

Е.А. Переведенцев

Радиационные эффекты в циклических ускорителях

Учебное пособие по спецкурсу “Циклические ускорители”

18 декабря 2013 г.

1 Основные свойства синхротронного излучения

Излучение ультрарелятивистских частиц играет важную роль в динамике пучка для ускорителей легких частиц: электронов и позитронов. В лекции дается обзор важнейших характеристик синхротронного излучения частиц, известных из классической электродинамики¹: полной излученной мощности, ее углового и спектрального распределения, условия когерентности излучения, применимости классического описания процесса излучения.

1.1 Запаздывающее время

Рассматривая электромагнитное поле ультрарелятивистской частицы, совершающей заданное движение $\mathbf{r}(t)$, в точке наблюдения, заданной радиус-вектором \mathbf{R} , см. Рис. 1, запишем связь времени наблюдения t с (более ранним) временем t_{ret} , когда это поле оторвалось от частицы-источника:

$$t = t_{\text{ret}} + \frac{1}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| \quad (1)$$

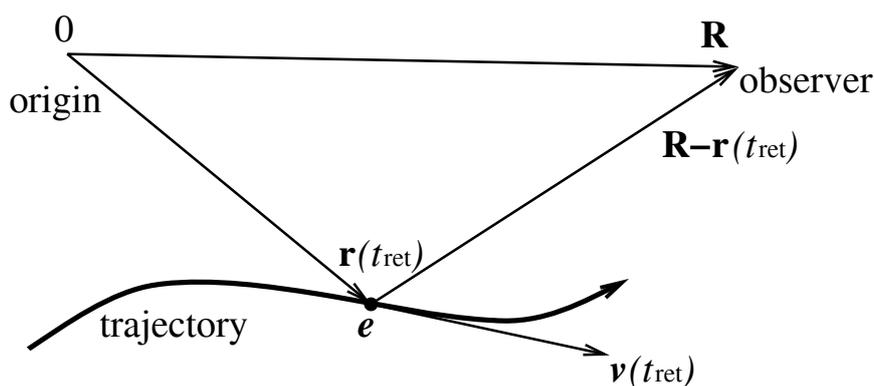


Рис. 1: Обозначения переменных для описания излучения.

Здесь c – скорость света в вакууме; мы тем самым учли время распространения поля от источника к наблюдателю. Наглядный смысл t_{ret} виден из (1): это время отсчитанное по

¹Ландау и Лифшиц, «Теория поля»;
Джексон, «Классическая электродинамика»;
Соколов и Тернов, «Синхротронное излучение».

часам, расположенным вблизи частицы, а точнее – в том же месте, где частица находится в данный момент. Дифференцирование (1) дает соотношение масштабов этих двух времен

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt_{\text{ret}}} \sqrt{(\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}}))^2} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \dot{\mathbf{r}}(t_{\text{ret}}) = 1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}|_{t_{\text{ret}}} \quad (2)$$

Здесь введен единичный вектор в направлении от источника к наблюдателю:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})|} \quad (3)$$

а также безразмерная скорость частицы $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{r}}/c$, обе величины берутся в момент излучения t_{ret} . Наглядное представление соотношения (2) дается на Рис. 2, показывающем как ультрарелятивистская частица догоняет испускаемое ею излучение, что приводит к сжатию временных масштабов в направлении мгновенной скорости.

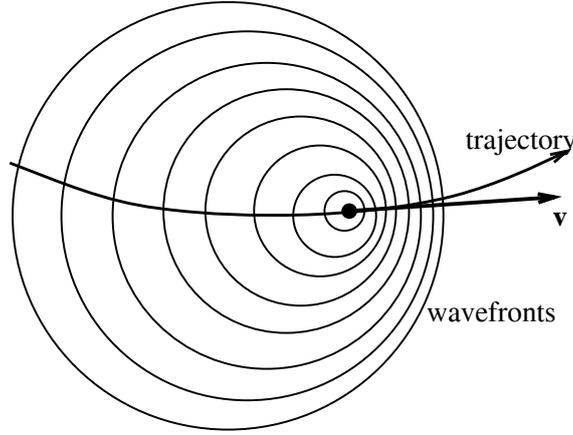


Рис. 2: Уплотнение излучаемых волновых фронтов в направлении мгновенной скорости для случая равноотстоящих по t_{ret} моментов излучения.

Заметим для последующего использования тот факт, что при периодическом движении период T одинаков для обоих времен: полагая, что приращение t_{ret} равно T , с учетом $\mathbf{r}(t_{\text{ret}} + T) = \mathbf{r}(t_{\text{ret}})$, имеем из (1) ту же величину приращения для t :

$$(t_{\text{ret}} + T) + \frac{1}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}} + T)| = \left(t_{\text{ret}} + \frac{1}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| \right) + T = t + T \quad (4)$$

1.2 Полная мощность синхротронного излучения

Для вычисления мощности, излучаемой при движении по окружности частицей с зарядом e и массой покоя m , выгодно использовать инерциальную мгновенно-сопутствующую систему отсчета C (Рис. 3), где в данный момент времени частица покоится, а в достаточно близкие к нему моменты имеет малую, нерелятивистскую скорость². В такой системе отсчета применимы простые формулы для электрического дипольного излучения.

В системе C скорость частицы $v_C \ll c$, и действие магнитного поля пренебрежимо. Электрическое поле $E_C = \gamma\beta H$ направлено радиально; оно получено лоренц-преобразованием из лабораторной системы отсчета и ответственно за искривление траектории, создавая центростремительное ускорение w_C :

$$w_C = \frac{eE_C}{m} = \frac{e}{m} \gamma\beta H \quad (5)$$

²Следует отличать мгновенно-сопутствующую систему от системы покоя частицы, которая в данном случае вращается и следовательно, неинерциальна.

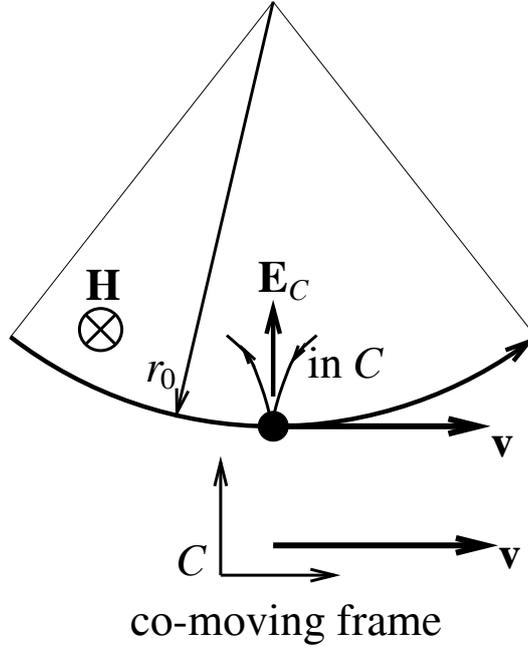


Рис. 3: Мгновенно-сопутствующая система отсчета C имеет скорость, совпадающую со скоростью частицы в данный момент времени.

Мощность дипольного излучения нерелятивистской в системе C частицы

$$I_C = \frac{2e^2 w_C^2}{3c^3} = \frac{2e^4 \gamma^2 \beta^2 H^2}{3m^2 c^3} \quad (6)$$

может быть выражена через долю энергии $d\mathcal{E}_C$, потерянной частицей за интервал собственного времени $d\tau$,

$$I_C = -\frac{d\mathcal{E}_C}{d\tau} \quad (7)$$

Переходя в лабораторную систему, произведем лоренц-преобразование собственного времени $d\tau = dt_{\text{ret}}/\gamma$ и излученной энергии $\gamma(d\mathcal{E}_C + c\beta d\mathcal{P}_C) = \gamma d\mathcal{E}_C = d\mathcal{E}$. Здесь учтено, что импульс не уносится излучением, $d\mathcal{P}_C = 0$, ввиду центральной симметрии углового распределения дипольного излучения. Мы получаем замечательный результат:

$$\frac{d\mathcal{E}_C}{d\tau} = \frac{d\mathcal{E}}{dt_{\text{ret}}} \quad (8)$$

то есть, скорость потерь энергии на излучение — лоренц-инвариант. Отметим, что при переходе в лабораторную систему в лоренц-преобразовании в роли времени следует использовать запаздывающее время, отсчитанное по часам, одностным с частицей.

Однако, излучаемая мощность в лабораторной системе измеряется с помощью часов наблюдателя:

$$I = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} \frac{d\mathcal{E}}{dt_{\text{ret}}} \quad (9)$$

и в общем случае не совпадает с инвариантной скоростью потерь энергии. В интересующем же нас случае излучения при движении по круговой орбите все положения частицы на ней эквивалентны, поэтому полная излучаемая по всем направлениям мощность очевидно постоянна и совпадает со средней за период движения T мощностью \bar{I} . Проследив подробно связь этих величин, находим:

$$I = \bar{I} = \frac{1}{T} \int_T I dt = -\frac{1}{T} \int_T \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt = -\frac{1}{T} \int_T \frac{d\mathcal{E}}{dt_{\text{ret}}} \frac{dt_{\text{ret}}}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_T I_C dt_{\text{ret}} = I_C \frac{1}{T} \int_T dt_{\text{ret}} = I_C \quad (10)$$

Мы использовали независимость I_C от времени, $I_C = \text{const}$, очевидную из (6), и тот факт, что периоды движения в терминах t и t_{ret} совпадают и равны T , согласно (4).

Используя (10) и (6), находим полную мощность излучения в лабораторной системе:

$$I = \frac{2e^4\gamma^2\beta^2 H^2}{3m^2c^3} \quad (11)$$

С учетом соотношения $eHr_0 = pc = \gamma\beta mc^2$ на круговой орбите, можно выразить результат через ее радиус r_0 :

$$I = \frac{2ce^2}{3r_0^2}\beta^4\gamma^4 = mc^2 \cdot \frac{2cr_e}{3r_0^2}\beta^4\gamma^4 \quad (12)$$

здесь $r_e = e^2/mc^2 = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона. В дальнейшем будем везде, где возможно полагать $\beta = 1$, поскольку нас интересует главным образом ультрарелятивистские электроны (и позитроны).

Применяя выражения для полной мощности излучения (11,12) локально на орбитах с переменным радиусом кривизны³, можно найти полную энергию W , затраченную частицей на синхротронное излучение при обходе равновесной орбиты циклического ускорителя, выразив ее через интеграл по длине ds замкнутой орбиты:

$$W = \int_T I dt = \int_T I \frac{ds}{v_0} = \frac{2}{3}e^2\beta^3\gamma^4 \oint \frac{ds}{r_0^2} \quad (13)$$

Это выражение сильно упрощается в случае изомагнитного кольца, когда ведущее поле во всех магнитах одинаково, и $r_0 = \text{const}$; учитывая, что $\oint ds = 2\pi r_0$, имеем:

$$W = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r_0} \gamma^4 = mc^2 \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{r_0} \gamma^4 \quad (14)$$

Преобразуем этот результат к удобному для практики виду, подсчитав сначала потерянную за оборот энергию для электрона с энергией $E = 1$ ГэВ при радиусе кривизны его орбиты $r_0 = 1$ м. Зная энергию покоя $mc^2 = 0.511$ МэВ, из (14) получаем:

$$511\text{кэВ} \cdot \frac{4 \cdot 3.14}{3} \cdot \frac{2.8 \cdot 10^{-13}\text{см}}{10^2\text{см}} \cdot \left(\frac{10^3\text{МэВ}}{0.511\text{МэВ}} \right)^4 \approx 88\text{кэВ} \quad (15)$$

В итоге, имеем практическую формулу для подсчета полной энергии, потерянной на излучение за один оборот:

$$W(\text{кэВ}) = 90 \frac{E^4(\text{ГэВ})}{r_0(\text{м})} \quad (16)$$

Поскольку поля излучения разных частиц пучка не интерферируют⁴, мощность излучается частицами независимо и складывается некогерентно, и потому просто умножается на число циркулирующих частиц N :

$$P = N \frac{W}{T} = \frac{NeW}{T} = I_b \frac{W}{e} \quad (17)$$

здесь T — время оборота, I_b — средний ток пучка, в амперах, а W/e — потери энергии за один оборот, в электрон-вольтах.

Приведем несколько численных примеров.

³См. обоснование в разделе 1.6 ниже.

⁴См. объяснение в разделе 1.4 ниже.

1) Для ВЭПП-3 $E = 2$ ГэВ, $r_0 = 6.1$ м, тогда $W = 90 \cdot 2^4/6.1 \approx 220$ кэВ/оборот, и для типичной величины тока пучка $I_b = 200$ мА излучаемая пучком мощность составит $P = 0.2A \cdot 220kV \approx 45$ кВт, она должна восполняться ускоряющей системой.

2) Для ВЭПП-4 $E = 4.8$ ГэВ, $r_0 = 33$ м, $I_b = 200$ мА, тогда $W = 90 \cdot 4.8^4/33 \approx 1.45$ МэВ/оборот, полная излучаемая пучком мощность $P = 0.2A \cdot 1.45MV \approx 290$ кВт, что является более трудной задачей для ускоряющей системы.

