и фазовая функции бетатронных колебаний. На азимуте пикапа бетатронная фаза через n оборотов меняется на $2\pi n \nu_x$ (считаем, что начальная фаза равна нулю), поэтому значения координаты и угла равны

$$x(n) = a\beta_x^{1/2} \cos 2\pi n \nu_x, \quad (19.2.2)$$

$$x'(n) = -a / \beta_x^{1/2} [\alpha_x \cos 2\pi n \nu_x + \sin 2\pi n \nu_x].$$

Учитывая, что $\sin A = \cos(\pi/2 - A)$, последнее выражение переписывается в виде

$$x'(n) = [x_{\pi/2}(n) - \alpha_x x(n)] / \beta_x, \quad (19.2.3)$$

где $x_{\pi/2}(n)$ – координата, которую измерил бы второй пикап, расположенный в месте с теми же α_x и β_x , что и у первого пикапа, но отстоящий от него по бетатронной фазе на $\pi/2$. Реально α_x , β_x и ψ_x для второго пикапа измеряют (или берут расчетные), и они участвуют в процедуре восстановления фазовых траекторий.

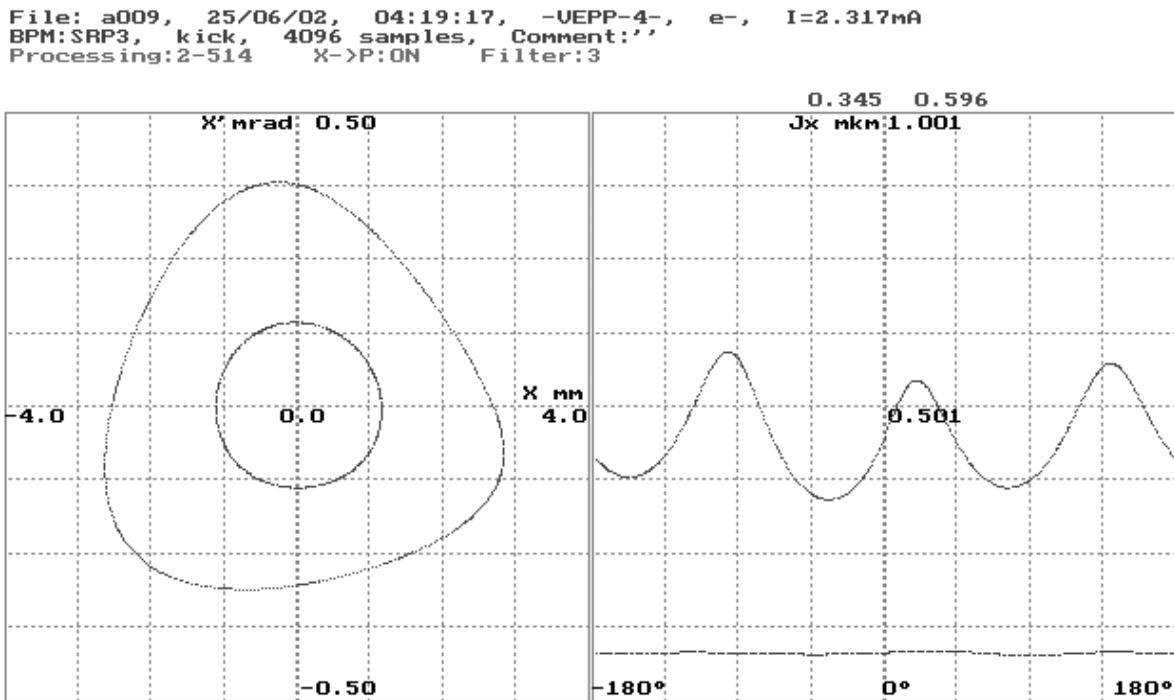


Рис.19.2.1 Фазовое движение для $\nu_x = 8.6472$ в переменных (x, x') и (φ, J) .

На рис.19.2.1 показаны измеренные фазовые траектории для двух амплитуд удара по пучку вблизи резонанса третьего порядка (бетатронная частота $\nu_x = 8.6472 \approx 26/3$). Хорошо видно, что для слабого удара (возмущение мало) фазовая траектория близка к окружности, в то время как для сильного удара она имеет характерную треугольную форму.

Измерения позволяют определить силу возбуждающей резонанс гармоники. Гамильтониан вблизи резонанса третьего порядка имеет вид (14.3.1):

$$H_1 \approx (2J_x)^{3/2} A_{3n} \cos(3\varphi_x - n\theta), \quad (19.2.4)$$

где A_{3n} – азимутальная гармоника возмущения. Уравнение фазовой кривой (14.3.11) в том же приближении записывается в виде

$$\bar{J}_x \approx J_x + a_{3n} J_x^{3/2} \cos 3\varphi_x, \quad a_{3n} = 3\sqrt{8} \frac{A_{3n}}{3\nu_x - n}. \quad (19.2.5)$$

С помощью (5.4.1.5) можно из экспериментальной кривой $J_x(\varphi_x)$ оценить резонансную гармонику как

$$a_{3n} \approx \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max}^{3/2} + J_{\min}^{3/2}} \approx \frac{\Delta J}{2J_{av}^{3/2}}. \quad (19.2.6)$$

Частота бетатронных колебаний обычно хорошо известна из других измерений.

На рис. 19.2.2 показаны инвариантные кривые вблизи резонанса $4\nu_x = 35$.

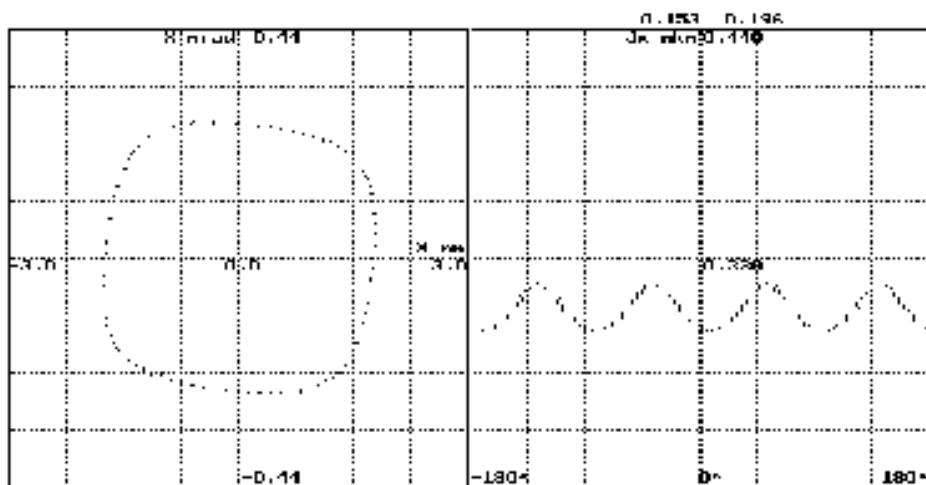


Рис 19.2.2 Измеренные фазовые траектории вблизи $4\nu_x = 35$.