3) LEP(CERN) сейчас имеет $E = 100$ ГэВ, $r_0 = 3$ км, $I_b = 8$ мА, тогда $W = 90 \cdot 10^8/3000 \approx 3$ ГэВ/оборот, а полная излучаемая пучком мощность $P = 8mA \cdot 3GV \approx 24$ МВт, здесь сложность и стоимость ускоряющей системы рекордны, по сути именно такая сильная зависимость потерь на излучение от энергии заставляет думать, что LEP навсегда останется крупнейшим в мире циклическим электрон-позитронным ускорителем.

Из примеров видно, что излученная при обходе орбиты (и восполняемая на каждом обороте!) энергия много меньше энергии частицы, чем и оправдывается допущение о заданном движении, принятое в расчете.

1.3 Угловое распределение излучения

Поля излучения частицы находятся дифференцированием потенциалов Льенара-Вихерта:

$$A = \frac{e\mathbf{v}}{c|\mathbf{R} - \mathbf{r}(t)|(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad (18)$$

при этом в знаменателях возникают различные степени величины (2):

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = 1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta} \Big|_{t_{\text{ret}}} = 1 - \beta \cos \theta \quad (19)$$

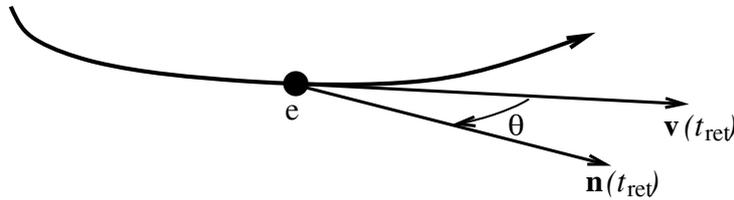


Рис. 4: Иллюстрация обозначений, используемых в этом разделе.

В ультрарелятивистском случае малые знаменатели для направлений $\theta \approx 0$ соответствуют сильным полям излучения, потому область $\theta \ll 1$ наиболее важна. Для нее

$$1 - \beta \cos \theta \approx 1 - \beta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \approx 1 - \beta + \frac{\theta^2}{2} \quad (20)$$

Здесь нельзя просто полагать $\beta = 1$, следует использовать более точную оценку:

$$1 - \beta = \frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{1 + \beta} \approx \frac{1}{2}(1 - \beta^2) = \frac{1}{2\gamma^2} \quad (21)$$

В итоге, малый знаменатель

$$1 - \beta \cos \theta \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \quad (22)$$

даст максимальные поля излучения для $\theta = 0$, в пределах конуса с угловой шириной $\Delta\theta \lesssim 1/\gamma$. То же относится и к угловому распределению излученной мощности

$$\frac{dI}{d\Omega} \propto \frac{1}{(1/\gamma^2 + \theta^2)^k}, \quad (23)$$

мы опустим полное выражение ввиду его сложности. Летая по окружности, релятивистская частица несет впереди себя узкий конус излучения. Удаленный, малого размера детектор излучения, нацеленный вдоль касательной к этой окружности, видит излучение только тогда, когда частица находится в пределах малой дуги $\sim 2/\gamma$, примыкающей к точке касания оси наблюдения с окружностью, Рис. 5.

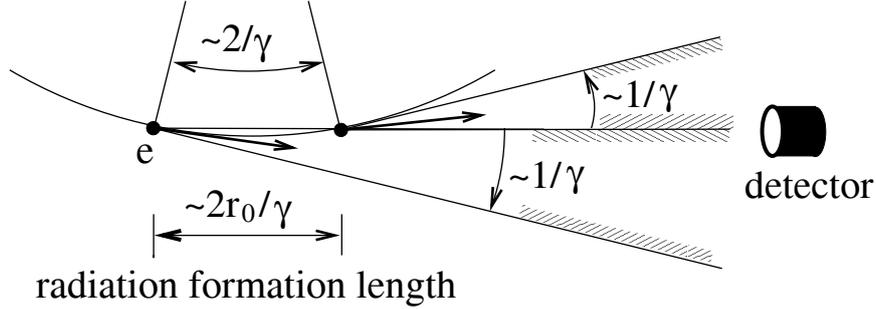


Рис. 5: Длина формирования излучения и ее связь с мгновенной картиной углового распределения излучаемой мощности.

Таким образом, наблюдаются в основном поля, порожденные и суммированные на длине этой дуги $\sim 2r_0/\gamma$; участок траектории излучающей частицы, играющий подобную роль принято называть длиной формирования излучения. Если длина эта достаточно мала, мы можем применять локально в каждом магните ускорителя полученные для полной окружности результаты⁵.

1.4 Спектральные характеристики синхротронного излучения

Представим на графике Рис. 6а временную зависимость полей излучения, начав с t_{ret} в роли аргумента. Оценим ширину пиков из длины формирования: $\Delta t_{\text{ret}} \sim 2r_0/c\gamma$. Используя соотношение масштабов времени наблюдения t и запаздывающего времени (2), пересчитаем длительность всплесков излучения по t (Рис. 6б) для направления наблюдения вдоль скорости, где поля максимальны:

$$\Delta t \sim (1 - \beta)\Delta t_{\text{ret}} \sim \frac{r_0}{c\gamma^3} \quad (24)$$

Учитывая, что $\gamma \gg 1$ на несколько порядков, видим, что эти длительности чрезвычайно малы. При достижимых ныне плотностях частиц в пучке вероятность столь близкого расположения частиц, чтобы их поля перекрывались и могли интерферировать, пренебрежима. По этой причине излучение разных частиц пучка взаимно-некогерентно: складываются мощности, а не поля излучения⁶.

⁵Подробнее об этом см. в разделе 1.6 ниже.

⁶Когерентное синхротронное излучение с мощностью $\propto N^2$ можно получить в низкочастотной части его спектра, однако на практике этому препятствует экранирование этого диапазона частот проводящими стенками вакуумной камеры.

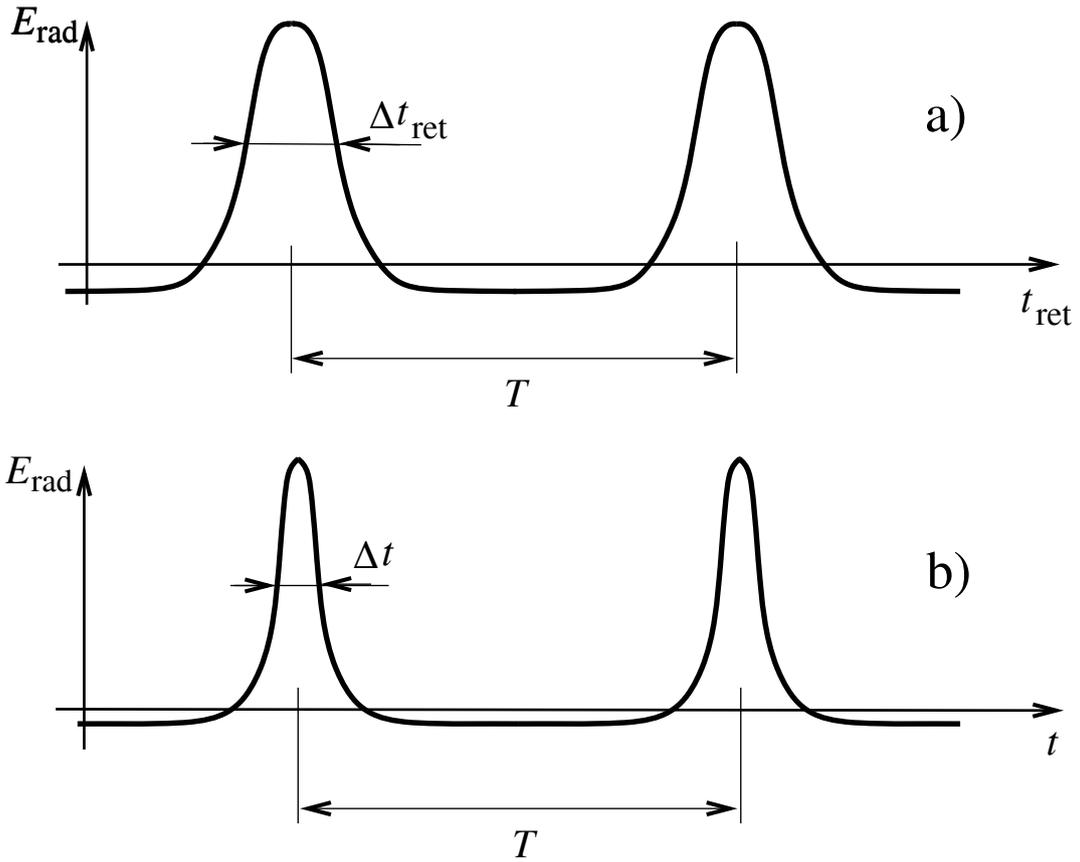


Рис. 6: Временная зависимость полей синхротронного излучения: а) как функция времени излучения; б) как функция времени наблюдения.

На основе знания временных характеристик, оценим ширину фурье-спектра $\Delta\omega$ из длительности всплеска излучения

$$\Delta\omega \sim 1/\Delta t \sim \frac{c}{r_0}\gamma^3 \sim \omega_0\gamma^3 \quad (25)$$

При точных расчетах спектрального распределения излученной мощности оказывается удобно ввести определение для критической частоты синхротронного излучения:

$$\omega_c = \frac{3}{2}\omega_0\gamma^3 \quad (26)$$

Высокочастотная асимптотика $\omega \gg \omega_c$ спектрального распределения⁷ соответствует экспоненциальному спаду $\sim \exp(-\omega/\omega_c)$ как раз с этой критической частотой, см. рис. 7а; широкий максимум спектра находится на частоте $0.29\omega_c$. При низких частотах $\omega \ll \omega_c$ спектральная плотность спадает как $\omega^{1/3}$.

Удобно представление спектральной плотности через полную мощность I и безразмерную спектральную функцию $S(\omega/\omega_c)$, с нормировкой $\int_0^\infty S(y)dy = 1$:

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{I}{\omega_c} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (27)$$

⁷Периодические поля излучения частицы, строго говоря, должны давать линейчатый спектр, где расстояние между равноотстоящими линиями задается частотой обращения по круговой орбите ω_0 . Однако, малость этой величины позволяет практически во всех случаях считать спектральное распределение квазинепрерывным, используя огибающую линейчатого спектра в роли спектральной функции.

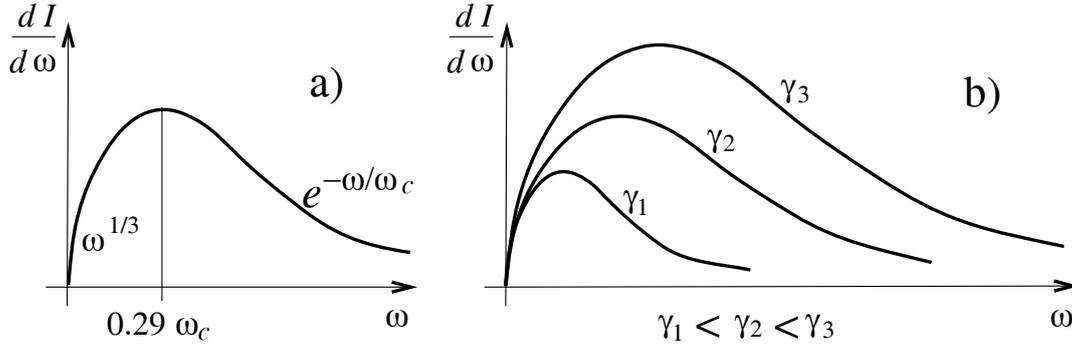


Рис. 7: а) Спектр мощности синхротронного излучения; б) его зависимость от энергии частицы.

Максимальное ее значение порядка единицы $S(0.29) = 0.92$, для справки приведем выражение спектральной функции через модифицированную функцию Бесселя порядка $5/3$:

$$S(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^\infty K_{5/3}(y') dy'$$

Спектр синхротронного излучения (27) обладает замечательным свойством: его зависимость от параметров задачи выражается лишь одной величиной ω_c . Из (27) видно, что максимум спектрального распределения меняется с энергией частицы $\sim \gamma$, а частотная ось масштабируется как γ^3 , см. Рис. 7б.

При энергии электронов порядка нескольких ГэВ пик излучения приходится на рентгеновский диапазон. Оценивая критическую длину волны излучения $\lambda_c = 2\pi c / \omega_c$ для ВЭПП-3 с параметрами приведенными в примерах в разделе 1.2, находим:

$$\lambda_c = \frac{4\pi}{3} \frac{c}{\omega_0 \gamma^3} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_0}{\gamma^3} = \frac{4 \cdot 3.14}{3} \frac{610}{\left(\frac{2000}{0.511}\right)^3} \approx 4.3 \cdot 10^{-8} \text{ см}, \quad (28)$$

то есть несколько ангстрем. Соответствующая критическая энергия гамма-квантов составляет $E_{\gamma c} = \hbar \omega_c \approx 3$ кэВ.