Точной настройкой частоты бетатронных колебаний можно получить движение внутри сепаратрисы рассматриваемого резонанса (рис.19.2.3).

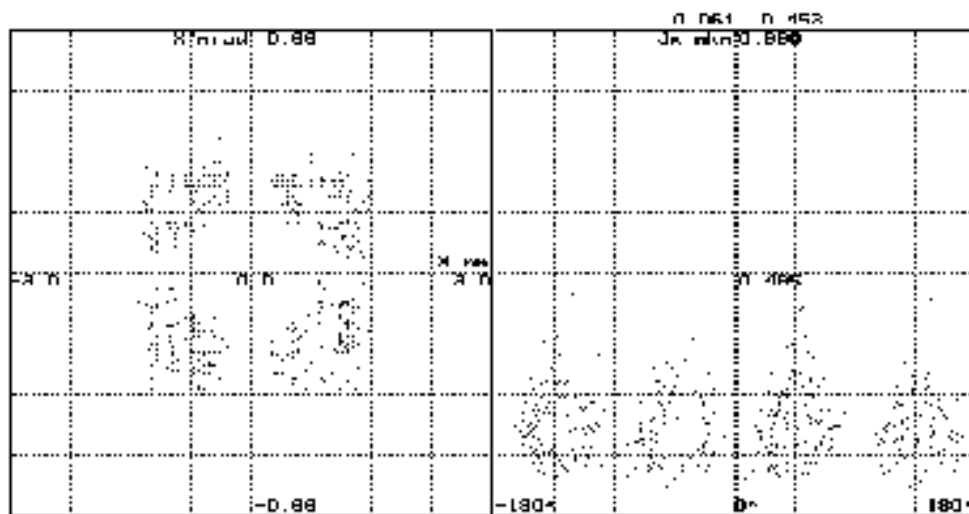


Рис.19.2.3 Фазовые кривые внутри островка резонанса $4\nu_x = 35$.

Резонансы высоких порядков также могут наблюдаться с использованием метода быстрого возбуждения когерентных колебаний. Проблема, которая здесь

возникает – недостаточное разрешение измерительной системы, чтобы проследить движение пучка внутри сепаратрис малого размера.

19.3 Измерение нелинейного сдвига частоты

Нелинейность бетатронных колебаний частиц также изучалась при помощи импульсного возбуждения когерентных колебаний пучка и их регистрации по-оборотно датчиком положения пучка. Для различных значений силы удара частота бетатронных колебаний вычислялась при помощи Фурье анализа по массиву 1024 значения координат. Точность измерения бетатронной частоты на уровне $\delta\nu \sim 2 \cdot 10^{-4}$.

Зависимость частоты от амплитуды в низшем порядке одинакова для любого вида нелинейного возмущения:

$$\Delta\nu_x = C_{xx}a_x^2 + C_{xz}a_z^2, \quad \Delta\nu_z = C_{zx}a_x^2 + C_{zz}a_z^2, \quad (19.3.1)$$

а конкретный вид коэффициентов для разных случаев приводился ранее (выражения (7.3.6-7) для октупольного возмущения и (14.3.9) – для секступольного).

И действительно, результаты измерений, приведенные на рис.19.3.1, показывают линейную зависимость частоты от квадрата амплитуды удара. Обработка измерений позволяет найти соответствующие коэффициенты (19.3.1).

Как мы видели, для октупольного возмущения эти коэффициенты не зависят от бетатронной частоты, а для секступольного – зависят резонансным образом. Этот факт позволяет разделить вклад в нелинейный сдвиг частоты от двух

типов возмущения. На рис.19.3.2 показано измерение коэффициента C_{xx} вблизи горизонтального резонанса третьего порядка. Хорошо видно резонансное поведение, а также наличие постоянного положительного смещения, объясняемого наличием октупольной составляющей.

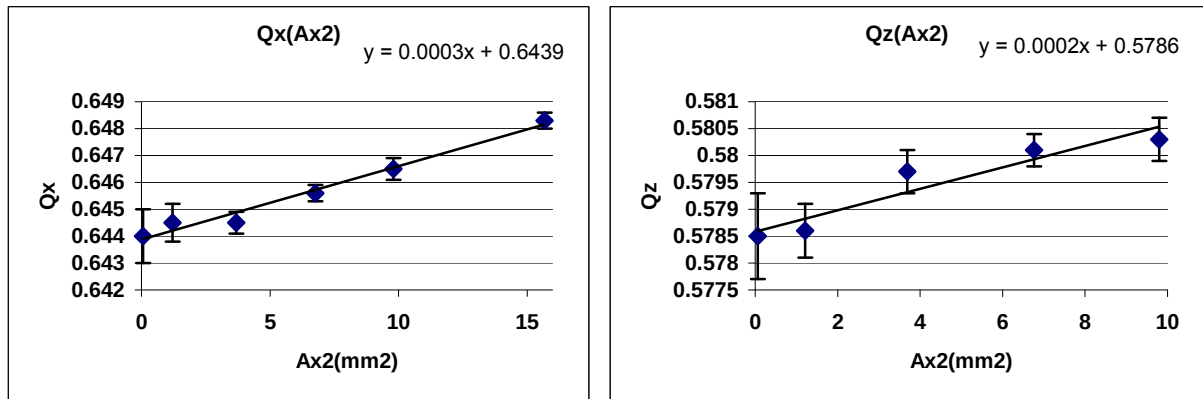


Рис.19.3.1 Зависимость горизонтальной (слева) и вертикальной (справа) частоты бетатронных колебаний от квадрата амплитуды горизонтального смещения пучка.

Используя выражение (14.3.9) для секступольной нелинейности

$$C_{xx} = -\frac{18}{\beta_{xp}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3A_{1n}^2}{\nu_x - n} + \frac{A_{3n}^2}{3\nu_x - n} \right),$$

где β_{xp} – бетатронная функция в месте наблюдения, из измерений, аналогичных показанным на рис.19.3.2, можно оценить основные секступольные резонансные гармоники.

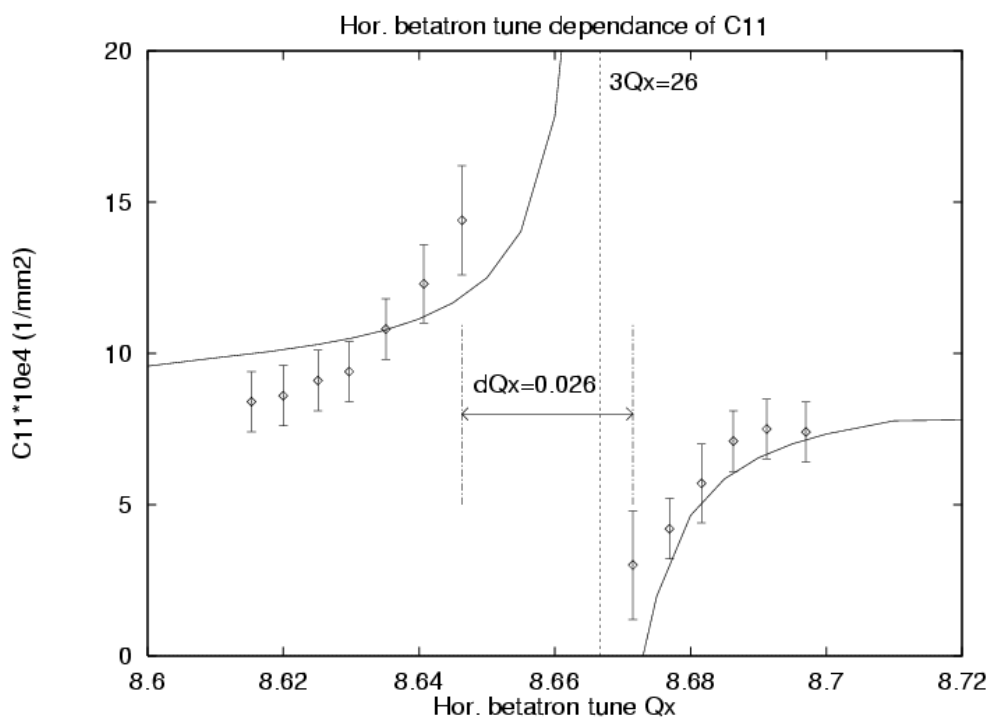


Рис.19.3.2 Коэффициент $C_{xx}(\nu_x)$ вблизи $3\nu_x = 26$.

19.4 Измерение динамической апертуры

Датчик положения может также измерять интенсивности пучка. Поэтому импульсная раскачка когерентных колебаний позволяет находить размер динамической апертуры так, как это делается при моделировании, то есть по величине максимально устойчивой амплитуды колебаний, наблюдая процесс потери частиц из пучка на каждом обороте (рис.19.4.1). При этом, однако, приходится учитывать собственный размер пучка.

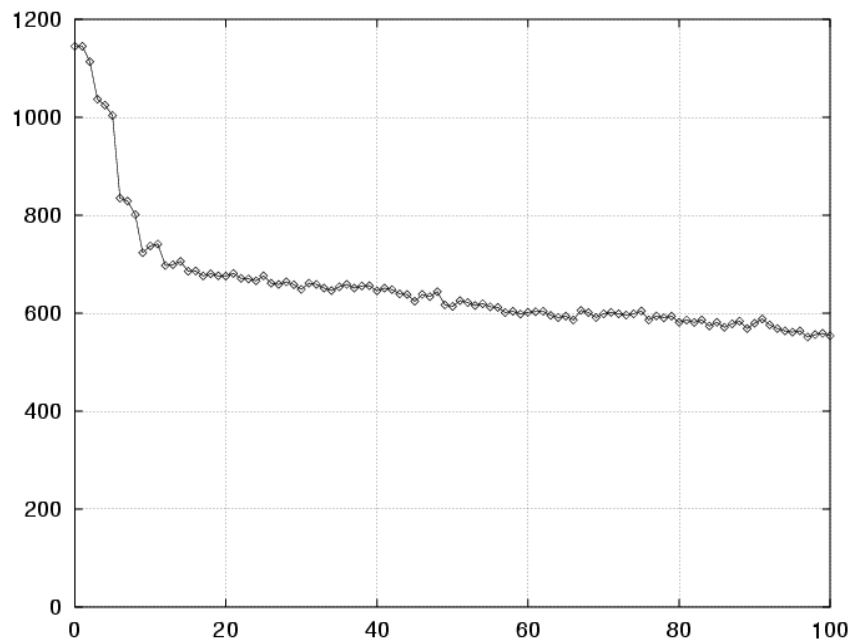


Рис.19.4.1 Быстрые потери пучка на границе динамической апертуры. Показана интенсивность пучка для первых 100 оборотов после удара.

Возможность в ВЭПП-4М производить быстрый удар по пучку и по горизонтали, и по вертикали, позволяет измерять двумерную динамическую апертуру. Три таких измерения, проведенные при различных условиях, показаны на рис.19.4.2.

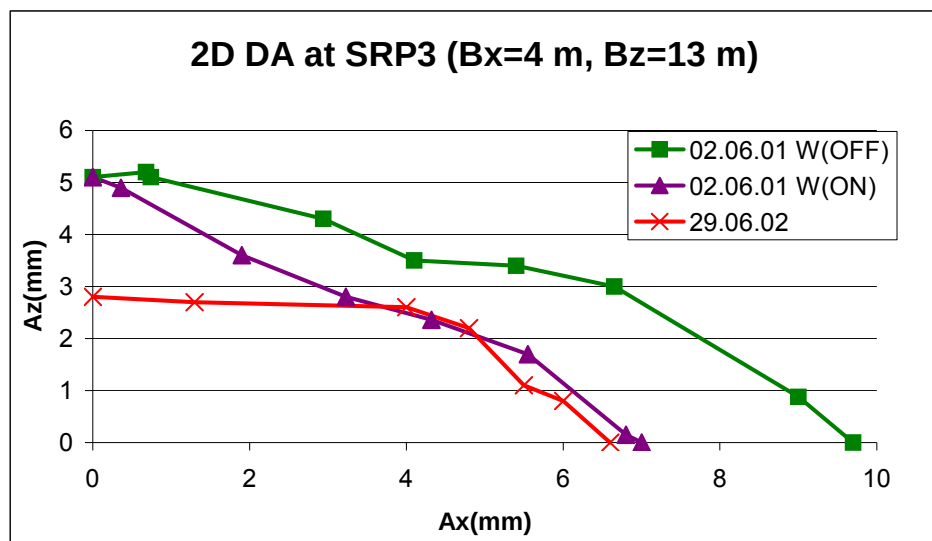


Рис.19.4.2 Динамическая апертура для различных условий.