Возвращаясь к обсуждению углового распределения синхротронного излучения, следует отметить, что наиболее детальная характеристика излучения — это угловое распределение для каждой спектральной компоненты:

$$\frac{dI}{d\omega d\Omega} \quad (29)$$

Эта информация содержится в приведенной на стр. 1 литературе. Здесь же лишь отметим, что данная в разделе 1.3 оценка ширины углового распределения $\Delta\theta \lesssim 1/\gamma$ относится в равной мере либо к полной (суммированной по спектру) мощности, либо к диапазону частот $\omega \sim \omega_c$ в максимуме спектрального распределения, где и содержится основная мощность излучения. Между тем, на низких частотах, иначе говоря, в длинноволновом (например, оптическом) диапазоне, где $\lambda \gg \lambda_c$, угловое распределение гораздо шире: $\Delta\theta \sim (\lambda/r_0)^{1/3} \gg 1/\gamma$, а на жестком крае спектра — гораздо уже чем $1/\gamma$.

1.5 Применимость классической электродинамики

Оценим число гамма-квантов, излучаемых за один оборот:

$$N_{\text{turn}} \sim \frac{W}{\hbar \omega_c} \sim \frac{\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r_0} \gamma^4}{\hbar \frac{3}{2} \omega_0 \gamma^3} \sim \pi \frac{e^2}{\hbar c} \gamma \quad (30)$$

Точный результат интегрирования спектральной плотности потока гамма-квантов, с суммированием за один оборот

$$N_{\text{turn}} = T \int_0^\infty \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dI}{d\omega} d\omega$$

отличается от данной оценки лишь множителем $5/\sqrt{3}$. Учитывая, что постоянная тонкой структуры $e^2/\hbar c = 1/137$, отметим, что величина N_{turn} не так уж велика. Однако, период обращения нельзя считать характерным временем для процесса излучения, на эту роль годится, скажем, время за которое частица излучила бы всю энергию $\tau \sim E/I$. Потребуем, чтобы число квантов, излученных за время τ было велико:

$$\tau N_{\text{turn}} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{E}{I} \frac{W}{\hbar\omega_c} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{E}{\hbar\omega_c} \gg 1 \quad (31)$$

В итоге, наложенное нами требование совпало с другим, совершенно естественным условием: классическая электродинамика применима лишь тогда, когда энергия «типичного» кванта много меньше энергии излучающей частицы,

$$E_{\gamma c} = \hbar\omega_c \ll E = \gamma mc^2 \quad (32)$$

или,

$$\hbar \frac{3}{2} \omega_0 \gamma^3 = \hbar \frac{3}{2} \frac{c}{r_0} \gamma^3 \ll \gamma mc^2 \quad (33)$$

или, вводя комптоновскую длину волны электрона $\lambda_e = \hbar/mc \approx 4 \cdot 10^{-11}$ см, находим параметр, чья малость соответствует классическому пределу в задаче о синхротронном излучении релятивистской частицы:

$$\frac{\hbar/mc}{r_0} \gamma^2 = \frac{\lambda_e}{r_0} \gamma^2 \ll 1, \quad (34)$$

что всегда верно в ведущих полях современных ускорителей, а с другой стороны, абсолютно совпадает с общим условием применимости классической электродинамики: поле в системе частицы γH должно быть много меньше швингеровского поля $e/r_e \lambda_e$.

1.6 Сопоставление синхротронного и ондуляторного излучения

Хотя в простейшей постановке задача о синхротронном излучении предполагает движение частицы по орбите с неизменным радиусом кривизны, $r_0 = \text{const}$, мы обнаружили, что поля излучения ультрарелятивистской частицы имеют весьма короткую длину формирования $l_f \sim r_0/\gamma$. Если путь частицы в поворотном магните $L \gg l_f$, наблюдаемые свойства излучения из областей, удаленных от края магнита, будут определяться локальными параметрами участка орбиты, являющегося дугой окружности. Вводя угол поворота $\varphi = L/r_0$, переписываем условие $l_f \ll L$ в виде: $1/\gamma \ll \varphi$, то есть угловая расходимость излучения должна быть много меньше угла поворота на участке излучения с однородным магнитным полем. Так обычно и обстоит дело в магнитах, создающих ведущее поле электронных ускорителей. Интересно отметить, что подставив в это условие выражение r_0 из $pc = eHr_0$, можно исключить зависимость от энергии частицы; тогда соотношение $eHL \gg mc^2$ означает, что имеем дело с синхротронным излучением. Для практических оценок заменим здесь мировые постоянные их значениями: $HL \sim \int H dl \gg 1700$ Э·см.

В обратном пределе, длина формирования будет определяться просто длиной поворотного магнита, время пролета $\Delta t_{\text{ret}} \sim L/c$, а длительность всплеска излучения, наблюдаемого вдоль направления скорости,

$$\Delta t \sim (1 - \beta)L/c \sim L/c\gamma^2. \quad (35)$$

Оценка ширины спектра в этом случае дает:

$$\Delta\omega \sim 1/\Delta t \sim \gamma^2 c/L, \quad (36)$$

причем спектральное распределение сильно отличается по форме от спектра синхротронного излучения. Такому предельному случаю соответствует излучение из ондуляторов — специальных устройств для генерации излучения; в их периодических полях траектория излучающей частицы имеет форму близкую к синусоиде, см. пример плоского ондулятора на Рис. 8; используются и ондуляторы с винтовой траекторией.

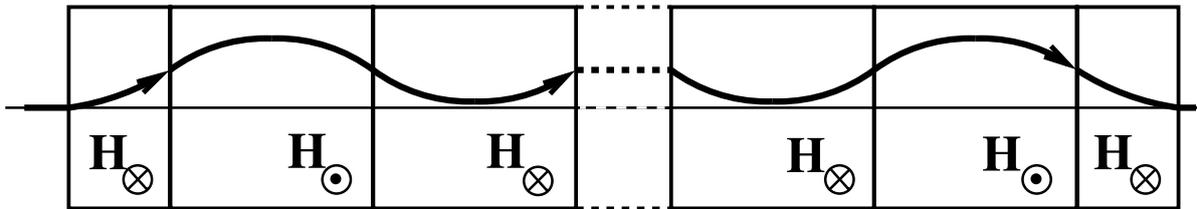


Рис. 8: Волнообразная траектория частицы в знакопеременном поле ондулятора.

2 Радиационное затухание колебаний

Ранее рассмотрение движения частиц в циклическом ускорителе мы вели, пренебрегая влиянием излучения, и получили для малых отклонений частицы от идеальных начальных условий, соответствующих равновесной (или синхронной) частице летящей по равновесной (проектной) орбите, устойчивые поперечные (бетатронные) и продольные (синхротронные) колебания с неизменной амплитудой. Такое приближение верно на достаточно коротких по сравнению с $\tau \sim E/I$ отрезках времени, особенно если учесть, что излучаемая энергия непрерывно компенсируется ускоряющими резонаторами (число которых, как в случае LEP, может составлять десятки или даже сотни за один оборот).

Для электронных ускорителей излучением уже нельзя пренебречь, особенно если интересуют большие отрезки времени, а ведь время жизни пучка частиц в электронных накопителях весьма велико (и составляет, в зависимости от режима, 0.1–100 часов). В лекции дан анализ влияния излучения, описываемого как непрерывный процесс, на динамику ультрарелятивистских электронов, найдены скорости радиационного затухания синхротронных и бетатронных колебаний.

2.1 Затухание синхротронных колебаний

В уравнениях синхротронных колебаний

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{1}{p_0 v_0 T_0} [eU_0 \sin q\omega_0(t_0 + \tau) - W], \quad (1)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \mathcal{K} \frac{\Delta p}{p}, \quad (2)$$

произведем упрощения, соответствующие ультрарелятивистскому движению электрона:

$$v_0 \approx c, \quad p_0 v_0 \approx E_0, \quad \frac{\Delta p}{p} \approx \frac{\Delta E}{E}; \quad \mathcal{K} = \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \approx \alpha_p. \quad (3)$$

Рассмотрим малые колебания, разложим синусоидальную зависимость ускоряющего напряжения при $q\omega_0\tau \ll 1$, учтем что радиационные потери синхронной частицы за один оборот $W_0 = eU_0 \sin q\omega_0 t_0$, где $q\omega_0 t_0$ – равновесная фаза. Введем новый элемент в наше рассмотрение: учтем зависимость потерь на излучение от энергии колеблющейся неравновесной частицы $E = E_0 + \Delta E$,

$$W(E) \approx W(E_0) + \left. \frac{dW}{dE} \right|_{E=E_0} \cdot (E - E_0) = W_0 + \left. \frac{dW}{dE} \right|_0 \cdot \Delta E \quad (4)$$

Уравнения принимают простой вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{E} \right) = -\frac{\Omega_s^2}{\alpha_p} \tau - \frac{1}{T_0} \left. \frac{dW}{dE} \right|_0 \frac{\Delta E}{E}, \quad (5)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \alpha_p \frac{\Delta E}{E}, \quad (6)$$

индексом 0 помечены величины, относящиеся к синхронной частице на равновесной орбите, а для частоты малых синхротронных колебаний Ω_s использовано знакомое выражение:

$$\Omega_s^2 = \frac{q\alpha_p eU_0}{2\pi E_0} (-\cos q\omega_0 t_0). \quad (7)$$

Дифференцируя (5) по времени и используя (6), получим уравнение описывающее поведение энергии неравновесной частицы

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\Delta E}{E} \right) + 2 \left\{ \frac{1}{2T_0} \frac{dW}{dE} \Big|_0 \right\} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{E} \right) + \Omega_s^2 \frac{\Delta E}{E} = 0. \quad (8)$$

Это уравнение экспоненциально затухающих колебаний, декремент затухания амплитуды выделен фигурными скобками. Решение для отклонения энергии

$$\Delta E = A_E e^{-\zeta_E t} \cos(\Omega_s t + \varphi_E)$$

спадает за характерное время затухания синхротронных колебаний $\tau_E = \zeta_E^{-1}$, декремент затухания⁸ синхротронных колебаний ζ_E оказался напрямую связан с зависимостью радиационных потерь от энергии частицы,

$$\zeta_E = \frac{W_0}{2T_0 E_0} \left\{ \frac{E_0}{W_0} \frac{dW}{dE} \Big|_0 \right\}. \quad (9)$$

Безразмерная логарифмическая производная (выделена фигурными скобками) зависит от конкретного устройства магнитной системы ускорителя, а размерная часть показывает, что для затухания требуется число оборотов $\sim E_0/W_0 \gg 1$. Более того, обычно оно много больше периода синхротронных колебаний, чем и оправдано было пренебрежение радиационными эффектами в прежних лекциях.

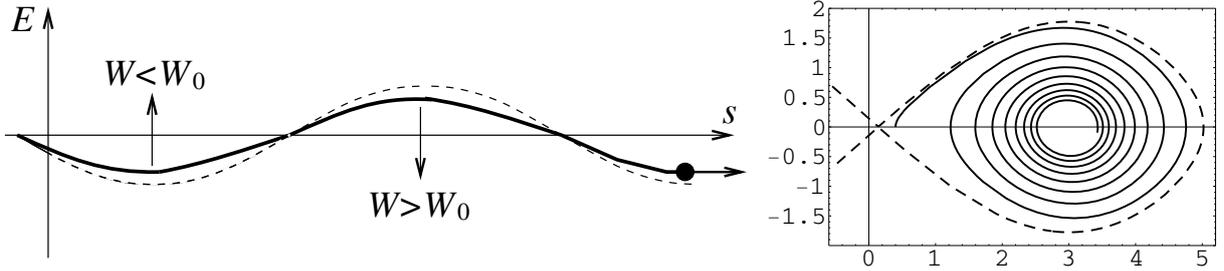


Рис. 1: Слева: зависимость радиационных потерь от энергии частицы, при равной компенсации потерь для всех энергий, приводит к затуханию синхротронных колебаний. Справа: фазовая траектория затухающих синхротронных колебаний внутри сепаратрисы.

Для полного вычисления декремента ζ_E запишем зависимость радиационных потерь за оборот от энергии; на орбите неравновесной частицы вычисляем интеграл от излучаемой мощности за период обращения

$$W(E) = \int_T I dt = \oint I \frac{dt}{ds} ds = \frac{1}{c} \oint I \left(1 + \frac{x_p}{r_0} \right) ds_0. \quad (10)$$

Здесь $r_0(s)$ – локальный радиус кривизны проектной орбиты, скорость частицы c , и учтено, что элемент дуги неравновесной орбиты удлиняется за счет дисперсии, см. Рис. 2.

Смещение положения неравновесной орбиты x_p

$$x_p = D(s) \frac{\Delta E}{E} \quad (11)$$

⁸Подразумевается, и будет далее подтверждено вычислениями, что можно так построить магнитную систему, чтобы иметь $\zeta_E > 0$.

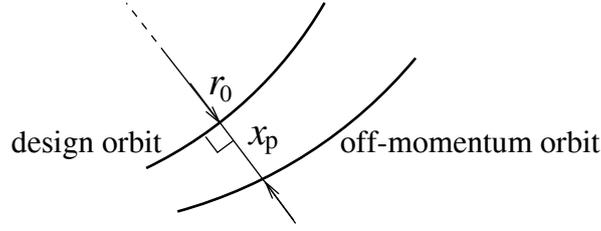


Рис. 2: Отклонение x_p замкнутой орбиты неравновесной частицы от проектной орбиты.

выражается через дисперсионную функцию $D(s)$, являющуюся периодическим решением неоднородного уравнения Хилла

$$D'' + K(s)D = \frac{1}{r_0(s)}. \quad (12)$$

Она легче всего находится из частного решения этого уравнения с начальными условиями $X(s) = 0, X'(s) = 0$:

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \end{pmatrix} = [\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)]^{-1} \begin{pmatrix} X(s + \Pi) \\ X'(s + \Pi) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

как было показано в предыдущих лекциях.

Подставляем (11) в (10) и вычисляем производную

$$\left. \frac{dW}{dE} \right|_0 = \frac{1}{c} \frac{d}{dE} \oint I \left(1 + \frac{D}{r_0} \frac{E - E_0}{E_0} \right) ds_0 \Big|_{E=E_0} = \frac{1}{c} \oint \left(\left. \frac{dI}{dE} \right|_0 + \frac{D}{r_0} \frac{I_0}{E_0} \right) ds_0 \quad (14)$$

Важно помнить, что здесь требуется учесть отличие излучения неравновесной частицы вызванное и величиной ее энергии, и тем, что двигаясь по неравновесной орбите она проходит в полях, не равных полю на проектной орбите (поля фокусируют/дефокусируют, следовательно, неоднородны). Мощность излучения (согласно (11) из лекции 1) – степенная функция ведущего поля и энергии частицы $I \propto H^2 \gamma^2 \propto H^2 E^2$, и потому соответствующая (полная!) производная имеет два слагаемых:

$$\frac{dI}{dE} = 2 \frac{I}{E} + 2 \frac{I}{H} \frac{dH}{dE}. \quad (15)$$

На равновесной орбите величина

$$\left. \frac{dH}{dE} \right|_0 = \left. \frac{dH}{dx} \right|_0 \left. \frac{dx}{dE} \right|_0 = G \frac{D}{E_0} \quad (16)$$

выражается через дисперсию D (см. (11)) и градиент G ведущего поля (ответственный за фокусировку в предыдущих лекциях). Тогда

$$\left. \frac{dI}{dE} \right|_0 = 2 \frac{I_0}{E_0} + 2 \frac{I_0}{H_0} G \frac{D}{E_0}, \quad (17)$$

и собирая все вместе, учитывая, что $W_0 = \oint I_0 ds_0 / c, I_0 \propto 1/r_0^2$, получим в итоге:

$$\left. \frac{dW}{dE} \right|_0 = \frac{1}{c} \oint \frac{I_0}{E_0} \left(2 + 2 \frac{G}{H_0} D + \frac{D}{r_0} \right) ds_0 \quad (18)$$

$$= \frac{W_0}{E_0} \left[2 + \frac{1}{c W_0} \oint I_0 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{2G}{H_0} \right) D ds_0 \right] = \frac{W_0}{E_0} (2 + \mathcal{D}). \quad (19)$$

Здесь введено обозначение для безразмерного параметра, отражающего геометрические и фокусирующие свойства магнитной системы ускорителя⁹

$$\mathcal{D} = \frac{\oint \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{2G}{H_0 r_0} \right) \frac{D}{r_0} ds_0}{\oint \frac{1}{r_0^2} ds_0}. \quad (20)$$

В большинстве современных электронных машин $\mathcal{D} \ll 1$, потому что при использовании жесткой фокусировки $D \ll r_0$.¹⁰

Приведем окончательное выражение для декремента затухания синхротронных колебаний:

$$\zeta_E = \frac{1}{2T_0} \frac{W_0}{E_0} (2 + \mathcal{D}) \quad (21)$$

2.1.1 Примеры

Для ВЭПП-3 можно считать $\mathcal{D} \ll 1$, и тогда из (21) $\tau_E = \zeta_E^{-1} \approx T_0 E_0 / W_0$. Ранее для $E_0 = 2$ ГэВ мы нашли $W_0 = 220$ кэВ, следовательно время затухания синхротронных колебаний ~ 9000 оборотов! Это действительно много больше периода синхротронных колебаний (~ 100 оборотов). С другой стороны, зная частоту обращения 4 МГц, находим что при этой энергии $\tau_E \approx 2.3$ мс. Как видно из (21), $\tau_E \propto E^{-3}$, а значит при энергии инжекции ВЭПП-3 $E_0 = 330$ МэВ получается $\tau_E \approx 0.5$ с, – но и это много меньше времени жизни пучка.

2.1.2 Азимутально-симметричный ускоритель

В азимутально-симметричной магнитной системе как проектная, так и неравновесная орбиты являются окружностями радиуса r_0 и $r_0 + x_p$, соответственно. Дисперсионная функция постоянна и выражается через показатель спада магнитного поля n :

$$D = \frac{r_0}{1 - n}, \quad n = -\frac{Gr_0}{H_0}$$

Излученная за оборот энергия (см. (14,16) в лекции 1) выражается очень простой формулой

$$W = (\dots) \frac{E^4}{r_0 + x_p} = (\dots) \frac{E^4}{r_0} \left(1 + \frac{1}{1 - n} \frac{E - E_0}{E_0} \right)^{-1} \quad (22)$$

и позволяет сразу вычислить требуемую в (8,9) производную:

$$\left. \frac{dW}{dE} \right|_0 = \frac{W_0}{E_0} \left(4 - \frac{1}{1 - n} \right) = \frac{W_0}{E_0} \frac{3 - 4n}{1 - n} \quad (23)$$

и найти декремент

$$\zeta_E = \frac{1}{2T_0} \frac{W_0}{E_0} \frac{3 - 4n}{1 - n} \quad (24)$$

С другой стороны, подстановка в (20) дает:

$$\mathcal{D} = \frac{\frac{1 - 2n}{r_0^2} \frac{1}{1 - n} 2\pi r_0}{\frac{1}{r_0^2} 2\pi r_0} = \frac{1 - 2n}{1 - n} \quad (25)$$

⁹Подробнее его смысл раскрывается в разделе 2.3.

¹⁰В некоторых типах магнитных систем (не используемых для электронных ускорителей) второе слагаемое в числителе (20) может привести к значениям $\mathcal{D} \sim 1$, см. раздел 2.1.4 ниже.

и приводит к тому же ответу

$$\zeta_E = \frac{1}{2T_0} \frac{W_0}{E_0} (2 + \mathcal{D}) = \frac{1}{2T_0} \frac{W_0}{E_0} \frac{3 - 4n}{1 - n} \quad (26)$$

Этот результат показывает, что задолго до приближения n к границе устойчивости горизонтальных бетатронных колебаний $n = 1$, уже при $n > 3/4$, радиационное затухание энергетических колебаний переходит в их радиационную раскачку, dW/dE меняет знак с «естественного», отвечающего картине изображенной на Рис. 2, на парадоксальный: из-за слишком сильного спада поля на больших радиусах неравновесная частица, имея $E > E_0$ излучает меньше, а при $E < E_0$ – больше, чем равновесная частица.

2.1.3 Изомагнитное кольцо с разделенными функциями

Если все поворотные магниты имеют одинаковое поле, то $r_0 = const$ в (20), нижний интеграл дает $2\pi/r_0$, в итоге

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi} \oint ds_0 D \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{2G}{H_0 r_0} \right)_{\text{mag}}, \quad (27)$$

а интегрирование ведется только по участкам орбиты проходящим в магнитах. Во многих современных машинах используют магнитные системы с разделенными функциями: фокусировка осуществляется квадрупольными линзами, не отклоняющими равновесную орбиту, а поворотные магниты имеют однородное поле. Тогда на участках интегрирования $G = 0$, и

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi r_0} \oint \frac{D}{r_0} ds_0 = \frac{\alpha_p \Pi}{2\pi r_0} = \frac{\alpha_p R}{r_0} \ll 1. \quad (28)$$

Здесь мы использовали известное из предыдущих лекций выражение для коэффициента удлинения орбит α_p , (обычно $\alpha_p \sim 1/\nu_x^2 \ll 1$) и ввели средний радиус орбиты $R = \Pi/2\pi$, где Π – ее периметр.

Для данного случая декремент имеет простой вид:

$$\zeta_E = \frac{W_0}{2T_0 E_0} \left(2 + \frac{\alpha_p R}{r_0} \right) \approx \frac{W_0}{T_0 E_0} = \frac{I_0}{E_0} \quad (29)$$

а время затухания – его обратная величина – примерно соответствует времени излучения частицей всей ее энергии.

2.1.4 Изомагнитное кольцо с совмещенными функциями

Если же в изомагнитном кольце для фокусировки поперечных отклонений частицы применяются секторные поворотные магниты с неоднородными полями (т.е. функции поворота и фокусировки совмещены), ситуация в корне меняется. В задаче 12 из Задания, используя подстановку

$$D \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{2G}{H_0 r_0} \right) = -2D'' + \frac{2}{r_0} - \frac{D}{r_0^2}$$

из (12) в подынтегральное выражение (27) и уничтожая D'' интегрированием по частям, получен следующий результат:

$$\mathcal{D} = 2 - \frac{\alpha_p R}{r_0}.$$

В разделе 2.3 мы увидим, что он означает непригодность такой магнитной системы для электронных ускорителей.

2.2 Затухание вертикальных бетатронных колебаний

Наиболее простой способ рассмотрения этого вопроса – это ввести в усредненные уравнения вертикальных бетатронных колебаний силу радиационного трения \mathbf{F}_{rad} . Она вызвана отдачей при излучении частицей определенного потока энергии, что означает и соответствующий поток импульса. Для ультрарелятивистской частицы этот поток сосредоточен в узком конусе вдоль ее скорости, поэтому реакцию излучения можно с большой точностью считать направленной против мгновенной скорости:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\frac{I \mathbf{v}}{c v} = -\frac{I}{c^2} \mathbf{v}, \quad F_{\text{rad},z} = -\frac{I}{c^2} \dot{z}. \quad (30)$$

Вертикальную проекцию силы реакции излучения подставляем в усредненное уравнение вертикальных бетатронных колебаний:

$$\ddot{z} + \omega_\beta^2 z = \frac{1}{\gamma m} F_{\text{rad},z} = -\frac{I}{\gamma m c^2} \dot{z}. \quad (31)$$

С учетом соотношений $\gamma m c^2 = E_0$, $I = W_0/T_0$, перепишем его в стандартной форме:

$$\ddot{z} + 2\frac{W_0}{2T_0 E_0} \dot{z} + \omega_\beta^2 z = 0, \quad (32)$$

оно описывает затухающие колебания, и тем самым мы нашли декремент затухания вертикальных бетатронных колебаний:

$$\zeta_z = \frac{W_0}{2T_0 E_0}. \quad (33)$$

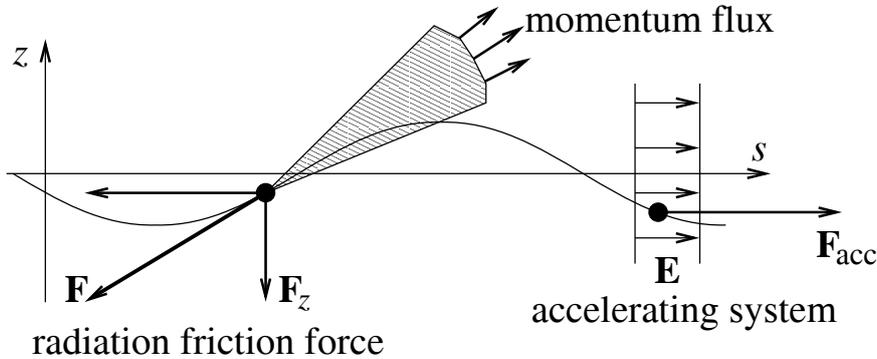


Рис. 3: В ультрарелятивистском случае импульс отдачи при излучении направлен против скорости частицы; при этом продольная компонента силы радиационного трения компенсируется ускоряющей системой, а поперечная компонента дает затухание вертикальных бетатронных колебаний.

Более строгое рассмотрение, не использующее усредненного описания колебаний и пригодное для жесткофокусирующих систем приводится ниже.