Проводилось также исследование динамической апертуры вблизи сильных резонансов. На рис.19.4.3 приведены измерения горизонтальной и вертикальной апертуры в окрестности горизонтального резонанса третьего порядка. Хорошо видно, что вблизи резонанса горизонтальная апертура падает до нуля, в то время как вертикальная не меняется, поскольку рассматриваемый резонанс на вертикальное движение не влияет.

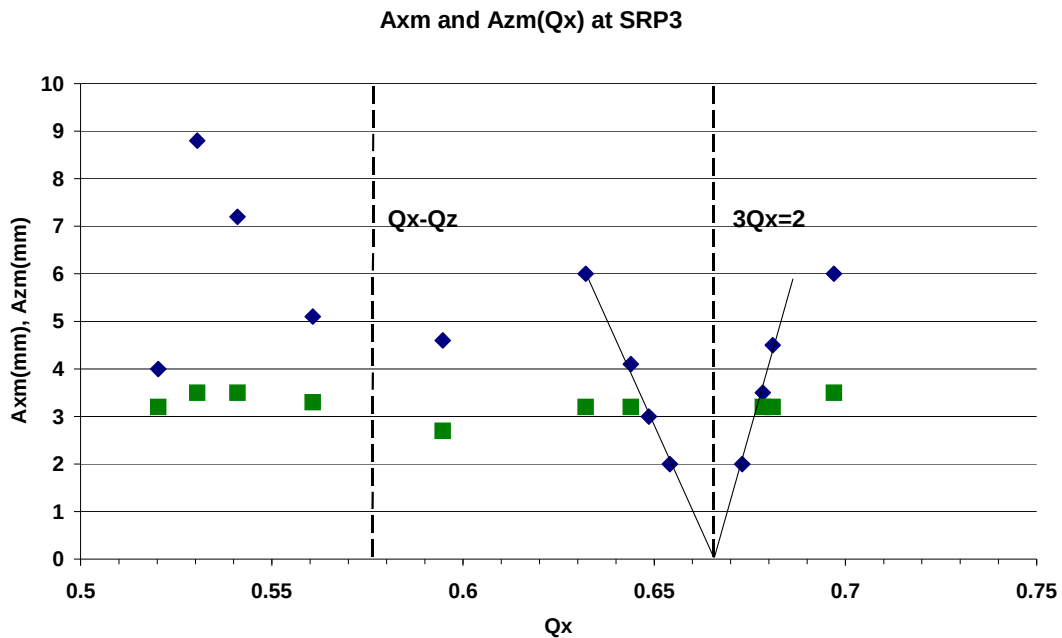


Рис.19.4.3 Динамическая апертура по горизонтали (ромбы) и вертикали (квадраты).

Кроме того, для рассматриваемого резонанса одновременно с размером апертуры измерялось время жизни (рис.19.4.4). Как и следовало ожидать, вблизи неустойчивого секступольного резонанса $3\nu_x = 26$ время жизни уменьшается до нуля.

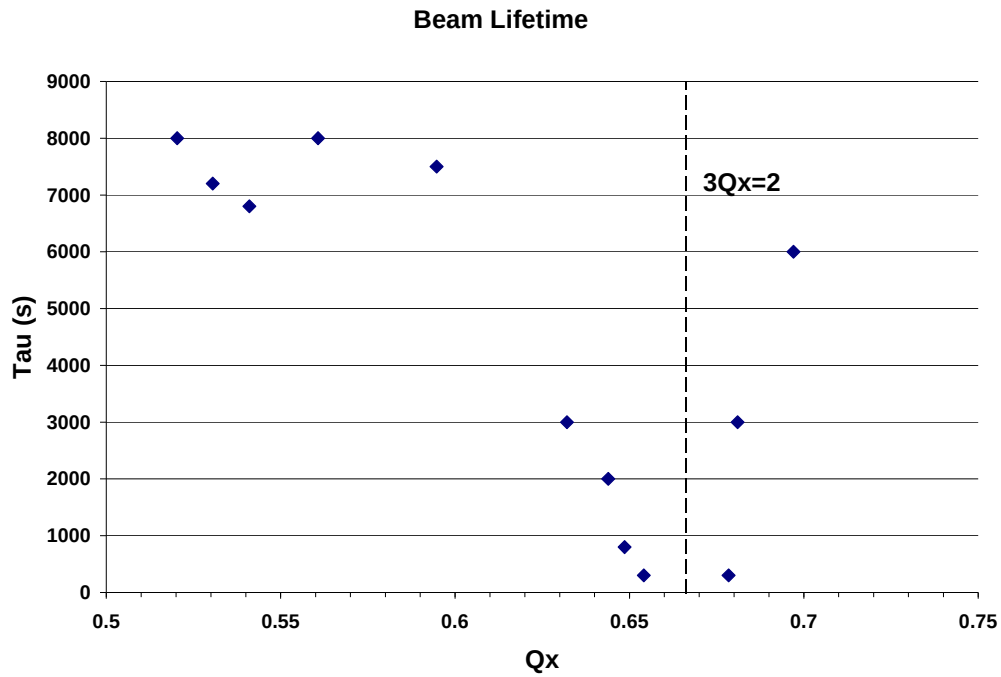


Рис.19.4.4 Время жизни пучка вблизи резонанса $3\nu_x = 26$.

19.5 Наблюдение синхробетатронных резонансов

Резонансы связи бетатронных колебаний и их синхробетатронные сателлиты проявляются в изменении размеров пучка (биение амплитуд бетатронных колебаний). Измерение размеров, производимое в видимой области синхротронного излучения с помощью ПЗС-матрицы (рис.19.5.1), позволяет наблюдать и исследовать такие резонансы. Для этого частота бетатронных колебаний меняется с помощью компьютера на некоторый заданный шаг, после чего измеряются размеры пучка. Результаты сканирования некоторой области бетатронных частот в окрестности резонанса связи $\nu_x - \nu_z = 0$ (он же – резонанс $n_x \nu_x - n_z \nu_z = 0$) показаны на рис.19.5.2.