Разобьем движение на орбите на бесконечно короткие участки, где поочередно происходит либо излучение и компенсация потерь, либо фокусировка частиц. Возьмем на входе участка излучения бетатронные переменные z_1, z'_1 .

$$z'_1 = \frac{p_\perp}{p_\parallel}. \quad (34)$$

На выходе координата не изменится, а изменение импульса вызванное излучением δp_{rad} и действием ускоряющей системы δp_{acc} отразится лишь на величине угла z' :

$$z'_2 = \frac{p_{\perp} - \delta p_{rad} p_{\perp}/p_{\parallel}}{p_{\parallel} - \delta p_{rad} + \delta p_{acc}} \approx \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \left(1 - \frac{\delta p_{acc}}{p_{\parallel}} \right) \approx z'_1 \left(1 - \frac{\delta p_{acc}}{p} \right). \quad (35)$$

Компенсация радиационных потерь означает, что $\delta p_{acc} = \delta p_{rad} = \delta p = \delta E/c$, и в результате

$$\Delta z' = -z' \frac{\delta p}{p}. \quad (36)$$

В итоге, действие этого бесконечно короткого участка на бетатронные переменные описывается матрицей U :

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \delta p/p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_1 = U \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_1. \quad (37)$$

Описание действия фокусирующих участков дается известными из предыдущих лекций транспортными матрицами T . Преобразование M , задающее полный обход орбиты разбитой на такие пары участков, получаем перемножением соответствующих матриц:

$$M = \prod_n U_n T_n. \quad (38)$$

Вычислим определитель M , учитывая, что $\det T_n = 1$,

$$\det M = \prod_n \det U_n \approx 1 - \frac{\sum_n \delta p_n}{p} = 1 - \frac{\sum_n \delta E_n}{cp} = 1 - \frac{W}{E} \quad (W \ll E). \quad (39)$$

Собственные числа M определяют поведение этой динамической системы. Для матрицы с действительными коэффициентами они образуют комплексно-сопряженную пару; запишем их в виде

$$\lambda_{1,2} = \exp[-\xi \pm i\mu]. \quad (40)$$

Определитель M равен произведению ее собственных чисел:

$$\det M = \lambda_1 \lambda_2 = \exp[-2\xi] \approx 1 - 2\xi, \quad \xi \ll 1. \quad (41)$$

Приравнявая (39) и (41), находим коэффициент затухания амплитуды колебаний на одном обороте $e^{-\xi}$, где

$$\xi = \frac{W}{2E}. \quad (42)$$

Отсюда находится декремент затухания вертикальных бетатронных колебаний:

$$\zeta_Z = \frac{W}{2T_0 E}. \quad (43)$$

Итак, результат более аккуратного анализа совпал с (33).¹¹

¹¹В отличие от рассмотрения проведенного в разделе 2.1, здесь величины W , E и т.п. всегда относятся к частице с равновесной энергией; экономия обозначения, мы не везде помечали их индексом 0.

2.3 Затухание горизонтальных бетатронных колебаний. Теорема о сумме радиационных декрементов

Связь горизонтальных бетатронных колебаний с синхротронными

$$x'' + K_x(s)x = \frac{1}{r_0(s)} \frac{\Delta E}{E} \quad (44)$$

создает трудности, которых мы не имели в предыдущих разделах: вертикальные бетатронные колебания предполагались полностью независимыми от других степеней свободы; синхротронные колебания ввиду их медленности практически не подвержены воздействию со стороны горизонтальных бетатронных колебаний, их связь не взаимна, поскольку во многих вопросах можно полагать, что это быстрое воздействие «высредняется» за время периода продольного движения. Иными словами, движение очень массивного продольного осциллятора практически независимо от связанного с ним горизонтального, а симметричное утверждение неверно.

Поэтому прямое вычисление радиационных эффектов в горизонтальном бетатронном движении гораздо более громоздко, чем рассмотрение данное в 2.1 и 2.2. Гораздо легче доказать некое общее утверждение о сумме радиационных декрементов, и затем из него найти скорость затухания горизонтальных бетатронных колебаний.

Обобщим на 3-мерный случай анализ, проведенный выше для одной (вертикальной) степени свободы частицы, движущейся в фокусирующих полях циклического ускорителя и подверженной действию реакции излучения.

Все сказанное там теперь относится к обоим поперечным степеням свободы,¹² и для построения полной 6-мерной матрицы U недостает лишь данных о действии участков излучения на динамические переменные продольного движения τ , $\Delta E = E - E_0$.

Излучение, естественно, не изменяет τ , а энергия на выходе участка E_2 отличается от значения E_1 на входе за счет добавки от ускоряющей системы δE_{acc} , одинаковой для всех частиц прилетевших в момент τ_1 , и излученной энергии $\delta E_{\text{rad}}(E_1)$, зависящей от энергии частицы:

$$E_2 = E_1 - \delta E_{\text{rad}}(E_1) + \delta E_{\text{acc}}. \quad (45)$$

Вспоминая, что мощность излучения $I \propto H^2 E^2$, находим

$$\delta E_{\text{rad}}(E_1) = \left(\delta E_{\text{rad}}(E_0) + 2 \frac{\delta E_{\text{rad}}(E_0)}{E_0} (E_1 - E_0) + 2 \frac{\delta E_{\text{rad}}(E_0)}{H_0} \left. \frac{dH}{dx} \right|_0 x \right) \left(1 + \frac{x}{r_0} \right), \quad (46)$$

где учтена явная зависимость излученной мощности от энергии частицы E_1 , неоднородность ведущего поля, а также удлинение пути при наличии горизонтального отклонения x , ср. (10).

В стационарном случае имеем: $\delta E_{\text{acc}} = \delta E_{\text{rad}}(E_0) = \delta E = c\delta p$. Используя обозначение $G = dH/dx|_0$ для градиента ведущего поля, упрощаем результат для изменения энергии на участке излучения и ускорения:

$$\Delta E_2 = \Delta E_1 - 2 \frac{\delta E}{E_0} \Delta E_1 - \delta E \left(\frac{1}{r_0} + 2 \frac{G}{H_0} \right) x = -\delta E \left(\frac{1}{r_0} + 2 \frac{G}{H_0} \right) x + \left(1 - 2 \frac{\delta E}{E_0} \right) \Delta E_1 \quad (47)$$

В итоге, в 6-мерной матрице перехода U , действующей на вектор $(x, x', z, z', \tau, \Delta E)$ на этом участке, отличны от 0 только элемент U_{61} и элементы стоящие на диагонали:

$$\{U_{11}, U_{22}, U_{33}, U_{44}, U_{55}, U_{66}\} = \left\{ 1, 1 - \frac{\delta p}{p}, 1, 1 - \frac{\delta p}{p}, 1, 1 - 2 \frac{\delta E}{E} \right\}, \quad (48)$$

¹²В этом доказательстве в роли x фактически используется полное горизонтальное отклонение $x = x_p + x_\beta$, а не одна лишь его бетатронная часть x_β .

и теперь $\det U = 1 - 4\delta E/E$. Повторяя рассуждения данные в 2.2, находим для преобразования через один оборот:

$$M = \prod_n U_n T_n \quad (49)$$

$$\det M = \prod_n \det U_n \approx 1 - 4 \frac{\sum_n \delta E_n}{E} = 1 - 4 \frac{W}{E} \quad (50)$$

6-мерная матрица M имеет три комплексно-сопряженные пары собственных чисел:

$$\lambda_{X1,2} = \exp[-\xi_X \pm i\mu_X], \quad \lambda_{Z1,2} = \exp[-\xi_Z \pm i\mu_Z], \quad \lambda_{E1,2} = \exp[-\xi_E \pm i\mu_E], \quad (51)$$

и через их произведение можно записать другое выражение для ее определителя:

$$\det M = \prod_{X,Z,E} \lambda_1 \lambda_2 = \exp[-2(\xi_X + \xi_Z + \xi_E)] \approx 1 - 2(\xi_X + \xi_Z + \xi_E), \quad \xi_{X,Z,E} \ll 1. \quad (52)$$

Приравнивая (52) и (50), находим связь суммы безразмерных радиационных декрементов с энергией, потерянной за оборот:

$$\xi_Z + \xi_X + \xi_E = 2 \frac{W}{E}, \quad (53)$$

или, с учетом (33) получаем для суммы обычных декрементов:

$$\zeta_Z + \zeta_X + \zeta_E = 2 \frac{W}{T_0 E}. \quad (54)$$

Важно, что эта сумма никак не зависит от характера и силы связи между тремя степенями свободы.¹³

Для случая, когда вертикальное движение независимо от остальных степеней свободы, мы ранее получили: $\zeta_Z = W/(2T_0 E)$, и (54) упрощается,

$$\zeta_X + \zeta_E = 3\zeta_Z, \quad (55)$$

Доказанные выше соотношения (54,55) принято называть теоремой Робинсона (K. Robinson, 1958).

Из (55) мы сможем найти декремент радиационного затухания горизонтальных бетатронных колебаний, поскольку для остальных двух степеней свободы результат уже известен:

$$\zeta_X = 3\zeta_Z - \zeta_E = \zeta_Z(1 - \mathcal{D}). \quad (56)$$

Теперь становится ясно, что параметр \mathcal{D} отвечает за перераспределение декрементов внутри рамок, наложенных теоремой Робинсона; с учетом (56), (55) можно записать в безразмерном виде:

$$J_X + J_E \equiv \frac{\zeta_X}{\zeta_Z} + \frac{\zeta_E}{\zeta_Z} = (1 - \mathcal{D}) + (2 + \mathcal{D}) = 3 \quad (57)$$

Для затухания колебаний всех трех степеней свободы необходимо иметь $-2 < \mathcal{D} < 1$, причем верхняя граница соответствует переходу затухания горизонтальных бетатронных колебаний в радиационное анти-затухание, неприемлемое для электронных машин, см. магнитную систему, рассмотренную в 2.1.4.

В заключение надо обсудить вигглеры для усиления затухания, робинсоновские вигглеры для перераспределения декрементов (без такого вигглера ВЭПП-4 не может работать!).

¹³Вся информация о связи трех колебательных степеней свободы в этой гамильтоновой (до включения трения!) системе содержалась в матрицах (канонического преобразования) T_n и не вошла в ответ, поскольку $\det T_n = 1$.

3 Квантовые флуктуации синхротронного излучения и раскачка колебаний. Установившиеся размеры пучка в электронном накопителе.

Характерное время радиационного затухания колебаний много меньше времени жизни пучка в электронных накопителях, в связи с чем возникает законный вопрос: до каких пределов может уменьшаться амплитуда колебаний за столь долгое время? Разумеется, при обсуждении таких вопросов следует помнить о пределах применимости используемого нами классического описания движения частицы.

3.1 О границах применимости классического рассмотрения движения частиц и излучаемых ими полей

Из квантовой механики известно, что осциллятор не может иметь энергию ниже уровня своего основного состояния, $E_{\min} = \hbar\omega/2$. Воспользуемся этим соотношением в системе отсчета, летящей со скоростью $v_{\parallel} \approx v_0$, и сопровождающей электрон, который движется вдоль равновесной орбиты¹⁴ и совершает малые¹⁵ поперечные колебания. Поскольку длина волны бетатронных колебаний $\lambda_{\beta} = 2\pi\beta_{x,z}$ определяется расстановкой фокусирующих элементов вдоль орбиты, а эти продольные масштабы в летящей системе подвергаются лоренц-сжатию с соответствующим значением лоренц-фактора $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, можно просто найти частоту бетатронного осциллятора в лабораторной $c/\beta_{x,z}$, а затем и в сопровождающей системе отсчета: $\omega = \gamma_0 c/\beta_{x,z}$ (здесь взято $v_{\parallel} \approx c$).

Сопоставление E_{\min} с классическими формулами для энергии осциллятора, выраженной через амплитуду колебаний его отклонения A и импульса p_{\perp} , дает оценки для квантовомеханической неопределенности этих величин:

$$E_{\min} = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\frac{\hbar c}{\beta_{x,z}}\gamma_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{p_{\perp}^2}{2m}, \quad (1)$$

откуда

$$A^2 = \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{\hbar\beta_{x,z}}{mc\gamma_0} = \frac{\lambda_e\beta_{x,z}}{\gamma_0}, \quad (2)$$

и

$$p_{\perp}^2 = m\hbar\omega = (mc\gamma_0)^2 \frac{\lambda_e}{\beta_{x,z}\gamma_0} = p_0^2 \frac{\lambda_e}{\beta_{x,z}\gamma_0}. \quad (3)$$

При пересчете из сопровождающей системы отсчета в лабораторную эти поперечные проекции сохраняют свои значения. Подстановка чисел показывает пренебрежимо малость величин A , p_{\perp} в масштабах, характерных для динамики в ускорителях, чем и оправдывается использование классической механики для описания движения частиц в ускорителях, особенно в ультрарелятивистской области. Важно отметить, что с ростом энергии квантовомеханическая неопределенность наших бетатронных переменных x , z и x' , $z' \propto p_{\perp}/p_0$ уменьшается,¹⁶ что особенно явно видно в их произведении $A \cdot p_{\perp}/p_0 \sim \lambda_e/\gamma_0$, характеризующем неопределенность в фазовом пространстве колебаний.

Итак, квантовые уравнения движения практически не требуются для описания динамики в ускорителях. В то же время, квантованный характер излучения, не учтенный

¹⁴В этой простой оценке пренебрегаем кривизной орбиты.

¹⁵Достаточно малые, чтобы считать движение в сопровождающей системе отсчета нерелятивистским.