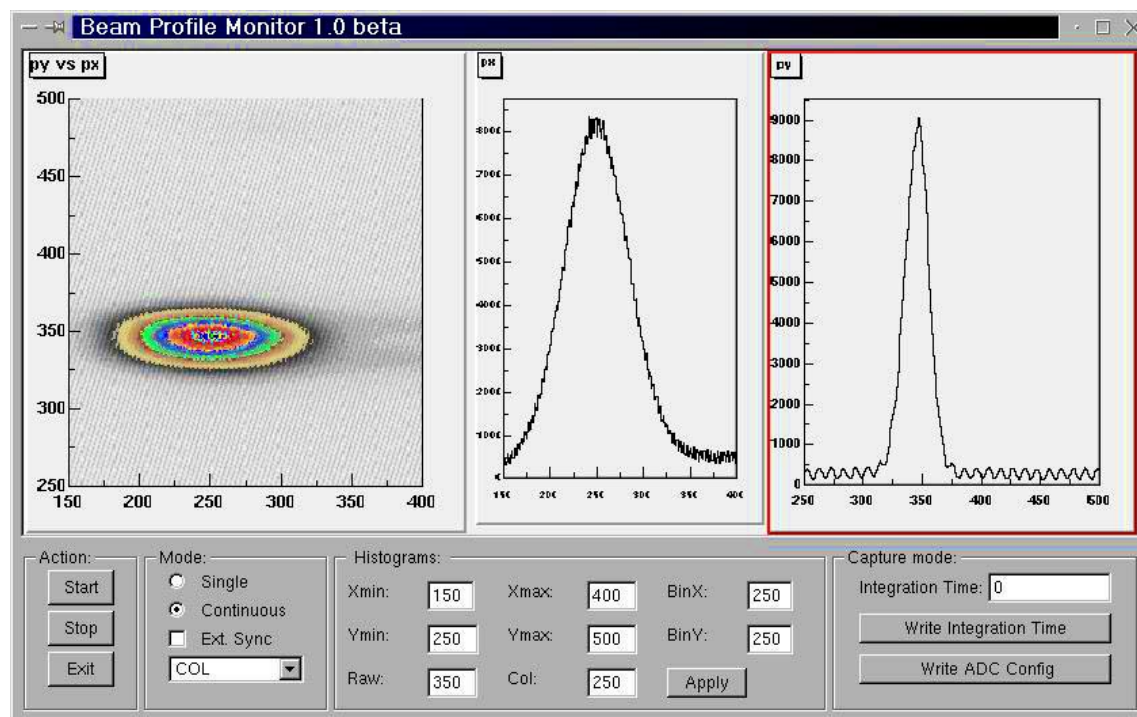


Рис.19.5.1 Слева – пучок, наблюдаемый ПЗС-матрицей. Справа – горизонтальное и вертикальное распределение плотности частиц.

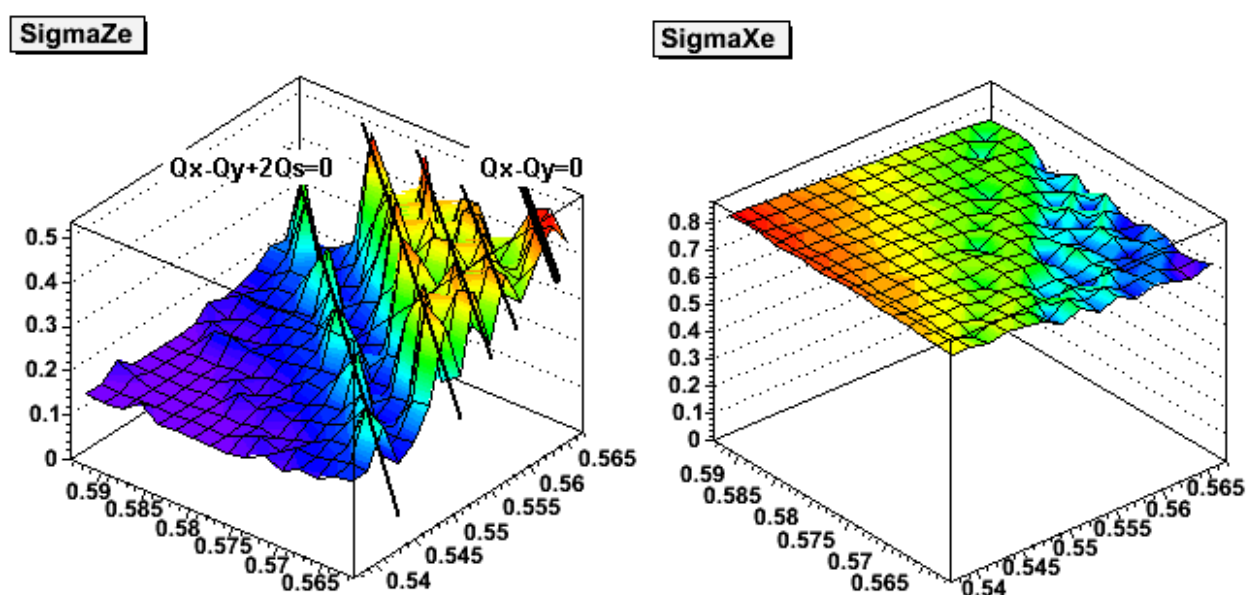


Рис.19.5.2 Вертикальный (слева) и горизонтальный (справа) размер пучка.

Из рис.19.5.2 хорошо видно, что существенно изменяется меньший (вертикальный) размер, поскольку энергия горизонтальных колебаний больше, чем вер-

тикальных. Результаты дают возможность идентифицировать следующие резонансы (кроме $n_x \nu_x - n_z \nu_z = 0$): $3\nu_x - 3\nu_z + \nu_s = 0$, $2\nu_x - 2\nu_z + \nu_s = 0$, $\nu_x - \nu_z + \nu_s = 0$ и $\nu_x - \nu_z + 2\nu_s = 0$.

Величина биений амплитуды вертикальных колебаний (рис.19.5.3) позволяет найти силу каждого резонанса, и, следовательно, численно охарактеризовать соответствующее возмущение.

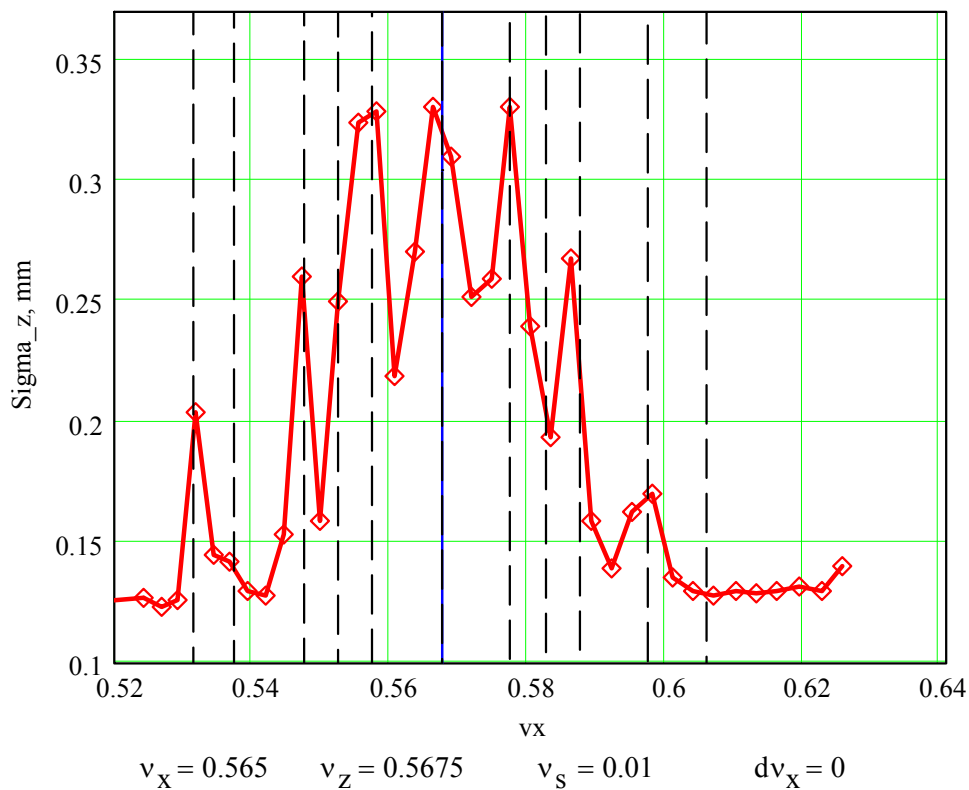


Рис.19.5.3 Изменение вертикального размера пучка синхротронными резонансами.

Литература

1. Г.Н.Кулипанов. Экспериментальное исследование нелинейных резонансов. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1969 г.
2. W.Fisher et al., The dynamic aperture experiment at the CERN SPS, CERN SL/95-96 (AP), 1995.
3. Y.Kobayashi et al., Experimental measurement of dynamic aperture at the Photon Factory storage ring, KEK Preprint 93-38 (June 1993).
4. B.Simon and P.Kuske, The dynamic aperture of BESSY, CERN 88-04, (July 1988), p.120.
5. A.A.Valishev, I.N.Nesterenko, Yu.M.Shatunov, Dynamic aperture measurement at VEPP-2M, Frascati Physics Series Vol. X (1998), pp.233-238.
6. А.А.Валишев, Исследование когерентных эффектов взаимодействия встречных пучков и динамической апертуры на накопителе ВЭПП-2М. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2000.
7. В.В.Сажаев, Динамическая апертура ускорителей с высоким хроматизмом: теория и эксперимент, Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 1997.
8. Е.Б.Левичев. Влияние нелинейностей магнитного поля на динамическую апертуру циклических ускорителей. Диссертация, ИЯФ СО РАН, Новосибирск, 2004 г.
9. В.Смалюк. Диагностика поперечного движения в накопителе: разработка и развитие методов, их практическая реализация на комплексе ВЭПП-4М, канд.диссертация, 1999 г., ИЯФ СО РАН, Новосибирск.