¹⁶Упражнение: показать, что обычно $\beta_{x,z}/E_0 \rightarrow 0$, если используется жестко-фокусирующая магнитная система.

ранее, оказывается очень важным для релятивистских электронов движущихся в ускорителе: толчки отдачи при испускании каждого кванта приводят к раскачке колебаний электрона. Эти толчки, распределены случайным образом по времени и по величине. Мы можем учесть их в классических уравнениях движения как шумовой процесс и получить правильную оценку их влияния на движение электрона, не прибегая к использованию релятивистской квантовой теории, строго описывающей движение релятивистской излучающей частицы. Квантовые флуктуации синхротронного излучения — общепринятое название такой модели.

3.2 Квантовая раскачка синхротронных колебаний

Мгновенно излучаемые гамма-кванты уменьшают энергию электрона нерегулярным образом, ввиду случайности как значения своей энергии E_{qi} , так и момента излучения t_i . Начнем с оценки неопределенности величины энергии электрона δE , которая накапливается со временем и определяется квадратичным суммированием энергий всех N квантов, статистически-независимо излученных за время τ :

$$(\delta E)^2 = \sum_i^N E_{qi}^2 \sim N \langle E_{qi}^2 \rangle \sim N (\hbar\omega_c)^2, \quad (4)$$

по порядку величины средняя энергия излучаемых квантов оценена как энергия квантов, соответствующих максимуму спектра, а значит — критической частоте синхротронного излучения $E_{qc} = \hbar\omega_c$, $\omega_c = \frac{3}{2}c/r_0$. Отклонения энергии, в том числе и случайные, испытывают радиационное затухание с характерным временем $\tau \sim T_0 E_0 / W_0$, им и ограничивается накопление неопределенности энергии δE , или иными словами — статистического разброса ее значения. Подсчитав число излученных за время τ квантов,

$$N \sim \tau \frac{W_0}{\hbar\omega_c} \frac{1}{T_0} \sim \frac{T_0 E_0}{W_0} \frac{W_0}{\hbar\omega_c} \frac{1}{T_0} = \frac{E_0}{\hbar\omega_c}, \quad (5)$$

находим: $\delta E \sim \sqrt{E_0 \hbar\omega_c}$, а для относительной величины энергетического разброса имеем:

$$\frac{\delta E}{E} \sim \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{E_0}} = \sqrt{\frac{3\hbar c \gamma^3}{2mc^2 r_0 \gamma}} \sim \sqrt{\frac{\lambda_e}{r_0}} \gamma, \quad \left(\frac{\delta E}{E} \lesssim 10^{-3} \right) \quad (6)$$

Результат вовсе не мал, особенно когда речь идет об использовании пучка электронов с таким энергетическим разбросом в точных экспериментах по физике элементарных частиц. Таким образом, оценка показывает большую практическую важность механизма квантовой раскачки синхротронных колебаний, ограничивающего снизу процесс радиационного затухания амплитуды колебаний, для современных электронных машин.

3.2.1 Скорость роста амплитуды колебаний

Для точного расчета сначала найдем приращение амплитуды малых синхротронных колебаний при излучении каждого кванта. Пусть начальная амплитуда A_1 , а фаза колебания задается константой t_1 , тогда перед излучением кванта отклонение энергии частицы от равновесного значения описывается как

$$\Delta E_1 = \text{Re} [A_1 e^{-i\Omega_s(t-t_1)}] \quad (7)$$

а после мгновенного излучения кванта с энергией ε в момент t получаем новые параметры, помеченные индексом 2:

$$\Delta E_2 = \text{Re} [A_1 e^{-i\Omega_s(t-t_1)}] - \varepsilon = \text{Re} [A_2 e^{-i\Omega_s(t-t_2)}] \quad (8)$$

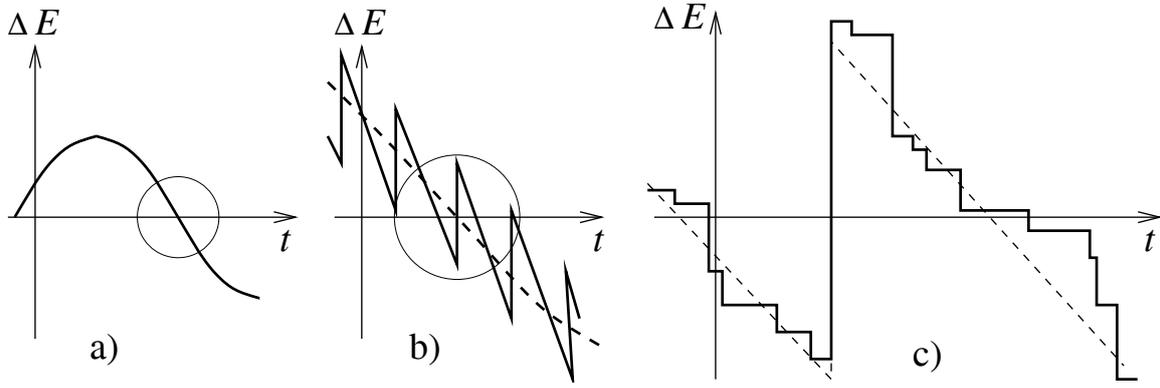


Рис. 1: Детальное изображение синхротронных колебаний. а) Сглаженная картина колебаний. б) Регулярные зубцы с периодом обращения соответствуют компенсации радиационных потерь в магнитах кольца один раз за оборот. в) Кванты излучения вносят случайный элемент в зависимость энергии частиц от времени.

Поскольку нас интересует только изменение амплитуды, приравниваем модули этих комплексных выражений:

$$|A_2|^2 = |A_1 e^{-i\Omega_s(t-t_1)} - \varepsilon|^2 = |A_1|^2 - 2\varepsilon |A_1| \cos[\Omega_s(t-t_1) - \arg A_1] + \varepsilon^2 \xrightarrow{t} |A_1|^2 + \varepsilon^2 \quad (9)$$

Излучение происходит в произвольный момент времени и потому равновероятно для любой фазы колебания, усреднение по фазе уничтожает эффект первого порядка по ε , на Рис. 2 он проявляется в том, что амплитуда может как возрасть, так и уменьшаться. В итоге находим вероятное приращение квадрата амплитуды синхротронных колебаний при излучении одного кванта:

$$\delta A^2 = \langle |A_2|^2 - |A_1|^2 \rangle_t = \varepsilon^2 \quad (10)$$

За единицу времени в среднем излучается \dot{N}_n квантов с энергией ε_n , следовательно, средняя скорость роста квадрата амплитуды, вызванная квантовыми флуктуациями излучения:

$$\left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu} = \sum_n \dot{N}_n \varepsilon_n^2 \quad (11)$$

а сумма берется по спектру излучаемых квантов. Как и следовало ожидать, действие случайного процесса определяется его квадратичными характеристиками.

Для оценки можно заменить энергию кванта ее типичной для спектра синхротронного излучения величиной: $\varepsilon_n \sim \hbar\omega_c$, тогда суммирование по спектру даст полное число квантов всех энергий, излученных за единицу времени: $\sum_n \dot{N}_n = N_q \sim W_0/(T_0 \hbar\omega_c)$, а для скорости роста амплитуд получим (подразумевая изомагнитное кольцо периметра $\Pi = 2\pi R$):

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu} &\sim \frac{W_0}{T_0 \hbar\omega_c} (\hbar\omega_c)^2 = I \hbar\omega_c = \frac{\frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{r_0} \gamma^4}{\frac{2\pi R}{c}} \frac{3}{2} \hbar \frac{c}{r_0} \gamma^3 = \frac{\hbar c^2 e^2}{R r_0^2} \gamma^7 \\ &= (\gamma m c^2)^2 \frac{e^2}{m c^2} \frac{\hbar}{m c} \frac{c}{r_0^3} \frac{r_0}{R} \gamma^5 = E_0^2 \frac{c r_e \lambda_e}{r_0^3} \frac{r_0}{R} \gamma^5 \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидна резко возрастающая с ростом энергии роль этого эффекта, а также сильная зависимость от кривизны орбиты электрона.

3.2.2 Суммирование по спектру квантов

Для точного расчета заметим, что множители в суммируемом выражении (11) можно записать иначе: $\dot{N}_n \varepsilon_n^2 = \varepsilon_n (\dot{N}_n \varepsilon_n)$, и тогда, учитывая что спектр квантов в этой задаче

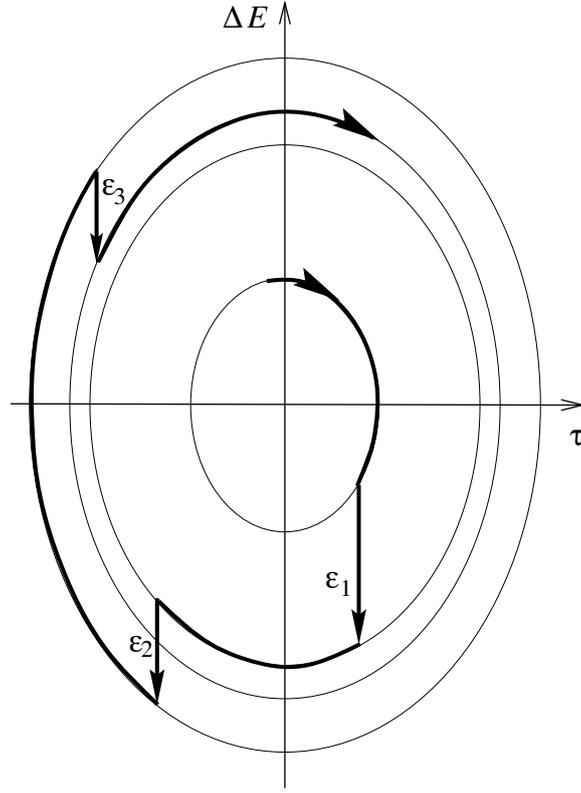


Рис. 2: Хаотические изменения амплитуды синхротронных колебаний, связанные с квантовым характером радиационных потерь.

непрерывный, второй множитель выражается через спектральную плотность излученной мощности, соответствуя интервалу частот $(\omega, \omega + d\omega)$,

$$\dot{N}_n \varepsilon_n = \frac{dI}{d\omega} d\omega \quad (13)$$

а первый $\varepsilon_n = \hbar\omega$. В итоге статистическая сумма по спектру квантов заменяется интегралом по частотам

$$\sum_n \dot{N}_n \varepsilon_n^2 = \int_0^\infty \hbar\omega \frac{dI}{d\omega} d\omega \quad (14)$$

Вспоминая, что для синхротронного излучения

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{I}{\omega_c} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (15)$$

где $S(y)$ — безразмерная спектральная функция

$$S(y) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} y \int_y^\infty K_{5/3}(y') dy', \quad \int_0^\infty S(y) dy = 1 \quad (16)$$

подставляем (15) в (14) и переходим к безразмерной переменной интегрирования $y = \omega/\omega_c$:

$$\sum_n \dot{N}_n \varepsilon_n^2 = \hbar\omega_c I \int_0^\infty y S(y) dy = \frac{55}{24\sqrt{3}} \hbar\omega_c I \quad (17)$$

Безразмерный интеграл дал численный множитель ~ 1 , а существенная часть ответа совпала с оценкой (12). Параметры излучения относятся к данной точке орбиты, с радиусом кривизны r_0 :

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{r_0} \gamma^3, \quad I = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{r_0^2} \gamma^4 \quad (18)$$

однако, учитывая медленность радиационных процессов в масштабе T_0 , имеет смысл усреднить их по времени обращения, что эквивалентно усреднению по периметру орбиты:

$$\langle \hbar\omega_c I \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \hbar\omega_c I dt = \hbar c^2 e^2 \gamma^7 \frac{1}{2\pi R} \oint \frac{ds}{r_0^3(s)} = \hbar c^2 e^2 \gamma^7 \left\langle \frac{1}{r_0^3} \right\rangle \left(= \frac{\hbar c^2 e^2}{R r_0^2} \gamma^7, \text{ изомаг.} \right) \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) и далее в (11), получаем для скорости роста амплитуды синхротронных колебаний из-за квантовых флуктуаций синхротронного излучения точное выражение:

$$\left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \hbar c^2 e^2 \gamma^7 \left\langle \frac{1}{r_0^3} \right\rangle = E_0^2 \cdot \frac{55 c r_e \lambda_e}{24\sqrt{3}} \gamma^5 \left\langle \frac{1}{r_0^3} \right\rangle \quad (20)$$

3.2.3 Установившийся энергетический разброс в электронном пучке

Добавим в наше рассмотрение радиационное затухание амплитуд с характерным временем τ_E и декрементом $\zeta_E = \tau_E^{-1}$,

$$\zeta_E = \frac{W_0}{2T_0 E_0} (2 + \mathcal{D}) = J_E \frac{c e^2 \gamma^4}{3 m c^2 \gamma} \left\langle \frac{1}{r_0^2} \right\rangle = \frac{1}{3} J_E c r_e \gamma^3 \left\langle \frac{1}{r_0^2} \right\rangle \quad (21)$$

Полное уравнение, описывающее поведение среднеквадратичных амплитуд (где следует учесть, что A^2 затухает вдвое быстрее, чем A), отражает конкуренцию двух радиационных эффектов: квантовой раскачки (шумовой процесс) и затухания, связанного с «гладкой» частью процесса излучения:

$$\frac{dA^2}{dt} = -2\zeta_E A^2 + \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu} \quad (22)$$

Оно имеет экспоненциальные решения, стремящиеся к стационарному значению

$$A_{st}^2 = \frac{1}{2\zeta_E} \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu} = \frac{\tau_E}{2} \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu} \quad (23)$$

когда наступает равновесие между раскачкой и затуханием. Эти установившиеся, или равновесные амплитуды определяют ширину гауссова распределения отклонений ΔE , формирующегося под действием множества (малых) некоррелированных случайных толчков при излучении квантов:

$$p(\Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_E} \exp \left[-\frac{(\Delta E)^2}{2\sigma_E^2} \right], \quad \sigma_E^2 = \overline{(\Delta E)^2} \quad (24)$$

Для гармонических колебаний связь между амплитудой и среднеквадратичным отклонением очевидна: $\overline{(\Delta E)^2} = \overline{A^2 \cos^2(\Omega_s t + \phi)} = \frac{1}{2} A^2$. Подставляя (20), (21) в (23) и переходя к относительным величинам, имеем:

$$\frac{A_{st}^2}{E_0^2} = \frac{55}{16\sqrt{3}} \frac{\lambda_e}{J_E} \left\langle \frac{1}{r_0^3} \right\rangle \gamma^2, \quad (25)$$

и тогда

$$\frac{\overline{(\Delta E)^2}}{E_0^2} = \left(\frac{\sigma_E}{E_0} \right)^2 = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\lambda_e}{J_E} \left\langle \frac{1}{r_0^3} \right\rangle \gamma^2, \quad \left(\approx \frac{\lambda_e}{2r_0} \gamma^2, \text{ изомаг.} \right) \quad (26)$$

Отметим, что численный множитель здесь $\frac{55}{32\sqrt{3}} = 0.992 \approx 1$, а полученный результат совпал с оценкой (6) по порядку величины. Он никак не зависит от параметров ускоряющей системы, увеличивается для орбит с большей кривизной, а конкретное устройство фокусирующей системы влияет лишь на безразмерный декремент $J_E = 2 + \mathcal{D}$.

С ростом энергии в каждой данной машине относительный энергетический разброс линейно возрастает. На максимальной энергии электронного накопителя он обычно составляет $\sim 0.5 \cdot 10^{-3}$ для самых разных машин. Такое совпадение удивительно лишь на первый взгляд. Оно вызвано ограничением, наложенным на мощность синхротронного излучения $\propto \gamma^4/r_0^2$, технически приемлемую для системы охлаждения приемников излучения, расположенных по периметру орбиты.

Задача. Используя (26), показать, что установка вигглеров с полями, намного превышающими типичные величины, использованные в поворотных магнитах кольца, увеличивает равновесный энергетический разброс (несмотря на усиления радиационного затухания).

3.2.4 Установившийся продольный размер электронного сгустка

Продольные отклонения электронов в пучке, сгруппированном вокруг равновесной частицы, связаны с $\Delta E = A \cos(\Omega_s t + \phi)$ уравнением синхротронных колебаний:

$$\dot{\tau} = \alpha_p \frac{\Delta E}{E} \quad (27)$$

откуда $\tau = \tau_{\max} \sin(\Omega_s t + \phi)$, а амплитуда продольного отклонения τ_{\max} для рассматриваемых здесь малых (гармонических) колебаний просто выражается через амплитуду энергетического отклонения A :

$$c\tau_{\max} = \frac{c \alpha_p A}{\Omega_s E} \quad (28)$$

Установившееся продольное распределение электронов в сгустке также гауссово:

$$p(c\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp \left[-\frac{c^2 \tau^2}{2 \sigma_l^2} \right], \quad (29)$$

а гауссова длина сгустка σ_l пропорциональна установившемуся энергетическому разбросу

$$\sigma_l = \frac{c \alpha_p \sigma_E}{\Omega_s E} \propto \sqrt{\frac{\alpha_p}{qU_0}} \quad (30)$$

и (в отличие от σ_E) зависит от параметров ускоряющей системы. В электронных машинах прежнего поколения $\sigma_l \sim 5$ см, в современных накопителях $\sigma_l \lesssim 1$ см.

3.3 Квантовая раскачка горизонтальных бетатронных колебаний

Скачки энергии электрона, излучающего кванты, прямым образом воздействовали на динамическую переменную продольного движения ΔE и вызывали прирост амплитуды синхротронных колебаний. Механизм возбуждения горизонтальных бетатронных колебаний несколько сложнее: скачок энергии при испускании кванта (в среднем, вдоль скорости) не меняет значений горизонтальной координаты и соответствующего ей импульса. Однако, при изменении энергии началом отсчета бетатронных переменных служит уже другая замкнутая орбита. Такой мгновенный сдвиг положения равновесия и приводит к раскачке колебаний бетатронного осциллятора.

Фактически, раскачка горизонтальных бетатронных колебаний происходит за счет их связи с синхротронным движением, как явствует из уравнения:

$$x'' + K_x x = \frac{1}{r_0} \frac{\Delta E}{E}. \quad (31)$$

Здесь величина ΔE , определяющая положение равновесия осциллятора, испытывает прямое воздействие квантовых флуктуаций излучения, и ее случайное поведение ведет к шумовому возбуждению бетатронного движения.

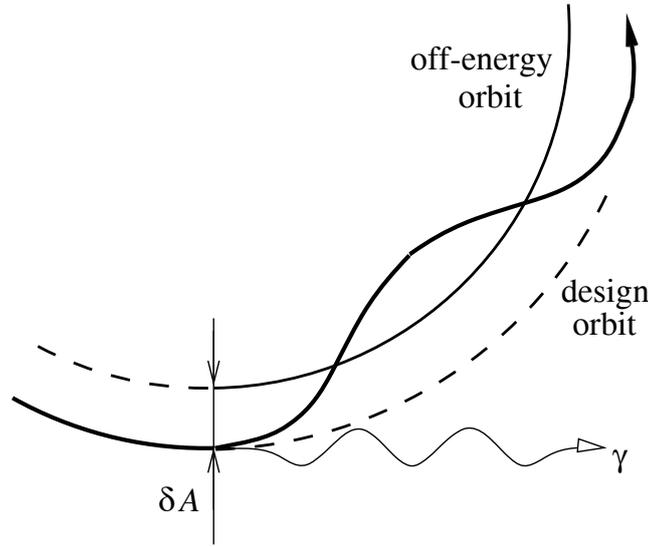


Рис. 3: Раскачка амплитуды горизонтальных бетатронных колебаний, вызванная излучением кванта.

Поясним сказанное на простом примере азимутально-симметричной магнитной системы, рис. 3. Пусть электрон, двигаясь по равновесной орбите, излучает квант энергии ε в касательном к ней направлении. Положение на орбите и поперечный импульс остаются неизменными, а новая замкнутая орбита имеет сдвиг, определяемый дисперсией: $-D \varepsilon/E$. Возникают горизонтальные колебания с амплитудой $D \varepsilon/E$, и для случайно распределенных по времени актов излучения такие приращения амплитуды далее следует квадратично суммировать.

3.3.1 Скорость роста амплитуды горизонтальных бетатронных колебаний

Мы знаем, что в жесткофокусирующих магнитных системах решение уравнения (31) можно представить в форме Флоке:

$$x(s) = A\sqrt{\beta_x(s)} \cos \psi(s), \quad \psi(s) = \int^s \frac{ds'}{\beta_x(s')}, \quad (32)$$

причем амплитуда выражается через инвариант Куранта-Снайдера,

$$A^2 = \gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 \quad (33)$$

где индексом x помечены параметры Твисса для горизонтального движения.

Подсчитаем приращение этой инвариантной амплитуды, вызванное излучением кванта с энергией ε и соответствующее изменению начала отсчета для бетатронных переменных (см. Рис. 4):

$$\delta x = -D(s) \frac{\varepsilon}{E}, \quad \delta x' = -D'(s) \frac{\varepsilon}{E} \quad (34)$$

Разлагая (33) до второго порядка по динамическим переменным x, x' ,

$$\delta A^2 = 2[\gamma_x x \delta x + \alpha_x (x \delta x' + x' \delta x) + \beta_x x' \delta x'] + \gamma_x (\delta x)^2 + 2\alpha_x \delta x \delta x' + \beta_x (\delta x')^2 \quad (35)$$

замечаем, что величины первого порядка исчезают при усреднении, $\bar{x} = 0$, $\bar{x'} = 0$, если учесть произвольность момента излучения. Тогда вероятное приращение инвариантной амплитуды – квадратичная по ε величина,

$$\delta A^2 = (\gamma_x D^2 + 2\alpha_x D D' + \beta_x D'^2) \frac{\varepsilon^2}{E^2} \equiv \mathcal{H} \frac{\varepsilon^2}{E^2} \quad (36)$$

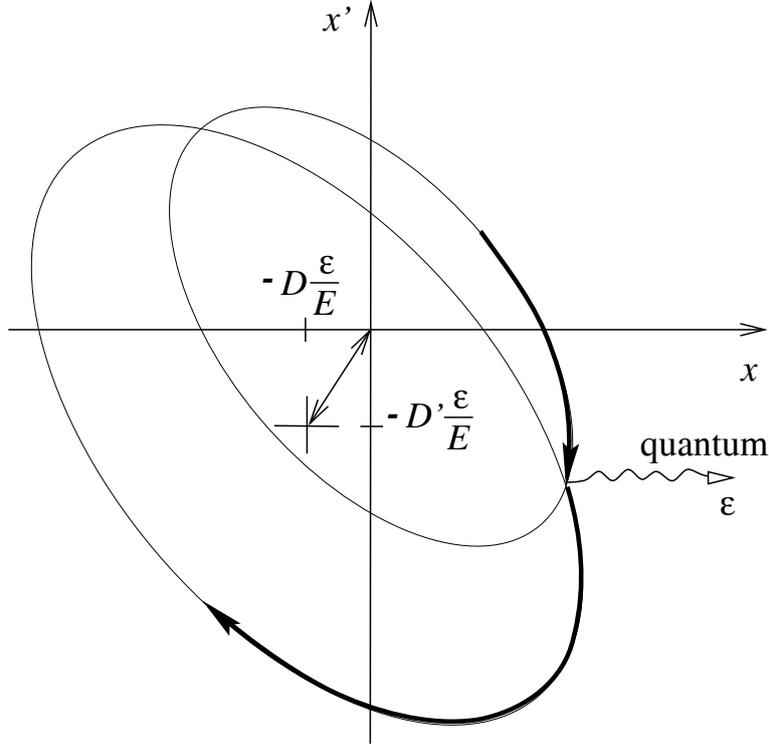


Рис. 4: Изменение фазовой траектории горизонтальных бетатронных колебаний при излучении кванта.

а зависимость от дисперсии в месте излучения задается комбинацией

$$\mathcal{H} = \gamma_x D^2 + 2 \alpha_x D D' + \beta_x D'^2 \quad (37)$$

которую иногда называют «инвариант дисперсии».

Дальнейшие шаги аналогичны действиям в разделах 3.2.1–3.2.3. Учитывая спектральное распределение квантов, по аналогии с (11) запишем скорость роста квадрата амплитуды:

$$\left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,x} = \frac{\mathcal{H}}{E^2} \sum_n \dot{N}_n \varepsilon_n^2 \quad (38)$$

Суммируя по спектру синхротронного излучения, см. (17), получим скорость раскачки инвариантной бетатронной амплитуды в данной точке орбиты:

$$\left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,x} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{\hbar \omega_c I}{E^2} \mathcal{H} = \frac{55}{24\sqrt{3}} c r_e \lambda_e \frac{\mathcal{H}}{r_0^3} \gamma^5 \quad (39)$$

Усредняя по периметру орбиты, по аналогии с (19), получаем среднюю скорость роста инвариантной амплитуды горизонтальных бетатронных колебаний электрона за счет квантовых флуктуаций синхротронного излучения

$$\left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,x} = \frac{55}{24\sqrt{3}} c r_e \lambda_e \left\langle \frac{\mathcal{H}}{r_0^3} \right\rangle \gamma^5 \quad (40)$$

3.3.2 Установившиеся значения горизонтальной амплитуды и эмиттанса пучка

Добавим в наше рассмотрение радиационное затухание амплитуд с характерным временем τ_X и декрементом $\zeta_X = \tau_X^{-1}$,

$$\zeta_X = \frac{W_0}{2T_0 E_0} (1 - \mathcal{D}) = J_X \frac{ce^2 \gamma^4}{3mc^2 \gamma} \left\langle \frac{1}{r_0^2} \right\rangle = \frac{1}{3} J_X cr_e \gamma^3 \left\langle \frac{1}{r_0^2} \right\rangle \quad (41)$$

и вновь учитываем, что A^2 затухает вдвое быстрее, чем A . Тогда эволюция среднеквадратичной амплитуды задается уравнением:

$$\frac{dA^2}{dt} = -2\zeta_X A^2 + \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,x} \quad (42)$$

Его решения — это релаксация к стационарному значению

$$A_{st}^2 = \frac{1}{2\zeta_X} \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,x} = \frac{\tau_X}{2} \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,x} \quad (43)$$

Отсюда, используя (32), можем найти среднеквадратичное горизонтальное отклонение

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} A_{st}^2 \beta_x \equiv \sigma_x^2 \quad (44)$$

задающее ширину σ_x гауссова распределения бетатронной координаты:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right], \quad (45)$$

Подставляя (40), (41) в (43) и используя (44), имеем:

$$\bar{\epsilon}_x \equiv \frac{\sigma_x^2}{\beta_x} = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\lambda_e}{J_X} \frac{\langle \mathcal{H}/r_0^3 \rangle}{\langle 1/r_0^2 \rangle} \gamma^2, \quad \left(\approx \frac{\lambda_e \langle \mathcal{H} \rangle_{\text{mag}}}{r_0} \gamma^2, \text{ изомаг.} \right) \quad (46)$$

Здесь мы ввели определение величины $\bar{\epsilon}_x$, которую называют среднеквадратичным эмиттансом гауссова пучка, и выразили его через установившийся горизонтальный бетатронный размер σ_x .