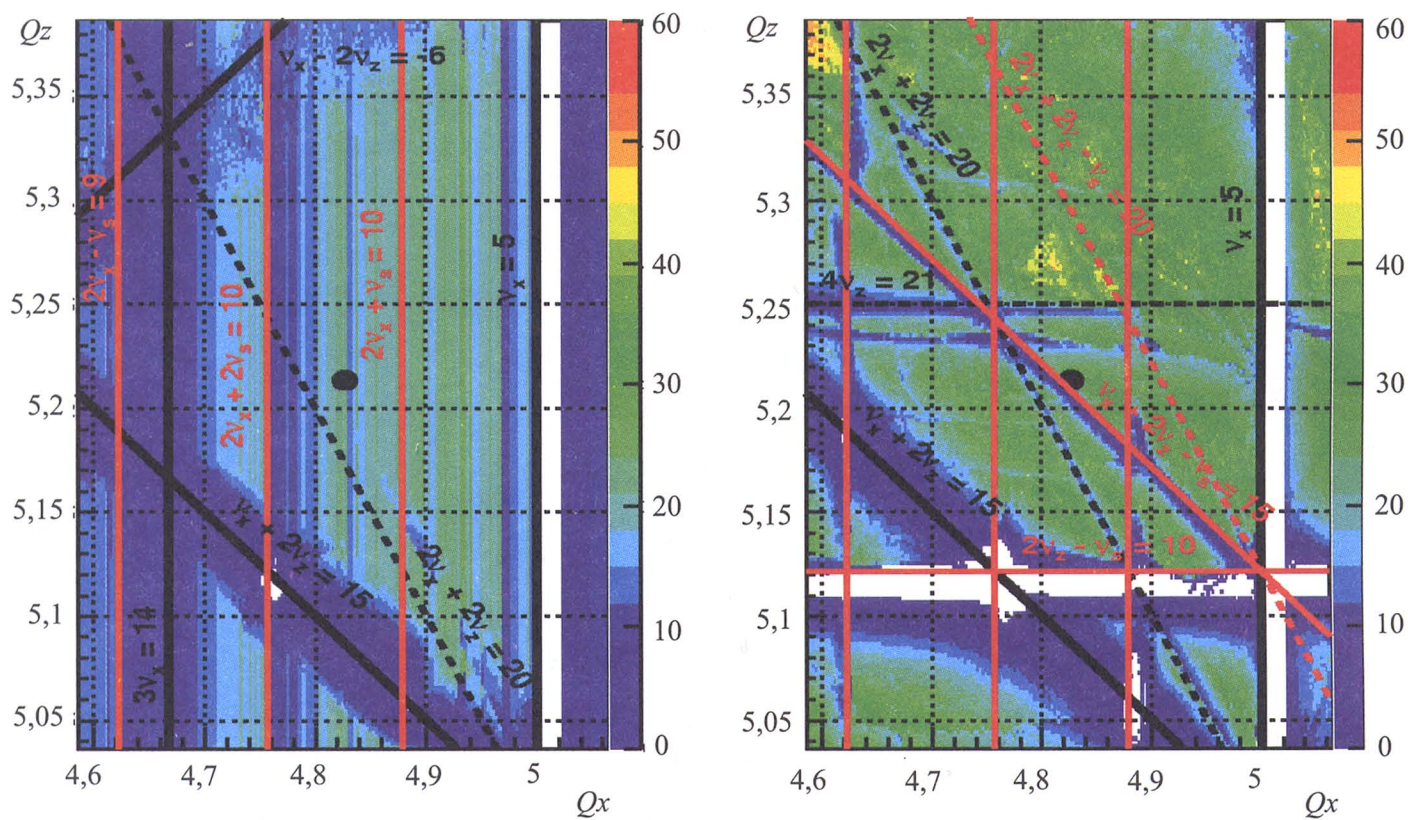


Рис. 18.4.7 к с. 206

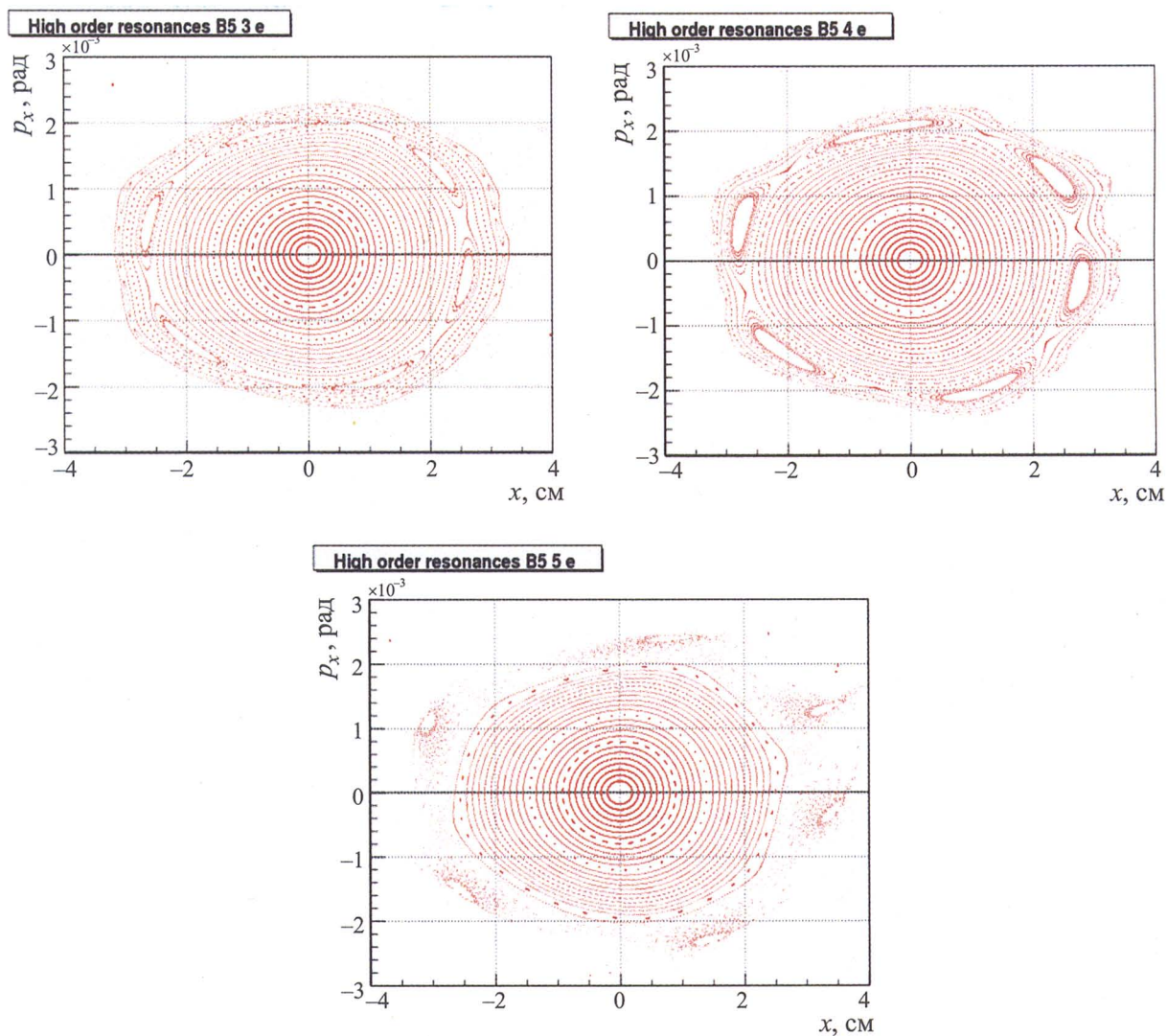


Рис. 18.4.9 к с. 208

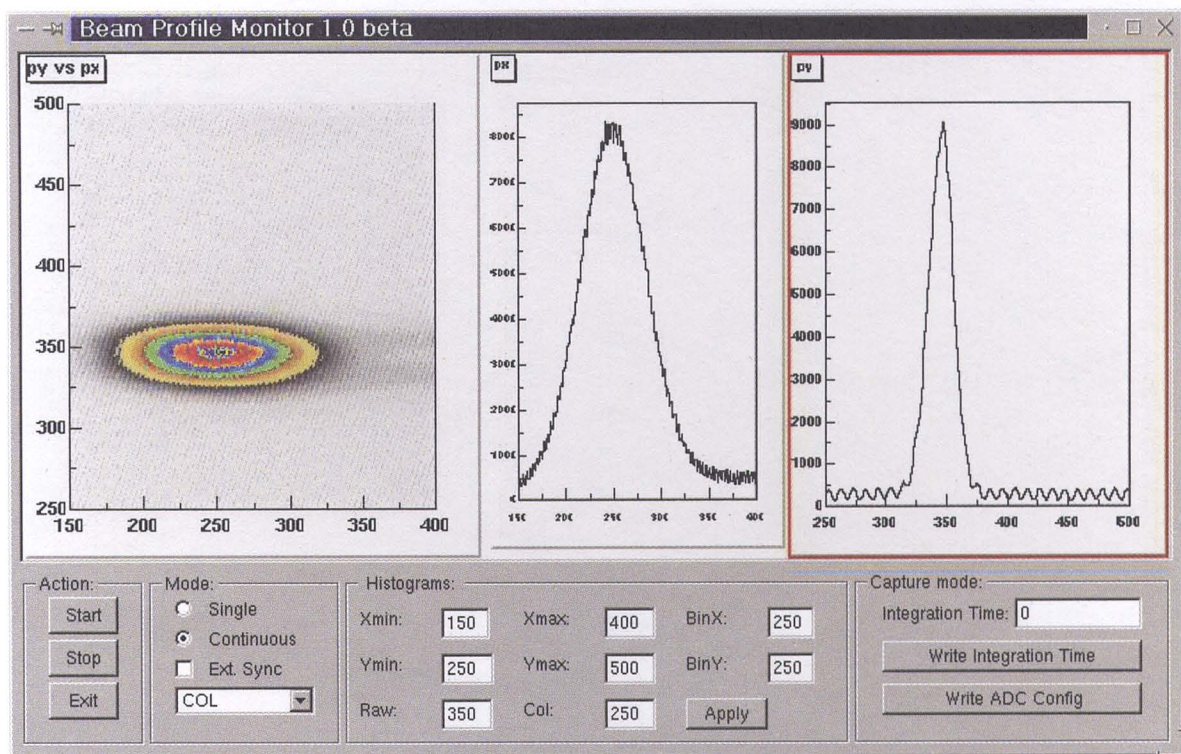
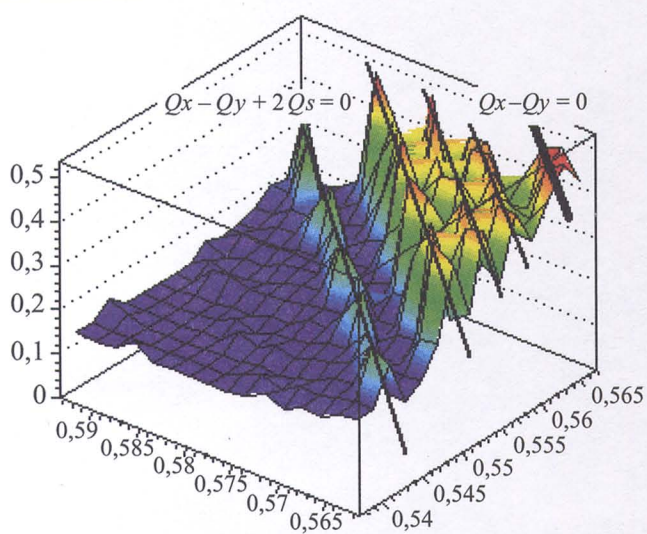


Рис. 19.5.1 к с. 220

SigmaZe



SigmaXe

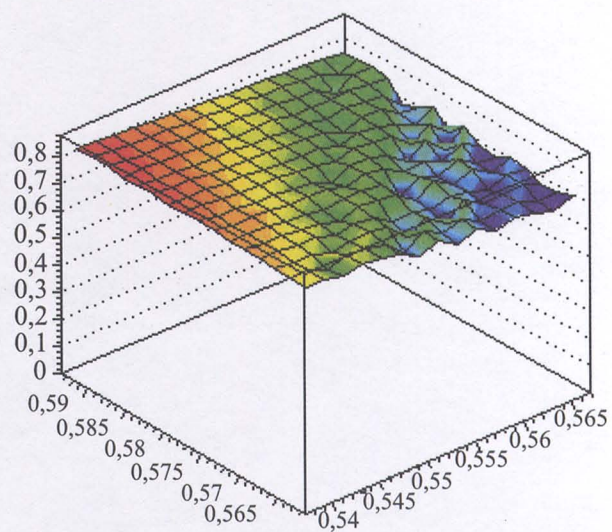
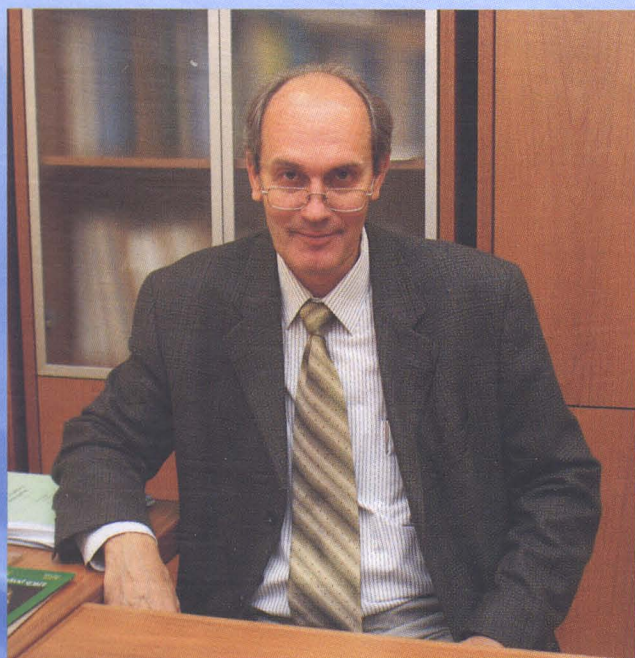


Рис. 19.5.2 к с. 221



ЛЕВИЧЕВ Евгений Борисович – окончил в 1980 году физико-технический факультет Новосибирского электротехнического института (ныне – НГТУ) и с тех пор работает в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, пройдя путь от стажера-исследователя до заместителя директора Института; доктор физико-математических наук, специалист в области физики и техники циклических ускорителей, коллайдеров и источников синхротронного излучения. Область научных интересов – динамика частиц в циклических ускорителях, проектирование магнитной структуры ускорителей, экспериментальное изучение поведения ускоренных частиц. Автор более 150 научных работ.