Двумерное гауссово распределение плотности электронного пучка на фазовой плоскости записывается с помощью среднеквадратичного эмиттанса в виде:

$$p(x, x') = \frac{1}{2\pi \bar{\epsilon}_x} \exp \left[-\frac{\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2}{2\bar{\epsilon}_x} \right] \quad (47)$$

Легко проверить, что его интегрирование по x' приводит к

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{\epsilon}_x \beta_x}} \exp \left[-\frac{x^2}{2\bar{\epsilon}_x \beta_x} \right] \quad (48)$$

и совпадает с (45), поскольку из (46)

$$\sigma_x = \sqrt{\bar{\epsilon}_x \beta_x} \quad (49)$$

Найденные нами в (46) бетатронный горизонтальный размер и эмиттанс пучка иногда называют «естественными»; они получились в результате равновесия между радиационным затуханием колебаний и их возбуждением вследствие квантовых флуктуаций синхротронного излучения. Их величина существенно зависит от силы горизонтальной фокусировки в кольце, поскольку в ответ входит $\langle \mathcal{H} \rangle \sim D^2/\beta_x$, а $D \sim 1/\nu_x^2$.

Задача. Показать, что для машин с примерно равномерным распределением силы горизонтальной фокусировки по кольцу

$$\bar{\epsilon}_x \approx \frac{\lambda_e \gamma^2 R}{\nu_x^3 r_0}, \quad \text{а} \quad \sigma_x \sim \frac{R \sigma_E}{\nu_x^2 E}. \quad (50)$$

3.3.3 Полный горизонтальный размер пучка

Вспоминая, что полное горизонтальное отклонение от равновесной орбиты разбито нами на два слагаемых (горизонтальные бетатронные колебания — это отклонение от замкнутой орбиты для частиц с неравновесной энергией, которая совершает медленное движение с синхротронной частотой), запишем для него:

$$x_{\text{tot}} = x + D \frac{\Delta E}{E} \quad (51)$$

Выражая отсюда бетатронную часть x , подставим ее в распределение (45), и учтем распределение для статистически-независимой переменной ΔE (24); их перемножение дает совместное распределение x_{tot} и ΔE :

$$p(x_{\text{tot}}, \Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x_{\text{tot}} - D \Delta E/E)^2}{2\sigma_x^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} \exp\left[-\frac{(\Delta E)^2}{2\sigma_E^2}\right], \quad (52)$$

Если нас не интересует переменная ΔE , проинтегрируем по ней и найдем в итоге распределение полных горизонтальных отклонений

$$p(x_{\text{tot}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x,\text{tot}}} \exp\left[-\frac{x_{\text{tot}}^2}{2\sigma_{x,\text{tot}}^2}\right] \quad (53)$$

При свертке двух гауссовых функций получится квадратичная сумма, определяющая полный горизонтальный размер электронного пучка в накопителе:

$$\sigma_{x,\text{tot}}^2 = \sigma_x^2 + D^2 \frac{\sigma_E^2}{E^2} \quad (54)$$

Подставляя сюда (49), (46) и (26), можно получить развернутый ответ. Оба слагаемых обычно сопоставимы по величине; они одинаково зависят от энергии, и потому $\sigma_{x,\text{tot}} \propto \gamma$. Однако ввиду разного поведения входящих в них $\beta_x(s)$ и $D^2(s)$, соответственно, отношение двух составляющих полного горизонтального размера не постоянно вдоль кольца.

3.4 Квантовая раскачка вертикальных бетатронных колебаний

В идеальной магнитной системе орбиты частиц с любой неравновесной энергией лежат в одной — горизонтальной — плоскости, поэтому ясно, что рассмотренные нами прежде механизмы раскачки колебаний, где квант испускается вдоль направления движения, никак не влияют на вертикальные колебания. В разделах 3.2, 3.3 такое бесконечно узкое угловое распределение было достаточно точным приближением, однако, рассматривая вертикальное движение, нам придется учитывать конечную ширину углового распределения излучения.

Если квант с энергией ε излучается под углом χ к плоскости орбиты, то вертикальная проекция импульса отдачи $\delta p_z = -\chi\varepsilon/c$ напрямую ведет к раскачке вертикальных колебаний, $\delta z' = -\delta p_z/p_0$, см. Рис. 5. По аналогии с 3.3.1 (ср. (35), (36)), приращение квадрата инвариантной амплитуды вертикальных бетатронных колебаний в среднем составит

$$\delta A^2 = \beta_z (\delta z')^2 = \beta_z \frac{\varepsilon^2}{E^2} \chi^2 \quad (55)$$

причем дальнейшее суммирование надо вести в два приема: сначала для энергии кванта ε суммировать по углам излучения¹⁷ χ , а затем по энергетическому спектру квантов:

$$\frac{dA^2}{dt} = \frac{\beta_z}{E^2} \sum_n \dot{N}_n \varepsilon_n^2 \sum_j P_{nj} \chi_j^2 \sim \frac{\hbar\omega_c I}{E^2} \beta_z \frac{1}{\gamma^2} \quad (56)$$

¹⁷При этом следует помнить, что угловые распределения синхротронного излучения зависят от частоты, и тем самым от энергии кванта.

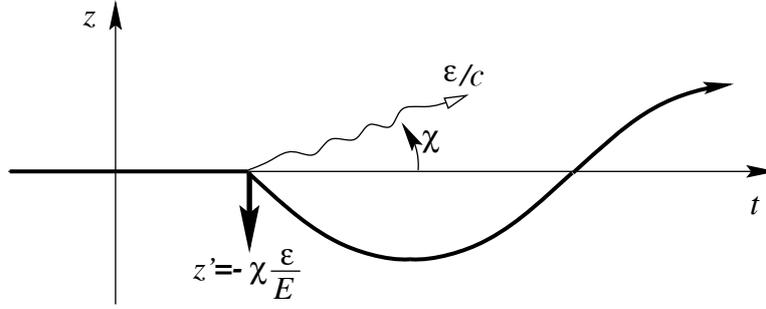


Рис. 5: Раскачка вертикальных бетатронных колебаний происходит из-за того, что квант излучается не параллельно скорости частицы (лишь при усреднении по всем испускаемым квантам получается импульс излучения направленный вдоль скорости частицы).

Поскольку угловая расходимость излучения $\sim 1/\gamma$ для частот в области максимума спектра, от которой идет основной вклад в интеграл, то была применена простая оценка: $\chi^2 \sim 1/\gamma^2$, а далее использованы размерные множители из (17). Безразмерный интеграл будет здесь другим, потому и численный множитель будет отличаться от полученного в (17).

В итоге рассмотренная здесь прямая раскачка приводила бы к чрезвычайной малости ($\sim 1/\gamma^2$) установившегося вертикального эмиттанса по сравнению с горизонтальным (46),¹⁸

$$\bar{\epsilon}_z = \frac{1}{2\zeta_Z} \left. \frac{dA^2}{dt} \right|_{qu,z} \sim \lambda_e \frac{\langle \beta_z/r_0^3 \rangle}{\langle 1/r_0^2 \rangle} \gamma^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} \quad (57)$$

Заметим, что результат не зависит от энергии электронов.

В реальной машине другие факторы намного сильнее раскачивают вертикальные колебания, ими и формируется вертикальный размер пучка.

3.4.1 Установившийся вертикальный размер пучка в реальном электронном накопителе

Достижимая на практике точность изготовления и геометрической выставки магнитов ускорителя приводит к отклонениям реальной магнитной структуры от ее идеализированного описания. Для нас сейчас важны два проявления этой неидеальности:

1) Неравновесные замкнутые орбиты не являются плоскими кривыми, поэтому дисперсия имеет вертикальную составляющую (хотя обычно $D_z \ll D_x$); следовательно, механизм раскачки через связь с продольным движением, рассмотренный в 3.3, действует и на вертикальные колебания.

2) в уравнениях вертикального движения уже в линейном приближении появляется связь с горизонтальной степенью свободы, сильно «разогретой» за счет квантовых флуктуаций:

$$z'' = \frac{1}{H_0 r_0} \left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_0 z + \frac{1}{H_0 r_0} \left. \frac{\partial H_x}{\partial x} \right|_0 x + \dots \quad (58)$$

и в реальной машине¹⁹ мы уже не можем полагать на орбите $\partial H_x/\partial x = -\partial H_z/\partial z = 0$, поскольку симметрия нарушена.

¹⁸И все же этот результат намного превышает минимально возможный $\epsilon_z \sim \lambda_e/\gamma$ в оценке применимости классической механики (1)–(3).

¹⁹Чаще всего причиной появления таких составляющих в разложении поля служит неконтролируемый поворот основных квадрупольных линз вокруг их продольных осей.

Оба фактора приводят к перераспределению (при сильной связи — даже 1:1) в раскачке эмиттансов, так что для установившихся значений теперь имеем:

$$\epsilon_x + \epsilon_z = \bar{\epsilon} \quad (59)$$

здесь $\bar{\epsilon}$ — естественный эмиттанс (46). Вводя коэффициент связи $\kappa = \epsilon_z/\epsilon_x$, можно записать

$$\epsilon_x = \frac{\bar{\epsilon}}{1 + \kappa}, \quad \epsilon_z = \frac{\kappa \bar{\epsilon}}{1 + \kappa}. \quad (60)$$

Обычно в реальной оптике больших машин удается с помощью корректирующих магнитов подавить упомянутые два фактора, раскачивающие вертикальное движение, настолько, что $\kappa \sim 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-2} \ll 1$. Возможности дальнейшего уменьшения x - z связи ограничены точностями диагностического оборудования, применяемого для измерения положения орбиты и размеров пучка.

В заключение численно оценим размеры электронного сгустка $\sigma_E, \sigma_x, \sigma_z$ на примере накопителя ВЭПП-3: энергия 2 ГэВ, частота обращения 4 МГц, синхротронная частота $\Omega_s = 2\pi \cdot 40$ кГц, радиус поворота в магнитах $r_0 \approx 6$ м, дисперсия $D \approx 1$ м, $\alpha_p = 0.055$, $\beta_x \approx 2$ м, бетатронная частота $\nu_x \approx 5.23$, причем на кольцевую часть приходится 3.23, остальное добавляется в прямолинейных промежутках, которыми имеет смысл пренебречь при анализе радиационных эффектов.

Используя (26), (30), (46), (49), (54), находим:

$$\frac{\sigma_E}{E} \approx 0.7 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_l \approx 5 \text{ см}; \quad \bar{\epsilon}_x \approx 2.5 \cdot 10^5 \text{ см}; \quad \sigma_x \approx 0.7 \text{ мм}; \quad \sigma_{x,\text{tot}} \approx 1 \text{ мм}. \quad (61)$$

Приняв коэффициент связи 1%, $\kappa = 0.01$, получим для вертикального размера пучка: $\sigma_z = \sqrt{\epsilon_z \beta_z} = \sqrt{\kappa \epsilon_x \beta_z} \approx \sigma_x \sqrt{\kappa} \approx 70$ мкм. Сгусток имеет форму сильно сплющенного по вертикали и вытянутого вдоль орбиты трехосного эллипсоида, $\sigma_z \ll \sigma_{x,\text{tot}} \ll \sigma_l$. Иногда пучки с таким соотношением размеров называют плоскими. При интенсивности электронного сгустка $N_b = 5 \cdot 10^{11}$ оценим плотность частиц в центре сгустка:

$$\frac{N_b}{(2\pi)^{3/2} \sigma_l \sigma_{x,\text{tot}} \sigma_z} \approx 10^{13} \text{ см}^{-3} \quad (62)$$